ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 12, с. 2125–2132

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

НОВАЯ СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА И СИСТЕМА СТОКСА С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1)]

М. В. Урев[1,2]

[1] *630090 Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия*

[2] *630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский гос. ун-т, Россия*

e-mail: mih.urev2010@yandex.ru

Поступила в редакцию 11.11.2020 г.
Переработанный вариант 11.11.2020 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

В работе с помощью расширенной схемы абстрактной смешанной вариационной задачи рассмотрена смешанная вариационная постановка двумерной задачи Стокса в ограниченной области с сингулярной правой частью, в частности, дельта-функцией. Сформулированы условия, при выполнении которых доказана теорема о разрешимости и устойчивости решения такой обобщенной задачи. Библ. 13.

Ключевые слова: двумерная задача Стокса, расширенная смешанная постановка, сингулярная правая часть, дробные пространства Соболева.

DOI: 10.31857/S0044466921120152

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается стационарная задача Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{gathered}-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega), 0 < \varepsilon < 1/2, \nu > 0, H^s(\Omega)$ обозначает гильбертово пространство Соболева порядка s с нормой $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ и полунормой $|\cdot|_{s,\Omega}$ (в очевидных случаях пишем $\|\cdot\|_s$ и $|\cdot|_s$) [1, с. 56]. Векторы и пространства, состоящие из вектор-функций, компоненты которых принадлежат $H^s(\Omega)$, будем обозначать полужирным шрифтом так, что

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^2.$$

Для пространства вектор-функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ норма $\mathbf{u}$ обозначается аналогично скалярному случаю и определяется равенством

$$\|\mathbf{u}\|_{s,\Omega}^2 = \|u_1\|_{s,\Omega}^2 + \|u_2\|_{s,\Omega}^2.$$

В случае, когда $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ и $s \geq -1$ вопрос существования, единственности и регулярности обобщенного решения задачи (1) вариационным смешанным методом изучен достаточно полно [2, с. 56], [3, с. 80]. Если $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$, то обобщенное решение задачи (1) будем искать с помощью расширенного смешанного вариационного метода [4]. Дадим описание этого метода в абстрактной форме.

Пусть $X_i, M_i, i = 1, 2$ — четыре вещественных гильбертовых пространства, снабженных скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{X_i}$, $(\cdot,\cdot)_{M_i}$ с соответствующими нормами $\|\cdot\|_{X_i}$, $\|\cdot\|_{M_i}$. Сопряженные

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Новосибирской области (проект 20-41-540003); госконтракта ИВМиМГ СО РАН.

к X_i, M_i пространства обозначим соответственно как X_i', M_i' с нормами $\|\cdot\|_{X_i'}$, $\|\cdot\|_{M_i'}$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим отношение двойственности между пространством и его сопряженным пространством.

Введем три непрерывные билинейные формы:

$$a(\cdot,\cdot) : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}, \quad b_1(\cdot,\cdot) : X_2 \times M_2 \to \mathbb{R}, \quad b_2(\cdot,\cdot) : X_1 \times M_1 \to \mathbb{R},$$

для которых выполняются неравенства

$$a(u,v) \le C\|u\|_{X_1}\|v\|_{X_2} \quad \forall u \in X_1, \quad \forall v \in X_2,$$
$$b_1(v,p) \le C\|v\|_{X_2}\|p\|_{M_2} \quad \forall v \in X_2, \quad \forall p \in M_2,$$
$$b_2(u,q) \le C\|u\|_{X_1}\|q\|_{M_1} \quad \forall u \in X_1, \quad \forall q \in M_1.$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу. Даны $F \in X_2'$ и $G \in M_1'$. Требуется найти пару $(u,p) \in X_1 \times M_2$ такую, что

$$\begin{gathered} a(u,v) + b_1(v,p) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in X_2, \\ b_2(u,q) = \langle G, q\rangle \quad \forall q \in M_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Определим два линеала V_{X_1} и V_{X_2}:

$$V_{X_1} = \{u \in X_1; b_2(u,q) = 0\ \forall q \in M_1\},$$
$$V_{X_2} = \{v \in X_2; b_1(v,\mu) = 0\ \forall \mu \in M_2\}.$$

Отметим, что ввиду непрерывности билинейных форм $b_i(\cdot,\cdot)$ линеалы V_{X_i} являются замкнутыми подпространствами пространств X_i соответственно. Приведем теорему из работы [4] о разрешимости и устойчивости решения расширенной смешанной вариационной задачи (2).

