

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.63

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ
ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОКЕАНУ¹⁾

© 2021 г. С. Л. Скороходов^{1,*}, Н. П. Кузьмина^{2,**}

¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

**e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 17.03.2021 г.
Переработанный вариант 19.05.2021 г.
Принята к публикации 20.06.2021 г.

На основе уравнения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении представлен анализ устойчивых и неустойчивых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с параболическим вертикальным профилем скорости (течение типа Пуазейля–Куэтта), т.е. с учетом как линейного, так и постоянного сдвига скорости течения. В модели учитывается влияние вертикальной диффузии плавучести и вертикального трения и полагается, что максимальная скорость среднего течения имеет место на границе слоя. Для анализа используется метод малых возмущений. Задача зависит от нескольких физических параметров и сводится к решению спектральной несамосопряженной задачи для уравнения 4-го порядка с малым параметром при старшей производной. Построены асимптотические разложения собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа k . С помощью метода продолжения по параметру k вычислены траектории собственных значений для различных значений физических параметров задачи. Представлен подробный анализ влияния особенностей вертикальной структуры течения на характеристики устойчивых и неустойчивых возмущений. Показано, что фазовые скорости неустойчивых возмущений могут существенно меняться в зависимости от величины линейного вертикального сдвига скорости течения. Библ. 14. Фиг. 4.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, асимптотические разложения, метод продолжения по параметру.

DOI: 10.31857/S0044466921120140

ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает исследования устойчивых и неустойчивых возмущений, типичных для океана геострофических течений с учетом вертикальной диффузии импульса и массы (см. [1]–[8]). В отличие от упомянутых исследований настоящая работа посвящена анализу траекторий собственных значений для течения с параболическим вертикальным профилем скорости (течение типа Пуазейля–Куэтта), т.е. для течения с линейным и постоянным сдвигами скорости. Динамика малых возмущений таких течений описывается линейным уравнением потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [1]–[4].

Постановка задачи. Область, в которой исследуется модельное течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем с верхней и нижней границами z_0 и z_1 и боковыми границами y_0 и y_1 . Декартовы координаты внутри такого слоя следующие: верти-

¹⁾Участие Н.П. Кузьминой в данном исследовании поддерживалось бюджетным финансированием ИО РАН (тема № 0128-2021-0001).

кальная переменная $z \in [z_0, z_1]$, поперечная переменная $y \in [y_0, y_1]$ и продольная переменная x направлена вдоль течения, $x \in (-\infty, \infty)$.

В соответствии с методами исследования неустойчивости течений (см., например, [3]–[5]) представим отклонения безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси x волны:

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi n \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) e^{ik(x-ct)} F\left(\frac{z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

где k – волновое число возмущения вдоль координаты x , $(y_1 - y_0)/n$ – масштаб возмущения в поперечном направлении y , H – вертикальный масштаб слоя, c – комплексная фазовая скорость, а $F(z/H)$ – искомый вертикальный профиль возмущения давления. В безразмерных переменных задача исследования неустойчивости течений с параболическими вертикальными профилями скорости $U(z)$ различной кривизны сводится к решению двух спектральных задач на единичном отрезке.

Задача I. На отрезке $z \in [0, 1]$ найти комплекснозначные собственные функции (СФ) $F = F(z)$ и собственные значения (СЗ) “ c ” – решения уравнения

$$(\alpha z^2 + \beta z - c)(F''' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)F) - 2\alpha F = \frac{1}{ikR}(F^{(IV)} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)F''), \quad (0.2)$$

с краевыми условиями

$$(1 - c)F'(1) - (1 + \alpha)F(1) = \frac{1}{ikR}F'''(1), \quad F''(1) = 0, \quad (0.3)$$

$$-cF'(0) - \beta F(0) = \frac{1}{ikR}F'''(0), \quad F''(0) = 0, \quad (0.4)$$

и при условии

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (0.5)$$

Задача II. На отрезке $z \in [-1, 0]$ найти комплекснозначные СФ $\Phi = \Phi(z)$ и СЗ \tilde{c} – решения уравнения

$$(-az^2 + bz + 1 - \tilde{c})(\Phi'' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi) + 2a\Phi = \frac{1}{ikR}(\Phi^{(IV)} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi''), \quad (0.6)$$

с краевыми условиями

$$-\tilde{c}\Phi'(-1) - (1 + a)\Phi(-1) = \frac{1}{ikR}\Phi'''(-1), \quad \Phi''(-1) = 0, \quad (0.7)$$

$$(1 - \tilde{c})\Phi'(0) - b\Phi(0) = \frac{1}{ikR}\Phi'''(0), \quad \Phi''(0) = 0, \quad (0.8)$$

и при условии

$$a + b = 1, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0. \quad (0.9)$$

В задачах I и II введены следующие обозначения: $R = \text{Re}H/L$, Re – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), H – вертикальный масштаб слоя, $L = y_1 - y_0$ – поперечный масштаб течения, n – число полуволн в поперечном направлении ($n = 1, 2, \dots$), Pr – число Прандтля, Bu – число Бургера, i – мнимая единица.

Краевые условия в (0.3), (0.4), (0.7), (0.8) с участием третьих производных задают отсутствие протекания на горизонтальных границах слоев, а условия для вторых производных задают равенство нулю потоков плавучести.

Особенность обеих задач заключается в том, что возникающие операторы являются несамосопряженными, при старшей производной стоят малые коэффициенты (для реальных течений величина kR может быть очень большой), а спектральные параметры c и \tilde{c} входят в уравнения и в краевые условия. В обеих задачах будет возникать счетное множество СФ и СЗ. Неустойчивые по времени возмущения давления $p(x, y, z; t)$ возникают для тех СФ, которым соответствуют СЗ c_m и \tilde{c}_m с положительной мнимой частью $\text{Im}(c) > 0$ и $\text{Im}(\tilde{c}) > 0$, что следует из представления (0.1).

1. СИММЕТРИЯ СФ И СЗ ЗАДАЧ I И II

Докажем свойство симметрии задач I и II.

