

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ СМЕШАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ ГРУНТ–ТРУБА В КРИОЛИТОЗОНЕ<sup>1)</sup>

© 2021 г. В. И. Васильев<sup>1</sup>, М. В. Васильева<sup>1</sup>, Д. Я. Никифоров<sup>1</sup>, Н. И. Сидняев<sup>2</sup>,  
С. П. Степанов<sup>1,\*</sup>, А. Н. Цеева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 677000 Якутск, ул. Белинского, 58, СВФУ, Россия

<sup>2</sup> 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, МГТУ, Россия

<sup>3</sup> 677000 Якутск, ул. Дзержинского, 20, ОАО ЯкутПНИИС, Россия

\*e-mail: [sepe2a@inbox.ru](mailto:sepe2a@inbox.ru)

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.

Переработанный вариант 16.07.2021 г.

Принята к публикации 04.08.2021 г.

В работе построена и численно реализована математическая модель связанного процесса теплообмена многолетнемерзлого основания здания с системой замораживающих труб и атмосферным воздухом. В качестве математической модели теплопереноса в основании здания взята многомерная задача Стефана в энтальпийной постановке со сглаженными коэффициентами и размазанным источником по температуре. В системе труб теплоперенос описывается одномерным уравнением конвекции-кондукции. Численные результаты на модельных задачах показали, что предложенный численный метод позволяет существенно снижать вычислительную трудоемкость задачи. Библ. 39. Фиг. 6. Табл. 5.

**Ключевые слова:** криолитозона, тепломассоперенос, задача Стефана, метод конечных элементов, вычислительный алгоритм.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120176

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрим связанную модель тепломассопереноса в системе грунт–труба, описываемую системой уравнений параболического типа в двумерной или трехмерной области  $\Omega$ , где тепломассоперенос в сети труб изучается в одномерной постановке, поскольку диаметр трубы существенно меньше размеров расчетной области  $\Omega$  и температура по ее сечению практически постоянна. Дискретизация подобных задач при полноразмерном учете толщины труб приводит к задачам большой размерности вследствие необходимости сгущения расчетной сетки в окрестности труб.

Система грунт–труба широко используется в инженерных приложениях. Например, такими системами описывается тепловое взаимодействие многолетнемерзлых грунтов с проложенными в них трубопроводными системами, заполненными теплоносителями. Они могут существенно влиять на температурное состояние вмещающих грунтов и, следовательно, на их термомеханические характеристики [1], [2]. Подобные системы получают и при моделировании системы сезонно-охлаждающих устройств (СОУ), которые устанавливаются с целью формирования массива мерзлых грунтов под фундаментами зданий и инженерных сооружений для предотвращения их размораживания в летне-осенний период. Кроме того, есть и другой класс трубопроводных систем, получивших широкое распространение – тепловые насосы. Они используются для выкачивания тепла из грунта для обогрева зданий (геотермальный тепловой насос) с возможностью переключения с режима отопления зимой на режим конденсирования летом, их математические модели также описываются системами грунт–труба [3]. Такие системы используют разницу температур грунта и пролегающих труб, для обогрева и охлаждения оснований зданий.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФ (грант 19-11-00230) и Мегагранта Правительства РФ (проект 14.Y26.31.0013).

Подобные задачи встречаются и при решении других прикладных задач. Например, при моделировании фильтрации в трещиновато-пористой среде учет трещин требует специального рассмотрения, поскольку фильтрация в таких средах обладает специфическими свойствами. Трещины отличаются большей проницаемостью и оказывают существенное влияние на течение в пористой среде. Традиционно для связанной системы трещин используют модели двойной пористости [4], [5]. Основной идеей, на которой базируются такие модели, является раздельный расчет течения жидкостей в пористой среде и в трещинах с заданием перетока между ними. Математическая модель двойной пористости записывается следующим образом:

$$c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - \operatorname{div}(k_m \operatorname{grad} p_m) - \alpha_{mf}(p_m - p_f) = q_m, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

$$c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}(k_f \operatorname{grad} p_f) + \alpha_{mf}(p_m - p_f) = q_f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

где  $p_m$  и  $p_f$  — давление в пористой среде и в трещинах. Взаимодействие континуумов задается введением функции перетока  $\alpha_{mf}$ , обеспечивающей массообмен между пористой средой и трещинами. Отметим, что в настоящее время существуют много модификаций данной модели, в которых течение в трещинах рассматривается на размерность ниже [6]–[9].

В медицине подобные математические модели встречаются при исследовании течения крови в сосудах и мелких капиллярах с учетом перетока между ними [10]. При этом сеть мелких капилляров рассматривается как однородная среда. В некоторых случаях артерии рассматриваются как сеть сосудов, имеющая довольно сложную геометрическую структуру и рассмотрение полных трехмерных уравнений Навье–Стокса для описания кровотока в них становится затруднительным. Математические модели со смешанной размерностью позволяют учитывать сложные многомасштабные процессы, происходящие в подобных прикладных задачах, которые описываются системой уравнений:

$$-\operatorname{div}(k_t \operatorname{grad} p_t) + \beta(p_t - p_v) \delta_\gamma = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left( k_v \frac{\partial p_v}{\partial \tau} \right) + \beta(p_v - p_t) = 0, \quad x \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

где  $\gamma$  — одномерная область сети сосудов,  $p_t$  и  $p_v$  — давление в среде и в сети сосудов, через  $\delta_\gamma$  обозначим меру Дирака на одномерной области  $\gamma$  (трещина). Этот термин меры выражает сохранение скорости кровотока (кровь, которая теряется в сосуде, поступает в ткань).