Теорема 1. *Пусть в задаче* (2) *для непрерывных билинейных форм* $a(\cdot,\cdot), b_i(\cdot,\cdot)$ *выполняются следующие условия*:

(i)

$$\sup_{v\in V_{X_2}, \|v\|_{X_2}\le 1} |a(u,v)| \ge C_1\|u\|_{X_1} \quad \forall u \in V_{X_1}, \tag{3}$$

$$\sup_{u\in V_{X_1}} |a(u,v)| > 0 \quad \forall v \in V_{X_2}, \quad v \ne 0, \tag{4}$$

где C_1 *— положительная постоянная*;

(ii) *билинейные формы* $b_i(\cdot,\cdot)$ *удовлетворяют* inf – sup *условию, т.е. существуют константы* $\beta_i > 0$ *такие, что*

$$\inf_{p\in M_2}\sup_{\mathbf{v}\in X_2}\frac{b_1(\mathbf{v},p)}{\|\mathbf{v}\|_{X_2}\|p\|_{M_2}} \ge \beta_1, \tag{5}$$

$$\inf_{q\in M_1}\sup_{\mathbf{u}\in X_1}\frac{b_2(\mathbf{u},q)}{\|\mathbf{u}\|_{X_1}\|q\|_{M_1}} \ge \beta_2. \tag{6}$$

Тогда задача (2) *имеет единственное решение* $(u,p) \in X_1 \times M_2$ *с оценкой устойчивости*

$$\|\mathbf{u}\|_{X_1} + \|p\|_{M_2} \le K(\|F\|_{X_2'} + \|G\|_{M_1'}),$$

где K *— положительная постоянная.*

2. РАСШИРЕННАЯ СМЕШАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТОКСА С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Приведем предварительные сведения. Пусть тройка гильбертовых пространств V, H, V' является оснащением пространства H [5, с. 11], т.е. V плотно вложено в H и H плотно вложено в V'. Для $f \in V'$ полагают

$$(x,f)_H := f(x) = \lim_{n\to\infty}(x,y_n)_H, \quad y_n \in H, \quad x \in V.$$

Эта формула позволяет расширить скалярное произведение в H на тот случай, когда один множитель принадлежит V, а второй V'. Говорят, что функционал $f \in V'$ представлен через скалярное произведение в H (теорема Рисса). При сделанных предположениях относительно V, H, V' приведем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть тройка гильбертовых пространств V, H, V' является оснащением пространства H. Тогда для каждого элемента $v \in V$ существует функционал $f \in V'$ такой, что*

$$\|v\|_V = \|f\|_{V'} \quad \text{и} \quad (v, f)_H = \|v\|_V^2.$$

Доказательство. Определим линейный функционал f на одномерном подпространстве F, состоящем из элементов вида $\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}$, формулой $f(\alpha v) = \alpha \|v\|_V^2$. Норма f на подпространстве F равна $\|v\|_V$. По теореме Хана-Банаха функционал f можно продолжить на все V с сохранением нормы $\|v\|_V$. Представляя $f \in V'$ через скалярное произведение в H, получаем $f(v) = (v, f)_H = \|v\|_V^2$.