Теорема. Собственные значения c_n задачи (0.2)–(0.5) и собственные значения \tilde{c}_n задачи (0.6)–(0.9) при вещественных параметрах $\alpha, \beta, a, b, k, R, Pr, Bu, n = 1, 2, \dots$, и условию $\alpha = a$ обладают симметрией относительно прямой $\text{Re}(\tilde{c}_n) = \frac{1}{2}$, т.е.

$$\text{Re}(\tilde{c}_n) = 1 - \text{Re}(c_n), \quad \text{Im}(\tilde{c}_n) = \text{Im}(c_n). \tag{1.1}$$

Доказательство. В задаче II сделаем замену $z = -t$, тогда $t \in [0, 1]$. Учтем теперь, что

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}, \quad \frac{d^3\Phi}{dz^3} = -\frac{d^3\Phi}{dt^3}, \quad \frac{d^4\Phi}{dz^4} = \frac{d^4\Phi}{dt^4}. \tag{1.2}$$

Перепишем задачу II для функции $\Phi(t), t \in [0, 1]$:

$$(-at^2 - bt + 1 - \tilde{c})(\Phi'' - Bu(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi) + 2a\Phi = \frac{1}{ikR}(\Phi^{(IV)} - BuPr(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi''), \tag{1.3}$$

$$\tilde{c}\Phi'(1) - (1 + a)\Phi(1) = \frac{-1}{ikR}\Phi'''(1), \quad \Phi''(1) = 0, \tag{1.4}$$

$$-(1 - \tilde{c})\Phi'(0) - b\Phi(0) = \frac{-1}{ikR}\Phi'''(0), \quad \Phi''(0) = 0. \tag{1.5}$$

Обе части уравнения (1.3) умножим на (-1) и возьмем комплексное сопряжение в полученном уравнении и в (1.4), (1.5) (сопряженное значение будем обозначать чертой над функциями и параметром: $\overline{\Phi}, \overline{\tilde{c}}$). Учтем вещественность (за исключением СЗ) всех параметров исследуемых задач и аргумента $t \in [0, 1]$, а также $\bar{i} = -i$ и запишем окончательно преобразованную задачу II:

$$(at^2 + bt - 1 + \overline{\tilde{c}})(\overline{\Phi''} - Bu(k^2 + \pi^2 n^2)\overline{\Phi}) - 2a\overline{\Phi} = \frac{1}{ikR}(\overline{\Phi^{(IV)}} - BuPr(k^2 + \pi^2 n^2)\overline{\Phi}'), \tag{1.6}$$

$$\overline{\tilde{c}}\overline{\Phi}'(1) - (1 + a)\overline{\Phi}(1) = \frac{1}{ikR}\overline{\Phi}'''(1), \quad \overline{\Phi}''(1) = 0, \tag{1.7}$$

$$-(1 - \overline{\tilde{c}})\overline{\Phi}'(0) - b\overline{\Phi}(0) = \frac{1}{ikR}\overline{\Phi}'''(0), \quad \overline{\Phi}''(0) = 0. \tag{1.8}$$

Сравнивая теперь задачу (0.2)–(0.4) с полученной задачей (1.6)–(1.8) при $a = \alpha$ (а в силу (0.5), (0.9) и при $b = \beta$), находим, что при условии

$$c = 1 - \overline{\tilde{c}} \tag{1.9}$$

решение $F(z)$ совпадает с решением $\overline{\Phi(t)}$ при $z = t$, что и доказывает утверждение (1.1) теоремы о симметрии СЗ задач I и II. При этом СФ $F(z), z \in [0, 1]$ и $\Phi(z), z \in [-1, 0]$ обладают следующей симметрией:

$$F(z) = \overline{\Phi(-z)}, \quad z \in [0, 1]. \tag{1.10}$$

Теорема доказана.

2. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ ЗАДАЧИ I

Из анализа уравнения (0.2) задачи I следует, что собственные функции $F(z)$ являются целыми функциями, поэтому расчет $F(z)$ и соответствующих СЗ с основан на построении степенных разложений $F(z)$ в граничных точках $z = 0$ и $z = 1$ и их гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (0, 1)$ (см. [5]–[7]).

Пусть спектральный параметр c зафиксирован. Тогда $F(c; z)$ – решение уравнения (0.2) – представим в виде следующих разложений в точках $z = 0$ и $z = 1$:

$$F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z - 1)^m, \quad F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)z^m, \tag{2.1}$$

сходящихся при всех $z, |z| < \infty$. Подставляя представления (2.1) в уравнение (0.2), получаем соотношения для коэффициентов a_m и b_m :

$$a_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\text{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2) + (1-c)ikR]a_{m+2} + ikRm(m+1)a_{m+1} + ikR[\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(c-1) - 2\alpha + \alpha m(m-1)]a_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(1+\alpha)a_{m-1} - ikR\alpha\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)a_{m-2}\}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{-1}, \quad (2.2)$$

$$b_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\text{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2) - ikRc]b_{m+2} + ikRm(m+1)\beta b_{m+1} + ikR[\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)c - 2\alpha + \alpha m(m-1)]b_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)\beta b_{m-1} - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)\alpha b_{m-2}\}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{-1}. \quad (2.3)$$

Асимптотическое поведение коэффициентов a_m и b_m с ростом номера m может быть получено на основе теории Пуанкаре–Перрона анализа рекуррентных уравнений (см. [9]), что дает для коэффициентов a_m и b_m из (2.2) и (2.3) асимптотику

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{p_a}{\sqrt{m}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{p_b}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad p_a, p_b \neq 0,$$

которая обеспечивает быструю сходимость разложений (2.1) на отрезке $z \in [0, 1]$.

Краевые условия (0.3), (0.4) дают связь коэффициентов a_m и b_m , $m = 0, 1, 2, 3$:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{ikR}{6}[(1-c)a_1 - (1+\alpha)a_0], \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{ikR}{6}(cb_1 + \beta b_0). \quad (2.4)$$

Теперь построим функцию $F_1(c; z)$ в виде первого разложения (2.1), задав коэффициенты $a_0^{(1)}$ и $a_1^{(1)}$ следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

коэффициенты $a_2^{(1)}$ и $a_3^{(1)}$ определив из (2.4), а все последующие $a_m^{(1)}$ вычислив из соотношения (2.2), где дополнительно полагаем $a_{-1}^{(1)} = a_{-2}^{(1)} = 0$.