Представленные модели имеют много общего, их отличительной особенностью является использование связанной системы уравнений для вмещающей породы и сети трещин связанных посредством наличия перетока между ними.

Задачи из указанного класса называются задачами со смешанной размерностью. При численной аппроксимации таких задач используются конформные и неконформные расчетные сетки. Под конформными сетками подразумеваются сетки, в которых элементы сетки удовлетворяют условию: если два элемента сетки пересекаются (труба и грунт), то область их пересечения представляет собой их общую грань (или ребро), т.е. соединяются по принципу “узел в узел” [11], [12]. На конформных расчетных сетках можно использовать методы как прямой аппроксимации задач с различными размерностями, так и методы прямого учета, подобные методу дискретной модели трещин (discrete fracture model, DFM), используемого при численном решении задач фильтрации [13]–[17]. В методе конечных элементов для неконформных расчетных сеток используется метод XFEM, что приводит к построению (обогащению) пространства базисных функций [18]. Еще одним методом, в котором используются неконформные сетки — встроенная модель дискретных трещин (embedded discrete fracture model, EDFM). Она базируется на концепции двойной пористости и явно учитывает влияние каждой трещины. В ней используется структурированная сетка для представления матрицы и вводятся дополнительные перетоки путем учета пересечения трещин с матричной сеткой. Таким образом, отпадают проблемы, связанные с необходимостью согласования неструктурированной сетки [19].

Математическая модель теплопереноса в грунте описывается уравнением теплопроводности и учитывает фазовый переход поровой влаги в лед и обратно. Для таких моделей существует два подхода учета фазового перехода: первый, это когда на поверхности (границе) фазового температура постоянна, а второй подход основан на использовании двухфазной модели. В двухфазной

модели нет четкой границы раздела мерзлой и талой зон. Фазовый переход поровой влаги в лед проходит в протяженной области (переходной зоне) — области размазывания в предположении, что фазовый переход проходит в заданном интервале температур [20]–[22].

При построении вычислительной реализации необходимо строить геометрические области и расчетные сетки, в которых геометрическая область труб разрешается сеточно. Расчетные сетки для таких областей имеют области локального сгущения в окрестности труб и приводят при дискретизации исходной задачи к очень большим системам уравнений. Альтернативный подход, используемый в данной работе, основывается на понижении размерности модели на трубе и сведении ее к одномерной гидравлической модели, и далее, в предположении непрерывности поля температур ее аппроксимации с помощью методов, которые аналогичны методам, используемым при моделировании трещин в нефтегазоносных пластах [23], [24]. Полученная таким образом дискретная задача приводит на каждом временном слое к замкнутой системе алгебраических уравнений. Систему уравнений для нахождения распределения температуры можно расширить, добавив учет конвективного переноса тепла (тепломассопереноса). Для расчета скорости фильтрации в грунте используются закон Дарси и уравнение сохранения массы [25], [26]. Математическая модель учитывает наличие фазового перехода поровой влаги, т.е. возникновение зоны мерзлого грунта в области вокруг замораживающих труб и поверхности грунта, обусловленной знакопеременной температурой окружающей среды. Для численного решения задачи фильтрации поровой воды в грунте используется метод фиктивных областей в мерзлом грунте, который был ранее рассмотрен и описан авторами в работе [27].

Основной целью данной работы является построение эффективного вычислительного алгоритма для решения дискретного аналога рассматриваемой задачи в системе грунт–сеть труб [27]–[29].

Работа состоит из введения и семи разделов. В разд. 2 работы описывается энтальпийная математическая модель теплопереноса в промерзающем/протаивающем основании здания со сглаживанием разрывных коэффициентов в грунте с учетом фазового перехода и размазыванием функции источника по температуре. В разд. 3 выводится математическая модель пониженной размерности для описания распределения температуры в трубе. Разд. 4 посвящен построению связанной модели тепло- и массопереноса для системы грунт–труба. В разд. 5 представлена конечно-элементная аппроксимация модели по пространственным переменным и неявная дискретизация по времени. В шестом и в седьмом разделах приводятся расчеты модельной задачи распределения температуры для теплонасосов в двумерной и в трехмерной постановках соответственно.

## 2. ТЕПЛОПЕРЕНОС В ГРУНТЕ

Рассмотрим математическую модель, описывающую динамику распределения температуры системы грунт–труба с учетом фазовых переходов воды в лед и обратно, при заданной температуре фазового перехода  $T^*$  в области  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$  (см. [30], [31]). Здесь  $\Omega^+(t)$  — область, занятая талым грунтом, где температура превышает температуру фазового перехода и  $\Omega^-(t)$  — область, занятая мерзлым грунтом:

$$\Omega^+(t) = \{x \mid x \in \Omega, \quad T(x, t) > T^*\} \quad \Omega^-(t) = \{x \mid x \in \Omega, \quad T(x, t) < T^*\}.$$

Фазовый переход происходит на поверхности раздела областей, занятых талым и мерзлым грунтами  $S = S(t)$ .

Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми переходами используется классическая модель Стефана [32], [33], описывающая тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты на поверхности раздела талого и мерзлого грунтов

$$(\alpha(\phi) + \rho^+ L \delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\phi) \operatorname{grad} T) = f, \quad (2.1)$$

где  $L$  — удельная теплота фазового перехода,  $\delta(T - T^*)$  — дельта-функция Дирака. Для коэффициентов уравнения имеем следующие соотношения:

$$\alpha(\phi) = \rho^- c^- + \phi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-), \quad \lambda(\phi) = \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-),$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & T < T^*, \\ 1 & T > T^*, \end{cases} \quad \delta(T - T^*) = \frac{d\phi}{dT},$$

где  $\rho^+, c^+$  и  $\rho^-, c^-$  – плотность и удельная теплоемкость талой и мерзлой зон, соответственно.

Поскольку рассматривается процесс распространения тепла в насыщенной пористой среде, то для коэффициентов объемной теплоемкости в мерзлом и талом грунтах соответственно имеем

$$c^- \rho^- = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i, \quad c^+ \rho^+ = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w,$$

где  $m$  – пористость. Индексы  $sc, w, i$  обозначают соответственно скелет пористой среды, воду и лед. Для коэффициентов теплопроводности в талой и мерзлой зоне имеем аналогичные соотношения:

$$\lambda^- = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_i, \quad \lambda^+ = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_w.$$

На практике фазовые превращения не проходят мгновенно и могут проходить в малом интервале температуры  $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$ . В качестве функции  $\phi$  и  $\delta(T - T^*)$  возьмем достаточно гладкие функции  $\phi_\Delta$  и  $\delta_\Delta(T - T^*)$  [34], зависящие от температуры:

$$\phi_\Delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{T - T^*}{\sqrt{2}\Delta} \right) \right), \quad \delta_\Delta(T - T^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp \left( -\frac{(T - T^*)^2}{2\Delta^2} \right).$$

Тогда получим следующее уравнение для температуры в области  $\Omega$ :

$$c\rho_\Delta(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T)\operatorname{grad} T) = f, \tag{2.2}$$

где  $c\rho_\Delta(T) = \alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L\delta_\Delta(T - T^*), \lambda_\Delta(T) = \lambda(\phi_\Delta)$ . Полученное уравнение (2.2) является стандартным квазилинейным параболическим уравнением.

### 3. ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ТРУБЕ

Для расчета теплового режима системы труб будем использовать модель пониженной размерности – теплогидравлическую модель (см. фиг. 1). В данной модели мы предполагаем, что в трубе циркулирует хладоноситель (фреон) с достаточно высокой температурой кипения, и поэтому в данной модели мы не будем учитывать фазовый переход хладоносителя в системе труб. Запишем уравнение теплопроводности, описывающее тепловой режим движущегося по трубе хладоносителя в цилиндрической системе координат:

$$c_p\rho_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}] \tag{3.1}$$

где  $c_p, \rho_p$  и  $\lambda_p$  – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность теплоносителя,  $T$  – температура хладоносителя в трубе,  $v_r$  – скорость движения хладоносителя в радиальном направлении и  $v_\xi$  – скорость движения хладоносителя в направлении движения потока.

При описании теплообмена хладоносителя в трубе с вмещающим грунтом необходимо учитывать теплопередачу через тонкую цилиндрическую стенку. Для математического описания данного процесса запишем линейный тепловой поток следующим образом:

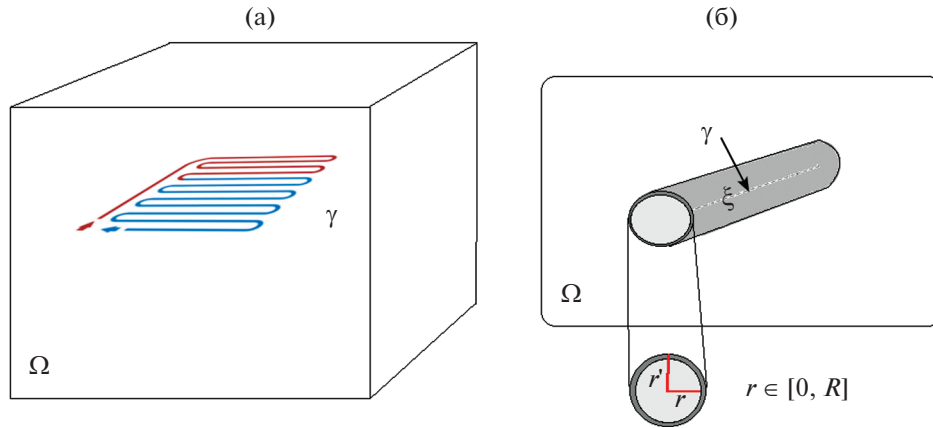
$$q_c = -\alpha\pi(T - T_p), \quad r = R, \tag{3.2}$$

где  $q_c$  – тепловой поток через цилиндрическую стенку,  $T$  – температура грунта,  $T_p$  – температура хладоносителя в трубе.