Пусть

$$L_{2,0}(\Omega) := \left\{ f \in L_2(\Omega) : \int_\Omega f d\mathbf{x} = 0 \right\}, \quad H_\perp^\varepsilon(\Omega) := H^\varepsilon(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega).$$

Положим $M_1 = H_\perp^\varepsilon(\Omega), M_2 = M_1'$. Нетрудно видеть, что M_1 плотно и непрерывно вложено в $L_{2,0}(\Omega)$. Действительно, если $f \in L_{2,0}(\Omega)$, то усредненная функция

$$f_h(\mathbf{x}) = \int_\Omega f(\mathbf{y}) \omega_h(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\mathbf{y}, \quad h > 0,$$

где $\omega_h(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ – некоторое ядро усреднения, также имеет по теореме Фубини нулевое среднее и $f_h(\mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^2), f_h \equiv 0$, вне $\Omega^h = \bigcup_{\mathbf{x}^0 \in \Omega} \{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < h\}$. Далее обычная аппроксимация с помощью усреднения и срезания носителя (см., например, [6, с. 119], [1, с. 47, с. 71]) дает, что множество функций из $C_0^\infty(\Omega)$ с нулевым средним плотно в $L_{2,0}(\Omega)$ и в $H_\perp^\varepsilon(\Omega)$. Таким образом, тройка пространств $M_1, L_{2,0}(\Omega), M_2$ является оснащением пространства $L_{2,0}(\Omega)$. Для $g \in M_2$ норма определяется в виде

$$\|g\|_{M_2} = \sup_{0 \neq u \in M_1} \frac{\int_\Omega g u d\mathbf{x}}{\|u\|_\varepsilon}.$$

Очевидно $\|g\|_{M_2} \le \|g\|_{-\varepsilon}$. Приведем два следствия леммы 1.

Следствие 1. Для каждой функции $u \in M_1$ существует функционал $f \in M_2$ такой, что

$$\|u\|_\varepsilon = \|f\|_{M_2} \quad \text{и} \quad \int_\Omega f u d\mathbf{x} = \|u\|_\varepsilon^2.$$

Реализация отношения двойственности между M_1 и M_2 через скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ позволяет сформулировать двойственное утверждение.

Следствие 2. Для каждого функционала $f \in M_2$ существует функция $u \in M_1$ такая, что

$$\|f\|_{M_2} = \|u\|_\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_\Omega f u d\mathbf{x} = \|f\|_{M_2}^2.$$

Далее будем использовать следующую теорему 2.4 из [7], которая доказана с помощью построения левого обратного оператора для оператора градиента ∇ и привлечения теории интерполяции.

Теорема 2. *Пусть область Ω является звездной относительно некоторого внутреннего шара, тогда оператор $\nabla^s := \nabla : H_\perp^s(\Omega) \to \mathbf{H}^{s-1}(\Omega), s \in [0,1]$, является ограниченным и инъективным с замкнутой областью значений.*

Теорема 2 устанавливает, что оператор $\nabla^s \in \mathcal{L}(H^s_\perp(\Omega); \mathbf{H}^{s-1}(\Omega))$ взаимно-однозначно отображает $H^s_\perp(\Omega)$ на замкнутую область своих значений $\mathcal{R}(\nabla^s)$, которая является гильбертовым пространством. По теореме Банаха об обратном операторе [8, с. 225] оператор, обратный к ∇^s, ограничен, т.е. ∇^s является изоморфизмом и имеет место обобщенное неравенство Пуанкаре

$$\|q\|_{s,\Omega} \leq C\|\nabla q\|_{s-1,\Omega} \quad \forall q \in H^s_\perp(\Omega), \quad s \in [0,1], \quad C > 0.$$

Отметим, что оператор $-\nabla^s$ является сопряженным к оператору $\operatorname{div}^s := \operatorname{div} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}^{1-s}_0(\Omega); M_2)$. Тогда, так как $\mathcal{R}(\nabla^s)$ есть замкнутое подпространство в $\mathbf{H}^{s-1}(\Omega)$, мы можем применить теорему Банаха об операторах с замкнутой областью значений [9, с. 284], из которой следует, что

$$R(\nabla^s) = V^0_s,$$

где $V_s = \ker(\operatorname{div}^s)$ – ядро оператора div^s, а $V^0_s \subset \mathbf{H}^{s-1}(\Omega)$ обозначает полярное множество для $V_s \subset \mathbf{H}^{1-s}_0(\Omega)$:

$$V^0_s = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega) : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in V_s\}.$$

Из леммы Гальярдо [10, с. 93] следует, что всякую ограниченную область, удовлетворяющую условию конуса, можно представить в виде объединения конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара.