Аналогично этому строим вторую функцию $F_2(c; z)$ в виде разложения в точке $z = 1$, но задав $a_0^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$ следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1.$$

Тогда общее решение $F(c; z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3) в точке $z = 1$ есть линейная комбинация $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$:

$$F(c; z) = t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z), \quad (2.5)$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_1 и t_2 .

Теперь построим две функции $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$ в виде вторых разложений (2.1), задав коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$, $b_1^{(2)}$:

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив b_2 и b_3 в соответствии с (2.4), а все последующие коэффициенты b_m для обоих разложений вычислив из соотношения (2.3) с учетом равенства $b_{-1}^{(1)} = b_{-1}^{(2)} = 0$.

Тогда общее решение $F(c; z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.4) в точке $z = 0$ есть линейная комбинация $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$:

$$F(c; z) = t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z), \quad (2.6)$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_3 и t_4 .

Теперь задачу построения СФ и вычисления СЗ задачи I (0.2)–(0.5) сведем к сшивке в некоторой точке $z_* \in (0, 1)$ комбинаций (2.5) и (2.6) и их первых трех производных:

$$t_1 F_1^{(p)}(c; z_*) + t_2 F_2^{(p)}(c; z_*) - t_3 F_3^{(p)}(c; z_*) - t_4 F_4^{(p)}(c; z_*) = 0, \quad p = 0, 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

Нетривиальное решение системы (2.7) возможно только в случае равенства нулю вронскиана $W(F_1, F_2, F_3, F_4)$:

$$W(F_1, F_2, F_3, F_4; c; z_*) = 0. \tag{2.8}$$

Решая это уравнение, находим искомую комплексную скорость бегущей волны c , зависящую от параметров задачи (0.2)–(0.5), и весовые коэффициенты t_1, t_2, t_3, t_4 .

Решение уравнения (2.8) будем строить с помощью итерационного метода Ньютона:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\dots; c^{(q)}; z_*) \left[\frac{\partial W(\dots; c^{(q)}; z_*)}{\partial c} \right]^{-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \tag{2.9}$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из представленных ниже асимптотических разложений при $k \rightarrow 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$ от вронскиана (2.8) системы (2.7) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру c разложений для всех производных $F_1^{(p)}(c; z_*)$, $F_2^{(p)}(c; z_*)$, $F_3^{(p)}(c; z_*)$, $F_4^{(p)}(c; z_*)$ при $p = 0, 1, 2, 3$. Такое вычисление явной производной $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$ позволило избежать использования конечно-разностной производной

$$\frac{W(\dots; c + \Delta c; z_*) - W(\dots; c; z_*)}{\Delta c}$$

и связанной с ней потери точности при малых $|\Delta c|$.

3. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ЗАДАЧИ I ПРИ $k \rightarrow 0$

Построим при $k \rightarrow 0$ асимптотическое разложение СФ и СЗ при ненулевых параметрах R , Vu , Pr и $n \in \mathbb{N}$. Здесь необходимо отдельно рассмотреть два варианта: случай конечных (ограниченных) СЗ и случай неограниченных СЗ.

3.1. Ограниченные СЗ

Исследуем сначала асимптотическое разложение при $k \rightarrow 0$ для СФ и СЗ задачи I (0.2)–(0.5) при условии, что СЗ имеет конечный предел.

Введем следующую сдвигу аргумента z и СЗ c :

$$z = w + \frac{1}{2}, \quad c = \omega + \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Тогда уравнение (0.2) для $F(w)$ и краевые условия (0.3), (0.4) примут следующий вид на отрезке $w \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$F^{(4)} - PrVu(\pi^2 n^2 + k^2)F'' = ikR \left\{ \left(\alpha w^2 + w - \frac{\alpha}{4} - \omega \right) [F'' - Vu(\pi^2 n^2 + k^2)F] - 2\alpha F \right\}, \tag{3.2}$$

$$F''' \left(-\frac{1}{2} \right) = ikR \left[-\left(\frac{1}{2} + \omega \right) F' \left(-\frac{1}{2} \right) - (1 - \alpha) F \left(-\frac{1}{2} \right) \right], \quad F'' \left(-\frac{1}{2} \right) = 0, \tag{3.3}$$

$$F''' \left(\frac{1}{2} \right) = ikR \left[\left(\frac{1}{2} - \omega \right) F' \left(\frac{1}{2} \right) - (1 + \alpha) F \left(\frac{1}{2} \right) \right], \quad F'' \left(\frac{1}{2} \right) = 0. \tag{3.4}$$

Используя методы асимптотического анализа (см. [10], [11]), представим решение задачи (3.2)–(3.4) и соответствующее СЗ $\omega(k)$ в виде разложения по степеням малого параметра ikR :

$$F(k; w) = \varphi_0(w) + ikR\varphi_1(w) + (ikR)^2\varphi_2(w) + \dots, \tag{3.5}$$

$$\omega(k) = \omega_0 + ikR\omega_1 + (ikR)^2\omega_2 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Подстановка (3.5), (3.6) в уравнение (3.2) и краевые условия (3.3), (3.4) приводит к цепочке краевых задач для $\varphi_0(w)$, $\varphi_1(w)$, Первая из них, для $\varphi_0(w)$, имеет вид

$$\varphi_0''''(w) - \text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_0''(w) = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.8)$$

Решением (3.7), (3.8) является линейная функция

$$\varphi_0(w) = A_0 + B_0 w \quad \forall A_0, B_0. \quad (3.9)$$

Далее, для функции $\varphi_1(w)$ и величины ω_0 имеем уравнение

$$\varphi_1''''(w) - \text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_1''(w) = -\left[\left(\alpha w^2 + w - \frac{\alpha}{4} - \omega_0\right)\text{Bu}\pi^2 n^2 + 2\alpha\right]\varphi_0(w) \quad (3.10)$$