Здесь для вычисления коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  использованы формулы из работы [35]

$$\alpha = \frac{1}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{r\alpha_p} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{r'}{r} + \frac{1}{r'\alpha_g}, \tag{3.3}$$

где  $\beta$  – термическое сопротивление стенки,  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности стенки трубы,  $\alpha_p$  и  $\alpha_g$  – коэффициенты теплоотдачи от хладоносителя к стенке и от стенки к грунту,  $r$  и  $r'$  –



**Фиг. 1.** Иллюстрация расчетной области для системы грунт–труба. (а)  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ),  $\gamma \in \mathbb{R}^1$  и  $\gamma \in \Omega$ . (б) усредненная по радиусу модель для сети труб,  $r \in [0, R]$  и  $R$  – радиус трубы.

внутренний и наружный радиусы трубы (см. фиг. 1, где наружный радиус подразумевает учет толщины стенки трубы).

Поскольку для течения в трубах характерны значительные скорости движения хладоносителя в продольном направлении, то целесообразно пренебречь радиальной скоростью течения,  $v_r = 0$ . Далее уравнение (3.1) умножим на радиус  $r$  и проинтегрируем полученное уравнение вдоль оси  $r \in [0, R]$

$$\int_0^R c_p \rho_p r \frac{\partial T}{\partial t} dr + \int_0^R c_p \rho_p r v_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} dr - \int_0^R r \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) dr + \lambda_p R \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{3.4}$$

Определим среднюю температуру хладоносителя в трубе:

$$T_p = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T dr$$

и с учетом контакта трубы с грунтом (3.2)

$$\lambda_p R \frac{\partial T_p}{\partial r} = R \alpha \pi (T - T_p)$$

получим следующее уравнение:

$$\pi R^2 c_p \rho_p \left( \frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right) - \pi R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right) + 2 R \alpha \pi (T - T_p) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}] \tag{3.5}$$

описывающее модель пониженной размерности в трубе (теплогидравлическая модель).

#### 4. РАСЧЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему теплового насоса, которая используется для выкачивания тепла из грунта для обогрева зданий с возможностью переключения с режима отопления зимой на режим конденсирования летом. Математическая модель описывается системой грунт–труба, которая использует разницу температур грунта и пролегающих труб. Данная модель описывает тепловое взаимодействие грунтов с трубопроводными системами, заполненными теплоносителями.

Для данной модели, когда стенки трубы сделаны из высокотеплопроводного материала, можно предположить непрерывность температуры на границе контакта трубы и грунта. В данном случае воспользуемся дельта-функцией Дирака и зададим теплоперенос в виде внутренних стоков (источников) тепла в уравнении (2.2):

$$f = q \delta_\gamma, \tag{4.1}$$

где  $q$  – мощность стока тепла и  $\delta_\gamma$  – дельта-функция Дирака, определяющая положение трубы в грунтовом массиве

$$\delta_\gamma(x) = \begin{cases} 1/S, & x \in \gamma, \\ 0, & x \notin \gamma, \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $S$  – площадь сечения трубы.

Далее введем индекс  $m$  для грунта и  $p$  для трубы. Предполагая идеальный тепловой контакт между наружной поверхностью труб и окружающего массива грунтов, мощность стоков тепла запишем в виде:

$$q = 2\pi R\alpha_p(T_m - T_p), \quad (4.3)$$

где  $\alpha_p$  – коэффициент теплообмена между поверхностью трубы и теплоносителем, циркулирующим в грунтовом теплообменнике,  $T_m$  – температура грунта,  $T_p$  – температура теплоносителя и  $R$  – радиус трубы. Связанную систему уравнений для температуры грунта (2.1), (4.3) и для температуры системы труб (3.5) запишем в следующем обобщенном виде:

$$\begin{aligned} c\rho_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T_m)\operatorname{grad}T_m) + \kappa(T_m - T_p)\delta_\gamma(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ b_p\left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) - S\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) - \kappa(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $b_p = Sc_p\rho_p$ ,  $S = \pi R^2$ ,  $\kappa = 2\pi R\alpha_p$ ,  $\gamma$  – кривая, описывающая расположение системы труб.