Далее везде $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Сформулируем свойства операторов ∇^ε и $\operatorname{div}^\varepsilon$ в виде следующей леммы для области, удовлетворяющей условию конуса.

Лемма 2. *Пусть ограниченная открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию конуса. Тогда*

(i) *оператор ∇^ε есть изоморфизм из $H^\varepsilon_\perp(\Omega)$ на V^0_ε;*

(ii) *оператор $\operatorname{div}^\varepsilon$ есть изоморфизм из $V^\perp_\varepsilon$ на M_2.*

Доказательство. Обоснование требует только пункт (ii). Благодаря (i) и так как $\operatorname{div}^\varepsilon$ есть сопряженный оператор для $-\nabla^\varepsilon$, мы имеем, что $\operatorname{div}^\varepsilon$ является изоморфизмом из $(V^0_\varepsilon)'$ на $M_2 = (H^\varepsilon_\perp(\Omega))'$. Теперь достаточно доказать, что V^0_ε может быть отождествлено с $(V^\perp_\varepsilon)'$, где $V^\perp_\varepsilon$ есть ортогональное дополнение к V_ε. Пусть f – любой элемент из $(V^\perp_\varepsilon)'$ и пусть $\tilde{f}$ – продолжение f на $\mathbf{H}^{1-\varepsilon}_0(\Omega)$ с помощью равенства

$$\langle \tilde{f}, \mathbf{u}\rangle = \langle f, \mathbf{u}^\perp\rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1-\varepsilon}_0(\Omega),$$

где $\mathbf{u}^\perp$ – ортогональная проекция $\mathbf{u}$ на $V^\perp_\varepsilon$. Тогда $\tilde{f} \in V^0_\varepsilon$ и линейное отображение $f \to \tilde{f}$ изометрически отображает $(V^\perp_\varepsilon)'$ на V^0_ε, что позволяет их отождествить и получить утверждение (ii)

$$(V^0_\varepsilon)' = ((V^\perp_\varepsilon)')' = V^\perp_\varepsilon.$$

Следствие 3. Для заданного функционала $g \in M_2$ существует вектор-функция $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1-\varepsilon}_0(\Omega)$ такая, что

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = g \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\|\mathbf{v}\|_{1-\varepsilon} \leq C\|g\|_{M_2} \leq C\|g\|_{-\varepsilon}, \tag{7}$$

где константа $C > 0$ зависит только от Ω.

Лемма 3. *Для заданной функции $f \in M_1$ существует вектор-функция $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\varepsilon}_0(\Omega)$ такая, что*

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\|\mathbf{u}\|_{1+\varepsilon} \leq C\|f\|_\varepsilon, \tag{8}$$

где константа $C > 0$ зависит только от Ω.

Доказательство. Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 5.4.2 в [11] для случая $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то следует использовать результаты о регулярности решений эллиптических краевых задач в дробных пространствах Соболева (см., например, [11, гл. 3]).

Перейдем к рассмотрению задачи (1), когда $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$. В таком случае теория смешанных вариационных задач, содержащаяся, например, в [3], [12], [13] для задачи (1) не применима. Сформулируем расширенную смешанную вариационную постановку (2) для задачи (1) и применим теорему 1 для установления существования и устойчивости решения полученной задачи. Пусть $X_1 = \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega), X_2 = \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$. Требуется найти пару $(\mathbf{u}, p) \in X_1 \times M_2$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{-1-\varepsilon, 1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \tag{9}$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in M_1,$$

где $a(\cdot,\cdot), b_1(\cdot,\cdot), b_2(\cdot,\cdot)$ – билинейные формы, определяемые в виде