и краевые условия

$$\varphi_1'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \omega_0\right)\varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right) - (1 - \alpha)\varphi_0\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3.11)$$

$$\varphi_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \omega_0\right)\varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right) - (1 + \alpha)\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.10) ищем в виде суммы $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$, где φ_h – общее решение однородного уравнения, а φ_{nh} – частное решение неоднородного уравнения. Учитывая вид (3.9) для φ_0 , выводим следующее представление для функции $\varphi_{nh}(w)$:

$$\varphi_{nh}(w) = D_2 w^2 + D_3 w^3 + D_4 w^4 + D_5 w^5, \quad (3.13)$$

где

$$D_2 = \frac{A_0}{2\text{Pr}} \left[\frac{2\alpha(\text{Pr} + 1)}{\text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2} - \frac{\alpha}{4} - \omega_0 \right] + \frac{B_0}{\text{Pr}^2 \text{Bu}\pi^2 n^2}, \quad D_3 = \frac{A_0}{6\text{Pr}} + \frac{B_0}{6\text{Pr}} \left[\frac{2\alpha(\text{Pr} + 3)}{\text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2} - \frac{\alpha}{4} - \omega_0 \right],$$

$$D_4 = \frac{\alpha}{12\text{Pr}} A_0 + \frac{1}{12\text{Pr}} B_0, \quad D_5 = \frac{\alpha}{20\text{Pr}} B_0. \quad (3.14)$$

Решение $\varphi_h(w)$ запишем в форме

$$\varphi_h(w) = A_1 \text{sh}\lambda w + B_1 \text{ch}\lambda w + D_0 + D_1 w, \quad \lambda = \pi n \sqrt{\text{Pr}\text{Bu}}, \quad (3.15)$$

с произвольными константами A_1, B_1, D_0 и D_1 . Тогда, подставляя решение $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ в краевые условия (3.11), (3.12), получаем систему для искомых коэффициентов A_1 и B_1 :

$$\lambda^2 B_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} + 2D_2 + 3D_4 = 0, \quad \lambda^2 A_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} + 3D_3 + \frac{5}{2}D_5 = 0,$$

$$\lambda^3 \left(A_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} - B_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) + 6D_3 - 12D_4 + 15D_5 + (1 - \alpha)A_0 + \left(\omega_0 + \frac{\alpha}{2} \right) B_0 = 0,$$

$$\lambda^3 \left(A_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} + B_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) + 6D_3 + 12D_4 + 15D_5 + (1 + \alpha)A_0 + \left(\omega_0 + \frac{\alpha}{2} \right) B_0 = 0.$$

Учитывая соотношения (3.14) и разрешая эту систему относительно A_1 и B_1 , получаем систему относительно коэффициентов A_0 и B_0 в представлении $\varphi_0(z)$ из (3.9):

$$\left[\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \right) \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \text{ch}\frac{\lambda}{2} \right] B_0 + \left[\frac{2\alpha(\text{Pr} + 1)}{\lambda} \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \alpha(\text{Pr} + 1) \text{ch}\frac{\lambda}{2} - \omega_0 \lambda \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right] A_0 = 0,$$

$$\left[\frac{\alpha(\text{Pr} + 3)}{\lambda} \text{ch}\frac{\lambda}{2} - \frac{2\alpha(\text{Pr} + 3)}{\lambda^2} \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} (\text{Pr} + 1) \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \omega_0 \left(\frac{\lambda}{2} \text{ch}\frac{\lambda}{2} + (\text{Pr} - 1) \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) \right] B_0 +$$

$$+\left[\frac{\lambda}{2}\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}-(\operatorname{Pr}+1)\operatorname{sh}\frac{\lambda}{2}\right]A_0=0. \quad (3.16)$$

Для нетривиальности решения системы (3.16) необходимо равенство нулю ее детерминанта, что приводит к квадратному уравнению для искомой величины ω_0 :

$$Q_2\omega_0^2 - Q_1\omega_0 + Q_0 = 0, \quad (3.17)$$

где

$$Q_2 = \lambda \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\lambda}{2} + (\operatorname{Pr} - 1) \frac{\lambda}{2} \right],$$

$$Q_1 = \alpha \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \left[\operatorname{Pr} + 3 - \left[\frac{\lambda}{2} (\operatorname{Pr} + 1) + \frac{2}{\lambda} (\operatorname{Pr} + 3) \right] \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] + \alpha \left[\frac{\lambda}{2} + (\operatorname{Pr} - 1) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] (\operatorname{Pr} + 1) \left(\frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right), \quad (3.18)$$

$$Q_0 = \alpha^2 (\operatorname{Pr} + 1) \left(\frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \left[\frac{\operatorname{Pr} + 3}{\lambda} - \left[\frac{\operatorname{Pr} + 1}{2} + \frac{2}{\lambda^2} (\operatorname{Pr} + 3) \right] \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] -$$

$$-\left[\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \right) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right] \left[\frac{\lambda}{2} - (\operatorname{Pr} + 1) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right].$$

Решая уравнение (3.17) и учитывая связь (3.1) между параметрами s и ω , получаем главный член c_0 в разложении двух СЗ при $k \rightarrow 0$:

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} + \frac{Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - 4Q_0Q_2}}{2Q_2}. \quad (3.19)$$

Коэффициенты Q_0, Q_1, Q_2 в дисперсионном уравнении (3.17) вещественны, поэтому вещественность значений $c_{0,2}$ в (3.19) зависит от знака дискриминанта $D = Q_1^2 - 4Q_0Q_2$. При $D < 0$ два СЗ $c_{0,2}$ комплексносопряженные, одно из них лежит в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}c_0 > 0$, а значит, при малых волновых числах k в силу представления (3.1), (3.6) оно обеспечивает условие $\operatorname{Im}c > 0$, что приводит к неустойчивости исследуемого течения.

При $D = Q_1^2 - 4Q_0Q_2 > 0$ оба значения $c_{0,2}$, как видно из (3.19), лежат на оси $\operatorname{Im}c_0 = 0$, а значит, при $k \rightarrow +0$ это практически соответствует нейтральности возмущений с точностью до первого члена разложения (3.6).

Теперь рассмотрим случай достаточно широких течений, которым соответствуют значения параметра $\operatorname{Bu} \ll 1$; при этом значения $\operatorname{Pr} \sim 1$. Тогда, учитывая определение λ в (3.15), заключаем, что при не слишком больших значениях n величина $\lambda \ll 1$. Разложим выражения Q_0, Q_1 и Q_2 из равенств (3.18) в ряд по малому параметру λ , что позволяет получить для $c_{0,2}$ главный член:

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} \pm \left[\frac{\alpha(\operatorname{Pr} + 3)}{12} - \frac{\sqrt{\alpha^2(\operatorname{Pr} - 1)^2 - 12}}{12} \right] + O(\lambda^2). \quad (3.20)$$

Из (3.20) в частном случае $\alpha = 0$ следует результат, ранее полученный в [6], что в исходной задаче ограниченные СЗ при $k \rightarrow 0$ имеют следующую асимптотику при малых $\lambda = \pi n \sqrt{\operatorname{Pr} \operatorname{Bu}}$:

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{6} + O(\lambda^2).$$

Отсюда получаем, что исследуемое течение с такими параметрами является неустойчивым.