Систему уравнений дополним начальным условием

$$T_m(x) = T_p(x) = T_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \quad (4.5)$$

и граничным условием Неймана для грунта:

$$-\lambda_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.6)$$

а на концах трубы зададим различные граничные условия Дирихле и Неймана:

$$\begin{aligned} T_p &= T_d, \quad \xi \in \xi_D, \\ -\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial n} &= 0, \quad \xi \in \xi_N. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассмотрим также и полноразмерную математическую модель без понижения порядка по пространственным переменным для уравнения в трубе

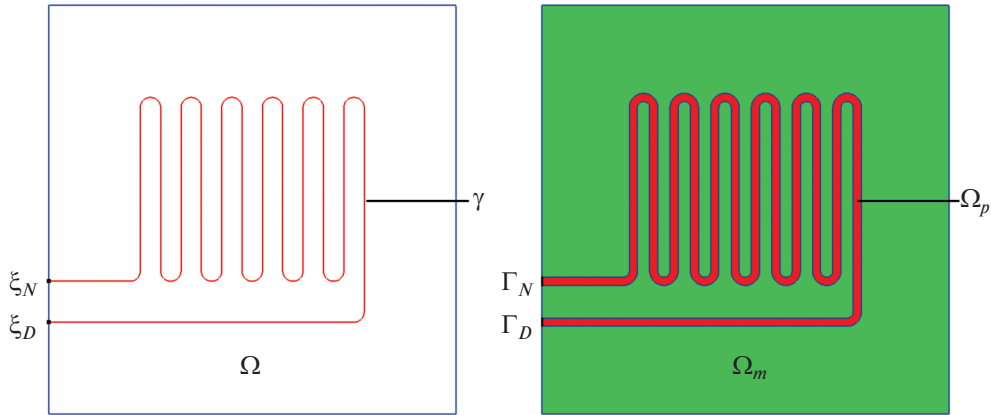
$$\begin{aligned} c\rho_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T_m)\operatorname{grad}T_m) + \alpha_p(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \Omega_m, \\ c_p\rho_p\left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi \cdot \operatorname{grad}T_p\right) - \operatorname{div}(\lambda_p\operatorname{grad}T_p) - \alpha_p(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \Omega_p, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\Omega_p$  – двумерная подобласть трубы (см. фиг. 2).

Данная система параболических уравнений (4.8) замыкаются начальным и граничными условиями для грунта (4.6) и (4.7), а для области трубы зададим фиксированную температуру  $T_p = T_d$  на границе  $x \in \Gamma_D$ , а на выходе – однородное граничное условие Неймана  $-\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial n} = 0$  при  $x \in \Gamma_N$ .

## 5. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для аппроксимации рассматриваемой математической модели изучаемого процесса (10)–(13) будем использовать неконформные сетки и метод конечных элементов [9], [36]. Определим триангуляцию  $T_m^h$  расчетной области  $\Omega$ , где  $h$  – некоторый параметр, характеризующий простран-



Фиг. 2. Двумерная область.

ственную сетку и конечно-элементное разбиение  $T_p^h$  расчетной области  $\gamma$ . Определим пространства

$$V_m = \hat{V}_m = H^1(\Omega), \quad V_p = \{v \in H^1(\gamma) : v = T_d, x \in \xi_D\},$$

$$\hat{V}_p = \{v \in H^1(\gamma) : v = 0, x \in \xi_D\},$$

и введем конечномерные пространства  $V_m^h, \hat{V}_m^h \subset V_m, V_p^h, \hat{V}_p^h \subset V_p$ . Далее определим в них следующую вариационную постановку задачи: найти  $(T_m, T_p) \in (V_m^h, V_p^h)$  такие, что

$$\int_{\Omega} c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad} T_m^{n+1} \cdot \text{grad} v_m dx + \int_{\gamma} \kappa(T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0,$$

$$\int_{\gamma} b_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \right) v_p d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \cdot \text{grad}_{\xi} v_p d\xi -$$

$$- \int_{\gamma} \kappa(T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0, \tag{5.1}$$

где  $v_m \in \hat{V}_m^h$  и  $v_p \in \hat{V}_p^h$ . Для аппроксимации по времени используем устойчивую неявную дискретизацию с шагом по времени  $\tau$ , где  $T_m^n$  и  $T_p^n$  – значения температуры с предыдущего временного слоя.

Будем использовать одну из схем, предложенных в работе [28], где вместо нелинейных коэффициентов будем использовать линейризованные коэффициенты со значениями температуры  $\tilde{T}_m^{n+1}$ , которые являются решениями аналогичной системы:

$$\int_{\Omega} c\rho_{\Delta}(T_m^n) \frac{\tilde{T}_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(T_m^n) \text{grad} \tilde{T}_m^{n+1} \cdot \text{grad} v_m dx + \int_{\gamma} \kappa(\tilde{T}_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0,$$

$$\int_{\gamma} b_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \right) v_p d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \cdot \text{grad}_{\xi} v_p d\xi -$$

$$- \int_{\gamma} \kappa(\tilde{T}_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0. \tag{5.2}$$

Далее, аппроксимацию по пространству покажем только для системы (5.1), для системы (5.2) дискретный аналог строится аналогично.