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle_{-\varepsilon,\varepsilon} = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall \mathbf{v} \in X_2,$$

$$b_1(\mathbf{v}, p) = -\langle p, \operatorname{div}\mathbf{v} \rangle_{-\varepsilon,\varepsilon} = -\int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \quad \forall p \in M_2,$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) = \langle \operatorname{div}\mathbf{u}, q \rangle_{-\varepsilon,\varepsilon} = \int_\Omega q \operatorname{div}\mathbf{u} d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1.$$

Здесь и далее для краткости принято $\nu = 1$, а через $\langle \cdot,\cdot \rangle_{-s,s} (s > 0)$ обозначено отношение двойственности между $H^{-s}(\Omega)$ и $H_0^s(\Omega)$, а также между аналогичными векторными и тензорными пространствами, которое реализовано через скалярное произведение в $L_2(\Omega), \mathbf{L}_2(\Omega)$ или $(L_2(\Omega))^4$.

Приступим к доказательству непрерывности и выполнимости $\inf-\sup$ условия для билинейных форм $b_1(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$.

Лемма 4. *Билинейные формы* $b_1(\cdot,\cdot)$ *и* $b_2(\cdot,\cdot)$ *непрерывны, т.е.*

$$b_1(\mathbf{v}, p) \le C\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon}\|p\|_{M_2} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \quad \forall p \in M_2, \tag{10}$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) \le C\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}\|q\|_{\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1. \tag{11}$$

Доказательство. Отметим, что если $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in X_1$, то

$$\operatorname{div}\mathbf{u} \in H^{-\varepsilon}(\Omega) \quad \text{и} \quad \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-\varepsilon,\Omega} \le C\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon,\Omega}. \tag{12}$$

Действительно, так как отображение

$$\mathbf{u} \to \tilde{\mathbf{u}} = \text{продолжение} \quad \mathbf{u} \quad \text{нулем} \quad \text{вне} \quad \Omega$$

является непрерывным отображением $\mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega) \to \mathbf{H}^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ [1, с. 78] и

$$\widehat{\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}\right)d\mathbf{x} = iy_1\widehat{\tilde{u}}_1 + iy_2\widehat{\tilde{u}}_2,$$

то

$$\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-\varepsilon,\Omega}^2 \le \|\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\|_{-\varepsilon,\mathbb{R}^2}^2 \le C_1|||\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}|||_{-\varepsilon,\mathbb{R}^2}^2 =$$

$$= C_1\int_{\mathbb{R}^2}(1 + |\mathbf{y}|^2)^{-\varepsilon}|iy_1\widehat{\tilde{u}}_1 + iy_2\widehat{\tilde{u}}_2|^2 d\mathbf{y} \le 2C_1\int_{\mathbb{R}^2}(1 + |\mathbf{y}|^2)^{1-\varepsilon}|\hat{\tilde{\mathbf{u}}}|^2 d\mathbf{y} =$$

$$= 2C_1|||\tilde{\mathbf{u}}|||_{1-\varepsilon,\mathbb{R}^2}^2 \le C_2\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1-\varepsilon,\mathbb{R}^2}^2 \le C\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon,\Omega}^2,$$

где для $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$

$$|||v|||^2_{s,\mathbb{R}^2} := \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\mathbf{y}|^2)^s |\hat{v}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y},$$

$\hat{v}$ – преобразование Фурье функции v и нормы $\|\cdot\|_{s,\mathbb{R}^2}$ и $|||\cdot|||_{s,\mathbb{R}^2}$ эквивалентны [1, с. 45].

Используя (12) и неравенство Шварца, получаем

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} \le \|q\|_\varepsilon \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-\varepsilon} \le C\|q\|_\varepsilon \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1,$$

т.е. требуемое неравенство (11). Неравенство (10) устанавливается аналогично.