3.2. Неограниченные СЗ

Построение асимптотического разложения при $k \rightarrow 0$ для СФ и неограниченно растущих СЗ задачи (0.2)–(0.5) проводится так же, как это было сделано в [6].

Домножая обе части уравнения (0.2) и краевого условия (0.4) на величину ikR , вводя сдвигу $z = \frac{1}{2} + w$, обозначая $\tilde{C} = ikR \left(c - \frac{1}{2} \right)$ и представляя функцию $F(w)$ и значение \tilde{C} в виде ряда по степеням малого параметра ikR ,

$$F(w) = \varphi_0(w) + ikR\varphi_1(w) + \dots, \quad \tilde{C} = ikR \left(c - \frac{1}{2} \right) = \chi_0 + ikR\chi_1 + \dots, \quad (3.21)$$

получаем цепочку краевых задач для $\varphi_0(w), \varphi_1(w), \dots$. Первая из них для $\varphi_0(w)$ и χ_0 имеет вид

$$\varphi_0''''(w) + (\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)\varphi_0''(w) - \chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_0(w) = 0, \quad (3.22)$$

$$\varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\chi_0 \varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\chi_0 \varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.23)$$

Представляя решение уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = A \cos(\lambda w) + B \sin(\lambda w), \quad (3.24)$$

получаем для λ характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - (\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)\lambda^2 - \chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 = 0. \quad (3.25)$$

Некратные корни λ_1^2 и λ_2^2 ($\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$) этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)^2 + 4\chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 \neq 0; \quad (3.26)$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (3.25) запишем относительно величин $q_1 = \lambda_1^2$ и $q_2 = \lambda_2^2$:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2 \pm \sqrt{(\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)^2 + 4\chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2} \right]. \quad (3.27)$$

Дальнейший анализ задачи (3.22), (3.23) аналогичен решению задачи для $\mu = 0$ в [6], поэтому приведем здесь окончательные результаты для асимптотики СЗ и СФ.

3.2.1. Решения $\varphi_0(w)$ вида $\cos(\lambda w)$. Представляя решение $\varphi_0(w)$ уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = A_1 \cos(\sqrt{q_1}w) + A_2 \cos(\sqrt{q_2}w), \quad (3.28)$$

получаем для χ_0 трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.29)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.27). Решая (3.29) численно и проверяя условие некрatности корней (3.26), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.21).

В частных случаях уравнение (3.29) имеет явные решения. Например, при $\text{Pr} = 1$ получаем условие $\cos \frac{\sqrt{\chi_0}}{2} = 0$, решение которого есть

$$\chi_{0,m} = \pi^2 (1 + 2m)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.30)$$

Тогда счетное множество СЗ исходной задачи, неограниченно растущих при $k \rightarrow 0$ и $\text{Pr} = 1$, имеют асимптотику

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} (1 + 2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.31)$$

3.2.2. Решения $\varphi_0(w)$ вида $\sin(\lambda w)$. Представляя решение $\varphi_0(w)$ уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = B_1 \sin(\sqrt{q_1}w) + B_2 \sin(\sqrt{q_2}w), \quad (3.32)$$

получаем для χ_0 трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.33)$$

где q_1 и q_2 определены в (3.27). Решая (3.33) численно и проверяя условие некратности корней (3.26), получаем счетное множество искомым коэффициентов χ_0 в представлении (3.21).

В частных случаях уравнение (3.33) имеет явные решения. Например, при $\text{Pr} = 1$, аналогично п. 3.2.1, для χ_0 получаем уравнение $\sin \frac{\sqrt{\chi_0}}{2} = 0$. Множество его решений $\chi_{0,m}$ имеет вид

$$\chi_{0,m} = \pi^2 4m^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Таким образом, в исходной задаче для решений вида (3.32) возникает счетное множество СЗ, неограниченно растущих при $k \rightarrow 0$; при $\text{Pr} = 1$ первые члены их асимптотики имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} 4m^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Объединяя вместе результаты (3.31) и (3.35), получаем, что в задаче при $\text{Pr} = 1$ первые члены асимптотики множества неограниченно растущих СЗ имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} m^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.36)$$

4. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для проверки результатов расчета СЗ и СФ исходной задачи (0.2)–(0.5) были проведены многочисленные расчеты в широком диапазоне физических параметров Pr , Vi , R и n , параметров α , β и волновых чисел k . При этом варьировалась длина обрываемых разложений (2.1) и их производных по z и по c , значительно увеличивалась мантисса в используемой арифметике, изменялась точка сшивки $z_* \in (0,1)$ разложений в системе (2.7). Итерационный метод Ньютона (2.9) строился так, что начальное приближение $c^{(0)}$ при малых k бралось из асимптотических разложений, построенных в разд. 3, а при увеличении k использовался метод продолжения по параметру. Дополнительным инструментом проверки наличия СЗ в некоторой области \mathcal{D} на комплексной плоскости “ c ” служил обобщенный принцип аргумента (см. [12]) для аналитической в области \mathcal{D} функции $W(c)$,