Поясним проблемы вычислительной реализации в следующем виде:

$$T_m = \sum_i^{N_m} T_m^i \phi^i, \quad T_p = \sum_i^{N_p} T_p^i \psi^i, \quad w = \sum_i^{N_m} \phi^i, \quad w_p = \sum_i^{N_m} \psi^i,$$

где  $T_m^i$  и  $T_p^i$  – неизвестные значения,  $\phi^i$  – конечно-элементные базисы при триангуляции  $\mathcal{T}_m^h$ ,  $\psi^i$  – базисные функции разбиения  $\mathcal{T}_p^h$ ,  $N_m$  – число элементов базиса  $\mathcal{T}_m^h$ ,  $N_p$  – число элементов базиса  $\mathcal{T}_p^h$ . Таким образом, после дискретизации системы (5.1) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ -A_{pm} & A_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_m \\ T_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ f_p \end{pmatrix},$$

где подматрицы и правая часть вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_m &= \left\{ a_{ij}^m = \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1})}{\tau} \phi^i \phi^j dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad} \phi^j \cdot \text{grad} \phi^i dx + \int_{\gamma} \kappa \phi^i \phi^j d\xi \right\}, \\ A_p &= \left\{ a_{ij}^p = \int_{\gamma} b_p \left( \frac{\Psi^j}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} \Psi^j \right) \Psi^i d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} \Psi^j \cdot \text{grad}_{\xi} \Psi^i d\xi + \int_{\gamma} \kappa \Psi^i \Psi^j d\xi \right\}, \\ A_{mp} &= \left\{ a_{ij}^{mp} = \int_{\gamma} \kappa \Psi^j \phi^i d\xi \right\}, \\ A_{pm} &= \left\{ a_{ij}^{pm} = \int_{\gamma} \kappa \phi^j \Psi^i d\xi \right\}, \\ f_m &= \left\{ f_i^m = \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1})}{\tau} T_m^n \phi^i dx \right\}, \\ f_p &= \left\{ f_i^p = \int_{\gamma} \frac{b_p}{\tau} T_p^n \Psi^i d\xi \right\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

а также  $T_m$  и  $T_p$  – векторы решения. Отметим, что  $A_{mp} = A_{pm}^T$ .

Ввиду того, что мы рассматриваем связанную задачу, описывающую быстро- и медленнопротекающие процессы, очевидно, что для данной задачи хорошо подойдут схемы расщепления. Пусть  $y = (T_m, T_p)^T$ , тогда дискретную систему можно представить в виде  $Ay = b$ , где

$$A = \begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ -A_{mp}^T & A_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_m \\ b_p \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Представим матрицу  $A$  в виде суммы матриц  $A = A_1 + A_2$ , тогда получим явно-неявную схему  $A_1 y^{n+1} + A_2 y^n = b$ . В зависимости от  $A_1$  и  $A_2$  получаются различные схемы расщепления [37]. В этом случае на каждом временном слое сначала вычисляется уравнение для быстрого процесса. Только потом рассчитывается медленный процесс [38]. В нашем случае это приводит к системе уравнений с верхне-треугольной матрицей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ 0 & A_p \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{mp}^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

В данной схеме сначала решается уравнение для трубы, температура грунта берется с предыдущего временного слоя. Затем найденная температура в трубе используется для вычисления температуры в грунте [37].



**Таблица 1.** Количество неизвестных для сеток, где  $N = N_m + N_p$

Сетка	$N_m$	$N_p$	$N$
Эталонная сетка	501 309	51 719	553 028
Сетка 1	22 801	3 619	26 420
Сетка 2	44 521	5 039	49 560
Сетка 3	73 441	6 527	79 968

Аналогично, для второй задачи (4.8), (4.5) и (4.6) определим вариационную постановку: найти  $(T_m, T_p) \in (V_m, V_p)$  такие, что

$$\int_{\Omega} c_{p\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx - \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad } T_m^{n+1} \cdot \text{grad } v_m dx + \int_{\Omega} \alpha_p (T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_m dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_p} c_p \rho_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad } T_p^{n+1} \right) v_p dx - \int_{\Omega_p} \lambda_p \text{grad } T_p^{n+1} \cdot \text{grad } v_p dx -$$

$$- \int_{\Omega_p} \alpha_p (T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p dx = 0, \tag{5.6}$$

где  $V_m = \hat{V}_m = H^1(\Omega), V_p = \{v \in H^1(\Omega_p) : v = T_d, x \in \Gamma_D\}, \hat{V}_p = \{v \in H^1(\Omega_p) : v = 0, x \in \Gamma_D\}$ .