Лемма 5. *Для билинейных форм* $b_1(\cdot,\cdot)$ *и* $b_2(\cdot,\cdot)$ *выполняются* inf – sup *условия* (5) *и* (6) *из теоремы* 1, *т.е. существуют константы* $\beta_1, \beta_2 > 0$:

$$\inf_{p \in M_2} \sup_{\mathbf{v} \in X_2} \frac{b_1(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \|p\|_{M_2}} \ge \beta_1, \tag{13}$$

$$\inf_{q \in M_1} \sup_{\mathbf{u} \in X_1} \frac{b_2(\mathbf{u}, q)}{\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|q\|_\varepsilon} \ge \beta_2. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем неравенство (14). Пусть q – произвольная функция из M_1. Тогда из следствия 1 леммы 1 следует, что существует функционал $f \in M_2$ такой, что

$$\|f\|_{M_2} = \|q\|_\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_\Omega f q d\mathbf{x} = \|q\|^2_\varepsilon.$$

Для такой f из следствия 3 и неравенства (7) получим, что существует вектор-функция $\mathbf{u} \in X_1$ такая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \|f\|_{M_2} \ge \frac{1}{C} \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}.$$

Тогда имеем

$$b_2(\mathbf{u}, q) = \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_\Omega q f d\mathbf{x} = \|q\|_\varepsilon \|f\|_{M_2} \ge \frac{1}{C} \|q\|_\varepsilon \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}.$$

Отсюда следует неравенство (14) с $\beta_2 = 1/C$. Неравенство (13) с помощью леммы 3 и неравенства (8) устанавливается аналогично.

Пусть $\dot{\mathbf{J}}(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω соленоидальных векторов. За V_{X_1} примем пополнение $\dot{\mathbf{J}}(\Omega)$ по норме пространства $X_1 = \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega)$, а за V_{X_2} – пополнение $\dot{\mathbf{J}}(\Omega)$ по норме пространства $X_2 = \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega), \varepsilon \in (0, 1/2)$. Используя лемму 2, можно показать, модифицируя доказательство теоремы 1.6 из [2], что $V_{X_1} = \ker \operatorname{div}^\varepsilon$, $V_{X_2} = \ker \operatorname{div}^{-\varepsilon}$.

Перейдем к рассмотрению билинейной формы $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $V_{X_1} \times V_{X_2}$.

Лемма 6. *Билинейная форма* $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *непрерывна на* $X_1 \times X_2$ *и для нее выполняются условия* (3) *и* (4) *теоремы* 1 *на* $V_{X_1} \times V_{X_2}$, *т.е. существуют константы* $C_1, C_2 > 0$ *такие, что*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \le C_1 \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \tag{15}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_{X_2} \|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \le 1} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ge C_2 \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in V_{X_1}, \tag{16}$$

$$\sup_{\mathbf{u} \in V_{X_1}} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{X_2}, \quad \mathbf{v} \ne 0. \tag{17}$$

Доказательство. Аналогично выводу неравенства (12), можно получить, что

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}\|_{-\varepsilon} &\le C\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \\ \|\nabla \mathbf{v}\|_\varepsilon &\le C\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь применим неравенство Шварца и неравенства (18) для получения оценки непрерывности (15) формы $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ на $X_1 \times X_2$:

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} d\mathbf{x} \le \|\nabla\mathbf{u}\|_{-\varepsilon}\|\nabla\mathbf{v}\|_{\varepsilon} \le C\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall\mathbf{u}\in X_1, \quad \forall\mathbf{v}\in X_2.$$

Нетрудно видеть, что тройка пространств $X_1, \mathbf{L}_2(\Omega), X_1$ является оснащением пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Пусть $\mathbf{u}$ – любая вектор-функция из V_{X_1}. Тогда из леммы 1 получим, что существует функционал $\mathbf{g}\in X_1$ такой, что $\|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon} = \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}$ и

$$\langle \mathbf{g},\mathbf{u}\rangle_{-1+\varepsilon,1-\varepsilon} = \int_\Omega \mathbf{g}\cdot\mathbf{u} d\mathbf{x} = \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}^2. \tag{19}$$

Для доказательства неравенства (16) рассмотрим решение $(\mathbf{v}, p)$ задачи Стокса (1) с правой частью $\mathbf{g}$. В нашем двумерном случае нахождение скорости $\mathbf{v}$ можно путем введения функции тока ϕ так, что $v_1 = \partial\phi/\partial x_2, v_2 = -\partial\phi/\partial x_1$ свести к решению краевой задачи для бигармонического уравнения относительно ϕ:

$$\begin{aligned} &\Delta^2\phi = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &\phi|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