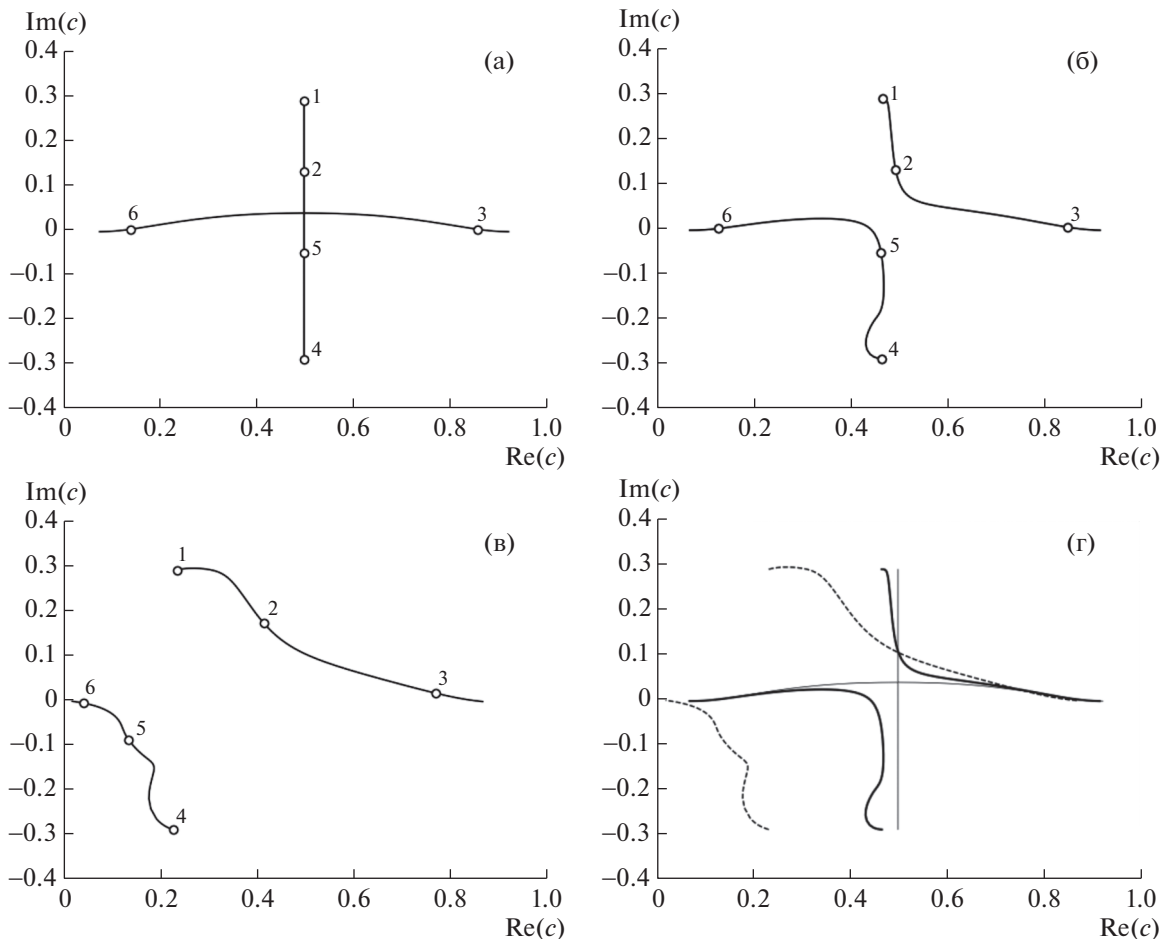
$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad \sum_{p=1}^K c_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} c \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad (4.1)$$

где $W(\dots; c; z_*)$ – вронскиан (2.8) четырех независимых решений, вычисляемых в точке сшивки z_* , K – число комплексных нулей функции $W(\dots; c; z_*)$ внутри области \mathcal{D} , $\sum_{p=1}^K c_p$ – сумма координат этих нулей. В качестве области \mathcal{D} выбирался круг в комплексной плоскости спектрального параметра c , а интегрирование по границе $\partial \mathcal{D}$ проводилось с помощью квадратур Гаусса.

Для случая $\alpha = 0$ результаты расчета СЗ полностью совпали с СЗ, найденными в [6]. Отметим, что в этом случае возникают двойные СЗ с вещественной частью $\text{Re}(c) = 1/2$ при определенных волновых числах k_* , которые также совпали с двойными СЗ в [6]. Такое поведение исследуемых СЗ имеет много схожего с траекториями СЗ в задаче Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта (см. [13], [14]).

В окрестности этих значений k_* метод Ньютона (2.9) начинал сходиться очень медленно, что связано со стремлением к нулю не только вронскиана $W(c)$ (см. (2.8)), но и его производной $W'(c)$ в точке ветвления $c_m(k_*)$. Исключение этой неопределенности типа $0/0$ приводит к необходимости использования модификации метода Ньютона с включением второй производной:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - T \pm \sqrt{T^2 - \frac{2W(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}}, \quad T = \frac{W'(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$



Фиг. 1. Траектории первых двух СЗ задачи I при $\alpha = 0$ (а), при $\alpha = 0.1$ (б), при $\alpha = 0.8$ (в) для параметров $R = 1$, $Pr = 1$, $Vu = 0.0001$, $n = 1$ и $k \in (0, 2000]$. Точки “1” и “4” соответствуют СЗ при $k = 1$, точки “2” и “5” – СЗ при $k = 220$, точки “3” и “6” – СЗ при $k = 1000$; (г) – для наглядности показаны эти траектории при $\alpha = 0$ (тонкая сплошная линия), при $\alpha = 0.1$ (толстая сплошная линия), при $\alpha = 0.8$ (штриховая линия).

причем знаки \pm выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность обеих ветвей двух функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$. Второй порядок ветвления функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ в окрестности точек k_* обеспечивает численную устойчивость итерационного процесса (4.2) и его быструю сходимость.

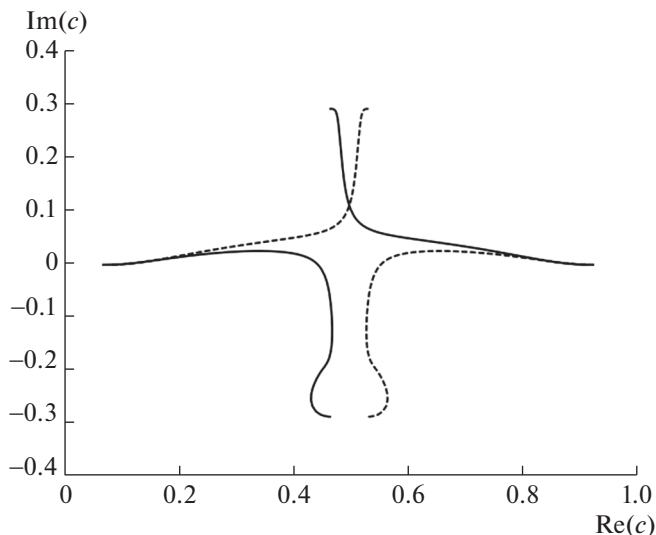
Совокупность описанных методов позволила гарантированно вычислять СЗ и СФ, а также двойные СЗ $c_m(k_*)$ с относительной точностью не менее 20–40 верных десятичных значащих цифр.