### 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

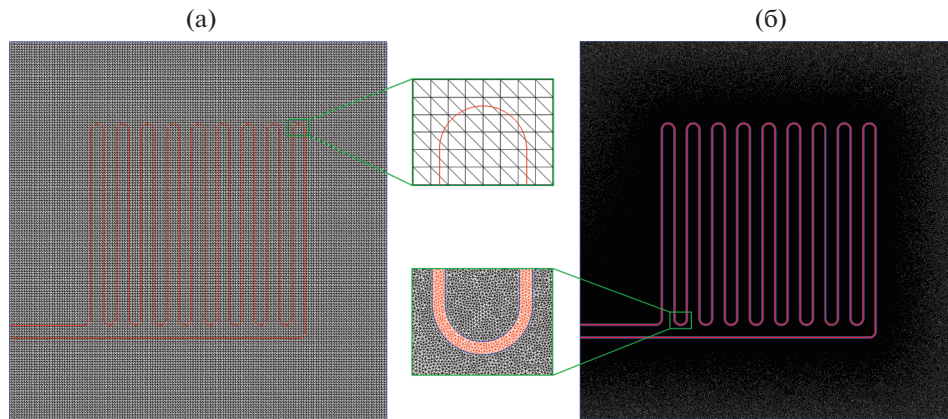
Проведем численное моделирование рассматриваемой задачи в двумерной постановке при следующих значениях входных данных: для талой зоны  $\rho^+ c^+ = 2.5 \times 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $k^+ = 1.5$  [Вт/(м · °К)], для мерзлой зоны  $\rho^- c^- = 2.0 \times 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $k^- = 2.0$  [Вт/(м · °К)], и для фазового перехода  $\rho^+ L = 60 \times 10^6$  [Дж/м]. В качестве расчетных параметров системы труб используем следующие параметры:  $v_{\xi} = 0.5$  [м/с],  $\rho_p c_p = 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $R = 0.05$  [м],  $\alpha_p = 80$  [Вт/(м · °К)] и температура хладоносителя на входе  $T_d = -20^\circ\text{C}$ . Коэффициент кондуктивной теплопроводности равен  $k_p = 0.09$  [Вт/(м · °К)]. Грунт и труба имеют начальную температуру  $2.0^\circ\text{C}$ . Численное моделирование проводится для квадратной области по  $X = 20$  м и  $Y = 20$  м. Все расчеты проводятся на 30 сут.

Апробацию предложенной модели и численного метода начнем с проверки сходимости численного решения на последовательности сгущающихся сеток по пространственным переменным. Для этого построим три последовательно измельчающиеся грубые сетки (см. табл. 1) для задачи (4.4)–(4.7) и эталонную сетку для задачи (4.8), (4.5), (4.6) без понижения порядка для системы труб (фиг. 3). Зафиксируем шаг по времени  $\tau = 24$  ч. Для сравнения температуры в грунте используем следующую формулу относительной  $L_2$  погрешности в процентах:

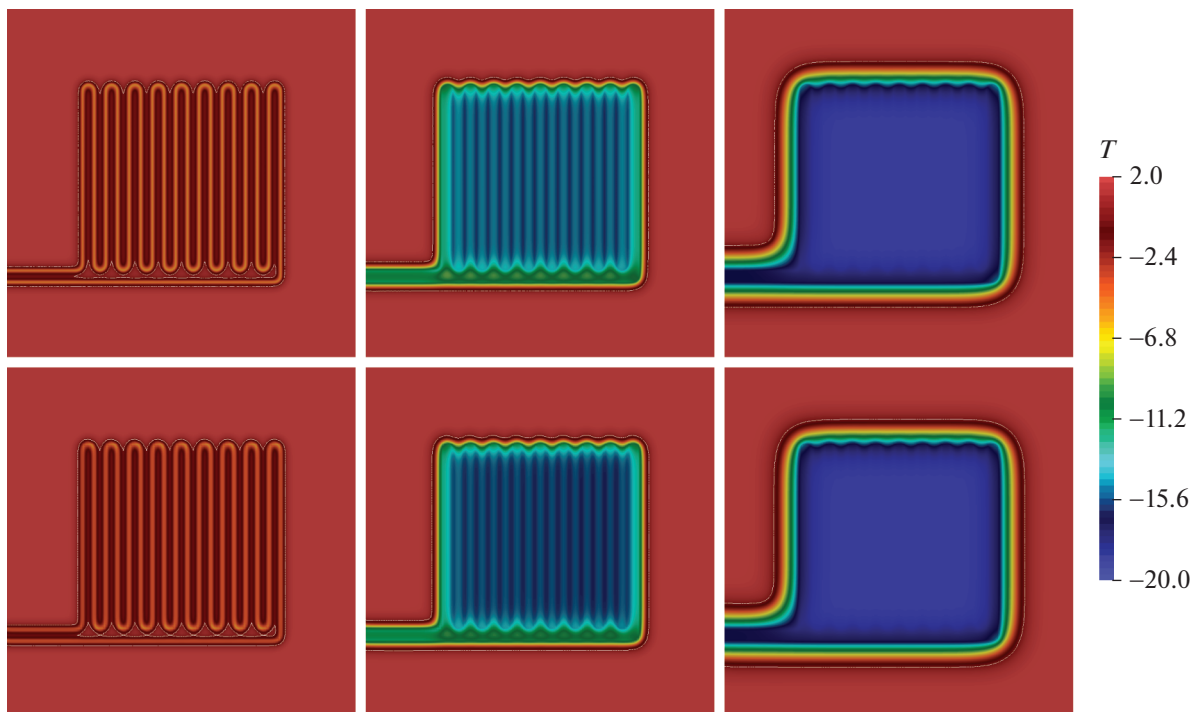
$$e_{L_2} = 100 \cdot \frac{\|T_1 - T_2\|_{L_2}}{\|T_1\|_{L_2}}, \tag{6.1}$$

где  $T_1$  – температура в грунте на эталонной сетке и  $T_2$  – температура в грунте на грубых сетках.