Известные результаты о регулярности решения эллиптических краевых задач (см., например, [11, теорема 3.8.1]) дают для решения задачи (20) оценку

$$\|\phi\|_{2+\varepsilon} \le C\|\psi\|_{-2+\varepsilon}, \quad \psi = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2},$$

из которой следует, что

$$\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \le C\|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon}. \tag{21}$$

Тогда, так как $\mathbf{v}\in V_{X_2}$, то из первого уравнения системы (1) имеем

$$a(\mathbf{w},\mathbf{v}) = \langle\mathbf{g},\mathbf{w}\rangle_{-1+\varepsilon,1-\varepsilon} \quad \forall\mathbf{w}\in V_{X_1}. \tag{22}$$

Возьмем в качестве пробной функции в (22) вместо $\mathbf{w}$ вектор $\mathbf{u}$. Тогда применяя (19) и (21), получаем

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \langle\mathbf{g},\mathbf{u}\rangle_{-1+\varepsilon,1-\varepsilon} = \int_\Omega \mathbf{g}\cdot\mathbf{u}d\mathbf{x}\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}^2 =$$

$$= \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}\|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon} \ge \frac{1}{C}\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall\mathbf{u}\in V_{X_1}.$$

Откуда следует справедливость неравенства (16) с $C_2 = 1/C$. Ввиду включения $V_{X_2}\subseteq V_{X_1}$ выполнение условия (17) является очевидным. Для каждого $\mathbf{v}\in V_{X_2}$ полагаем $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, тогда получаем

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = a(\mathbf{v},\mathbf{v}) = \int_\Omega |\nabla\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} > 0 \quad \forall\mathbf{v}\in V_{X_2}, \quad \mathbf{v}\ne 0.$$

Откуда следует выполнение условия (17).

Таким образом, для смешанной вариационной формулировки (9) задачи Стокса (1) выполнены все условия теоремы 1 и можно сформулировать окончательный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Задача Стокса* (1), *когда* $\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)(0<\varepsilon<1/2)$, *имеет единственное обобщенное решение* $(\mathbf{u}, p)\in\mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega)\times(H_\perp^{\varepsilon}(\Omega))'$ *как решение смешанной вариационной задачи* (9), *и для него справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon,\Omega} + \|p\|_{-\varepsilon,\Omega} \le C\|\mathbf{f}\|_{-1-\varepsilon,\Omega},$$

где $C>0$ – *положительная постоянная*, *не зависящая от* $\mathbf{f}$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По теореме вложения Соболева, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, пространство $\mathbf{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$. Отсюда следует, что дельта-функция Дирака $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, действующая на функции $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$ как $(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0), \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $\mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$, т.е. принадлежит пространству $\mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$. Таким образом, в случае, когда в задаче Стокса (1) на месте функции $\mathbf{f}$ в правой части стоит сингулярная обобщенная функция $\Psi(\mathbf{x}_0)\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ применима теорема 3.

Приведенный в работе анализ расширенной смешанной постановки (9) задачи Стокса (1) с сингулярной правой частью может служит основой для построения и обоснования численных схем метода конечных элементов в дробных пространствах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
3. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite element methods for Navier-Stokes equations. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
4. *Nicolaides R.A.* Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. 1982. V. 19. № 2. P. 349–357.
5. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.
6. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
7. *Guermond J.-L.* The LBB condition in fractional Sobolev spaces and applications // IMA J. Numer. Anal. 2009. V. 29. P. 790–805.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
10. *Adams R.A., Fournier J.F.* Sobolev spaces. 2nd ed. Acad. Press – Elsevier, 2003.
11. *Babuška I., Aziz A.K.* The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. A.K. Aziz, ed. Academic Press, New York and London, 1972.
12. *Brenner S.C., Scott L.R.* The mathematical theory of finite element methods. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
13. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and hybrid finite element methods. Berlin: Springer-Verlag, 1991.