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

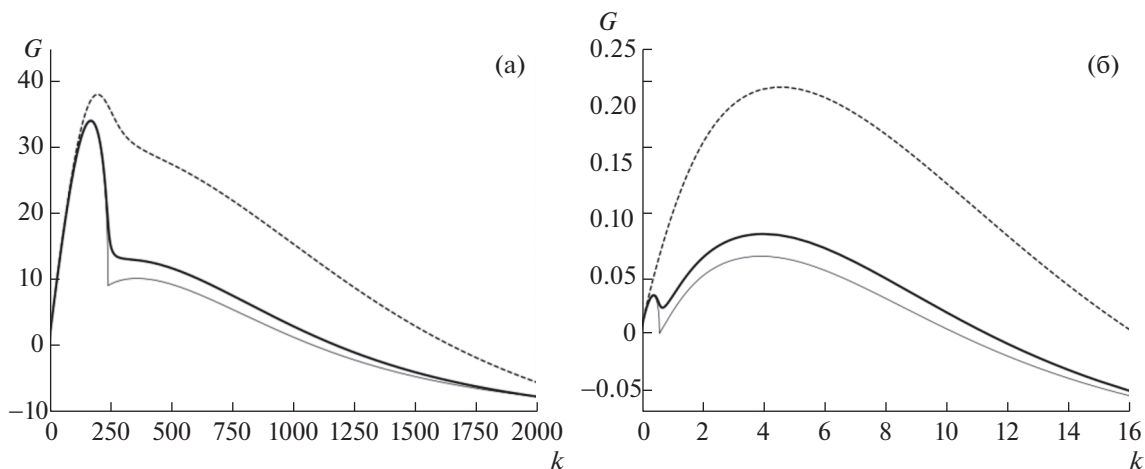
Приведем результаты расчетов спектра задач I и II для различных параметров α , β , Pr , Vu , R , n и волновых чисел k .

На фиг. 1 в плоскости комплексного s приведены траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ задачи (0.2)–(0.5) при возрастании числа $k \in (0, 2000]$ для различных значений α .

Согласно траекториям, представленным на фиг. 1, кривизна профиля скорости течения, возникающая из-за учета вертикального линейного сдвига скорости ($\alpha \neq 0$), существенно влияет на фазовые скорости как устойчивых, так и неустойчивых возмущений. При постоянном сдвиге течения (фиг. 1а), т.е. при $\alpha = 0$, фазовые скорости возмущений имеют постоянную фазовую скорость в широком диапазоне волновых чисел k (вплоть до $k \sim 1000$), в то время как с учетом ли-



Фиг. 2. Траектории первых двух СЗ при $\alpha = 0.1$ задачи I (сплошные линии) и при $a = 0.1$ задачи II (штриховые линии) для параметров $R = 1, Pr = 1, Vu = 0.0001, n = 1, k \in (0, 2000]$.



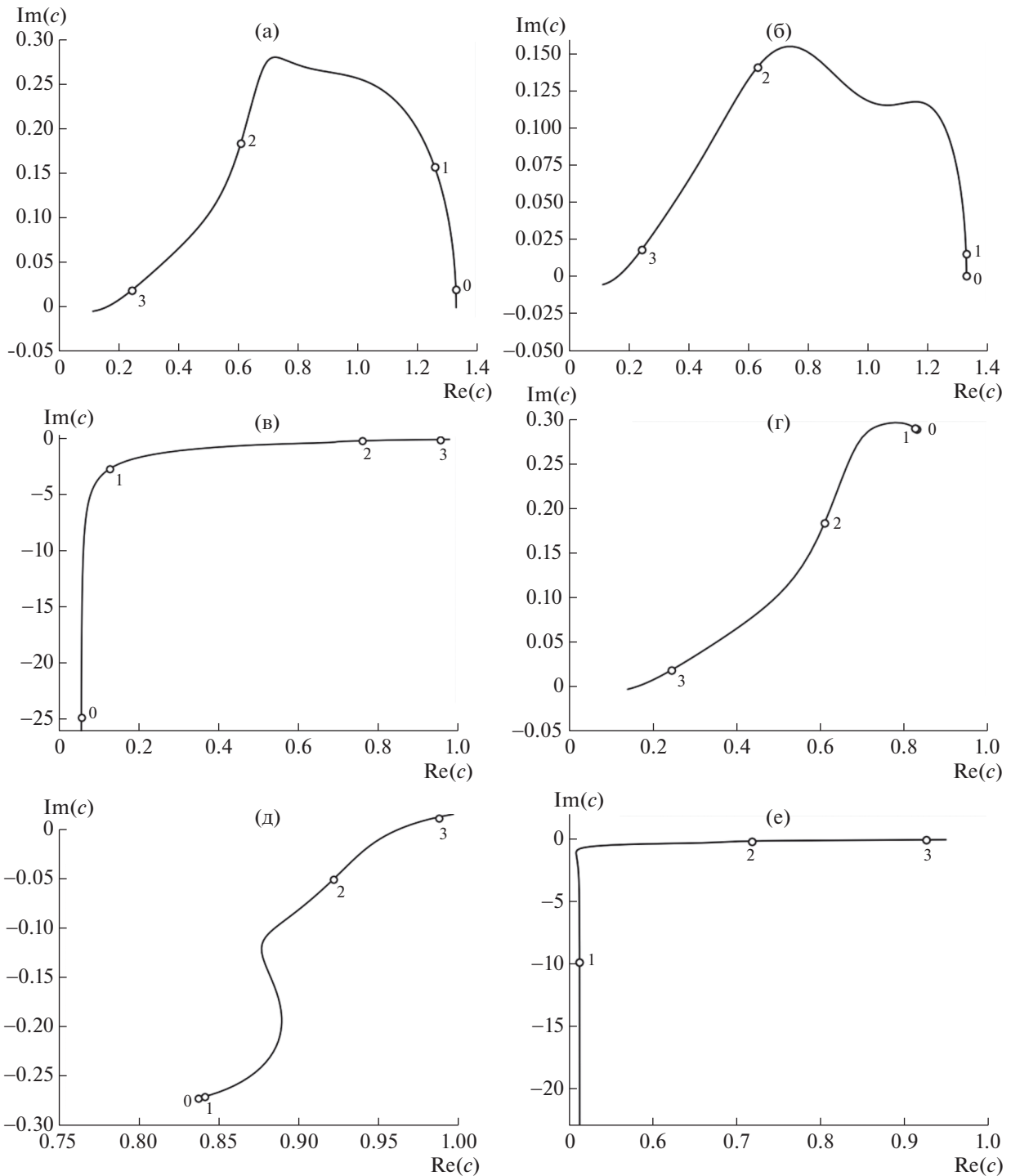
Фиг. 3. Зависимость $G(k)$ при $\alpha = 0$ (тонкая сплошная линия), при $\alpha = 0.1$ (толстая сплошная линия), при $\alpha = 0.8$ (штриховая линия). Фиг. 3а соответствует параметрам $R = 1, Pr = 1, Vu = 0.0001, n = 1$; фиг. 3б – параметрам $R = 100, Pr = 1, Vu = 1, n = 1$.

нейного сдвига фазовые скорости возмущений зависят от волнового числа во всем рассмотренном диапазоне $k \in (0, 2500]$ (фиг. 16, 1в).

На фиг. 2 приведены траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ задачи I при $\alpha = 0.1$ (показаны сплошными линиями) и траектории первых двух СЗ задачи II при $a = 0.1$ (показаны штриховыми линиями). Представленные траектории иллюстрируют доказанное в разд. 1 свойство симметрии СЗ задач I и II.

На фиг. 3 для задачи I показаны зависимости от волнового числа k величины $G(k) = kIm(c)$. При $Im(c) > 0$ значение G есть инкремент роста (или скорость роста) неустойчивых возмущений, обратная величина к которому равняется времени увеличения начальной амплитуды возмущения в e раз.

На фиг. 3а даны зависимости $G(k)$ для широких течений при различных α , а на фиг. 3б – для узких течений. Как видно из представленных результатов, для широких течений величина $G(k)$



Фиг. 4. Траектории СЗ c_1 (а), c_2 (б) и c_3 (в) задачи, рассмотренной в [4], [5] для $R = 1$, $Pr = 1$, $Bu = 0.0001$, $n = 1$, $\alpha = 1$ при $k \in (0, 2000]$. Траектории СЗ c_1 (г), c_2 (д) и c_3 (е) задачи II при тех же параметрах. Точки “0” соответствуют СЗ при $k = 0.1$, точки “1” – СЗ при $k = 1$, точки “2” – СЗ при $k = 220$, точки “3” – СЗ при $k = 1000$.

достигает максимума при $k \approx 230$, а для узких течений – при $k \approx 4.4$. Эти результаты показывают, что с увеличением величины α скорость роста всех неустойчивых возмущений возрастает. Доказательство того, что узкие течения (при $Bu \geq 1$) с постоянным вертикальным сдвигом скорости могут быть неустойчивыми, впервые было получено в [6], [8]. Рассмотренные здесь задачи анализа неустойчивости течения с более сложным вертикальным профилем скорости подтверждают этот результат.

Учитывая, что в океане максимальная скорость течения может наблюдаться не только на верхней границе слоя, например, на поверхности океана, но и внутри слоя, в частности, в “пикноклине”, целесообразно сравнить результаты расчета нашей задачи при $\alpha = 1$ с результатами исследования неустойчивости течения с профилем скорости течения вида $U(z) = 1 - z^2$ в области $z \in [-1, 1]$, представленными в [4], [5].

На фиг. 4а–4в показаны траектории первых трех СЗ c_1, c_2, c_3 задачи, рассмотренной в [4], [5]. СЗ $c_1(k)$ и $c_3(k)$ соответствуют четным СФ, а $c_2(k)$ – нечетной СФ этой задачи.

На фиг. 4г–4е показаны траектории первых трех c_1, c_2, c_3 задачи II с параметрами, соответствующими фиг. 4а–4в.

Важным отличием представленных траекторий является то, что длинноволновые возмущения течения, имеющего максимум скорости в центральной части слоя, могут иметь фазовую скорость, превышающую максимальную скорость потока.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнения потенциального вихря проводится исследование устойчивых и неустойчивых возмущений геострофического течения с параболическим вертикальным профилем скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести, трения и для различных значений волнового числа k и номера моды n . Анализ проводится с помощью метода малых возмущений.

Для возникающих двух спектральных задач I и II на отрезках $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ доказано свойство симметричности СЗ относительно прямой $\text{Re}(c) = 1/2$.

Искомые СФ и СЗ задач I и II строятся с помощью степенных разложений для линейно-независимых решений и их гладкой сшивки.

Найдены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа k в зависимости от физических параметров $R, Rg, Bu, n \in \mathbb{N}$. Показано, что при $k \rightarrow +0$ в задаче существуют два ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с предельной точкой $c = -i\infty$.

Численный анализ, в частности, показал, что в случае параметра $\alpha = 0$ при определенных значениях волнового числа k образуются двойные СЗ, лежащие на прямой $\text{Re}(c) = 1/2$.

Представленные результаты дают возможность судить о важных эффектах динамики геострофических течений применительно к океану: 1) увеличение вертикального линейного сдвига в течениях с вертикальным параболическим профилем скорости (т.е. увеличение параметра α) может существенно влиять на фазовые скорости устойчивых и неустойчивых возмущений; 2) с учетом вертикальной диффузии массы и импульса течения с поперечным масштабом, меньшим радиуса Россби, могут быть неустойчивыми и в случае параболического вертикального профиля скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н.П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // *Фундамент. и прикл. гидрофизика*. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // *Ocean Sci*. 2016. V. 12. P. 1269–1277. <https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016>
3. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
4. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // *Таврический вестн. информат. и матем.* 2016. № 3 (32). С. 88–97.

8. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–688.
9. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
10. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.
11. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
13. *Скороходов С.Л.* Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.
14. *Скороходов С.Л.* Точки ветвления собственных значений оператора Орра–Зоммерфельда // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 5. С. 600–605.