Результаты решения задачи теплопереноса представлены на фиг. 4. Распределение температуры представлено для нескольких временных слоев и иллюстрирует динамику движения хладоносителя в трубе и начало замораживания окружающего грунта. Сравнение предлагаемой модели с полноразмерной моделью отображено на табл. 2. Для проверки сходимости по временной сетке сравним решения с тремя шагами по времени ( $\tau_1 = 48$  ч,  $\tau_2 = 24$  ч и  $\tau_3 = 12$  ч) с решением с шагом по времени  $\tau = 2$  ч (табл. 3) на пространственной сетке 2. Для проверки схемы расщепления (5.5), для трех шагов по времени будем сравнивать решение без расщепления с решением с расщеплением. На табл. 4 представлен результат использования схемы расщепления. Представ-



Фиг. 3. Сетка 1 (а) и эталонная сетка (б).



Фиг. 4. Распределение температуры на различные моменты времени  $t = 1, 5$  и  $30$  сут (слева направо) с  $\tau_1$ . Верхние графики – решение на эталонной сетке, нижние – решение на сетке 1. Белая линия – граница раздела талой и мерзлой грунтов.

ленные результаты иллюстрируют эффективность предложенной новой математической модели для системы труба–грунт в условиях криолитозоны.

На табл. 5 представлено время численной реализации предложенного численного метода за весь период решения задачи в зависимости от сетки и шага по времени. Из представленных дан-

Таблица 2. Относительная погрешность (%) в зависимости от размера сетки при  $\tau = 24$  ч

Сетка	без расщепления	с расщеплением
Сетка 1	0.4	0.41
Сетка 2	0.23	0.24
Сетка 3	0.19	0.21

**Таблица 3.** Относительная погрешность (%) в зависимости от шага по времени  $\tau$  на сетке 2. Сравнение с мелким шагом по времени  $\tau = 2$  ч

Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Погрешность	4.32	2.92	1.96

**Таблица 4.** Относительная погрешность в % в зависимости от шага по времени  $\tau$  на сетке 2. Сравнение со схемой расщепления

Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Погрешность	0.051	0.024	0.013

**Таблица 5.** Время счета на эталонной мелкой сетке, на сетках 1–3 и при использовании схемы расщепления (в секундах) за весь период решения задачи в зависимости от пространственной сетки и от шага по времени

Сетка\Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Эталонная сетка	1582.3	3171.8	6305.4
Сетка 1	4.1	8.4	16.5
Сетка 1 с расщеплением	1.51	2.9	5.9
Сетка 2	9.4	18.7	36.6
Сетка 2 с расщеплением	4.1	8	16.1
Сетка 3	18.5	36.1	69.3
Сетка 3 с расщеплением	8.1	16.1	31.8

ных следует, что предложенный метод значительно ускоряет вычисления за счет понижения размера СЛАУ. Использование схемы расщепления ускорило вычисления более чем в 2 раза. Все вычисления проводились мультифронтальным прямым методом (MUMPS), который представляет собой вариант метода Гаусса для больших разреженных систем уравнений, возникающих при использовании метода конечных элементов [39].

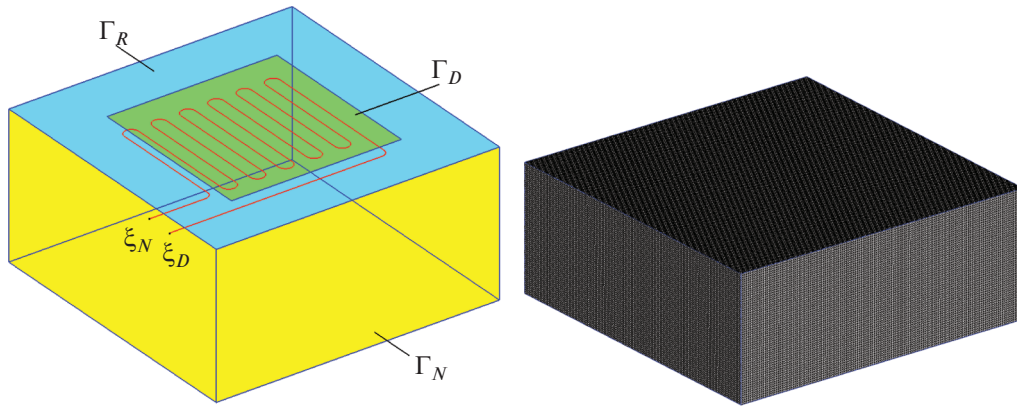
## 7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Теперь рассмотрим задачу (4.4)–(4.7) в трехмерной области (фиг. 5) за исключением других граничных условий для грунта. Трехмерную задачу решаем с использованием схемы расщепления, где  $N_m = 1390861$  и  $N_p = 3619$ . Как и в двумерной задаче, имеем систему СОУ, расположенную на глубине 1.5 м. Область в плане имеет такие же размеры по 20 м и высоту 8 м. Расчеты проводились за один год с шагом по времени  $\tau = 24$  ч. Температура хладоносителя на входе также равна  $T_d = -20^\circ\text{C}$ . Грунт и труба имеют начальную температуру  $-2.0^\circ\text{C}$ .

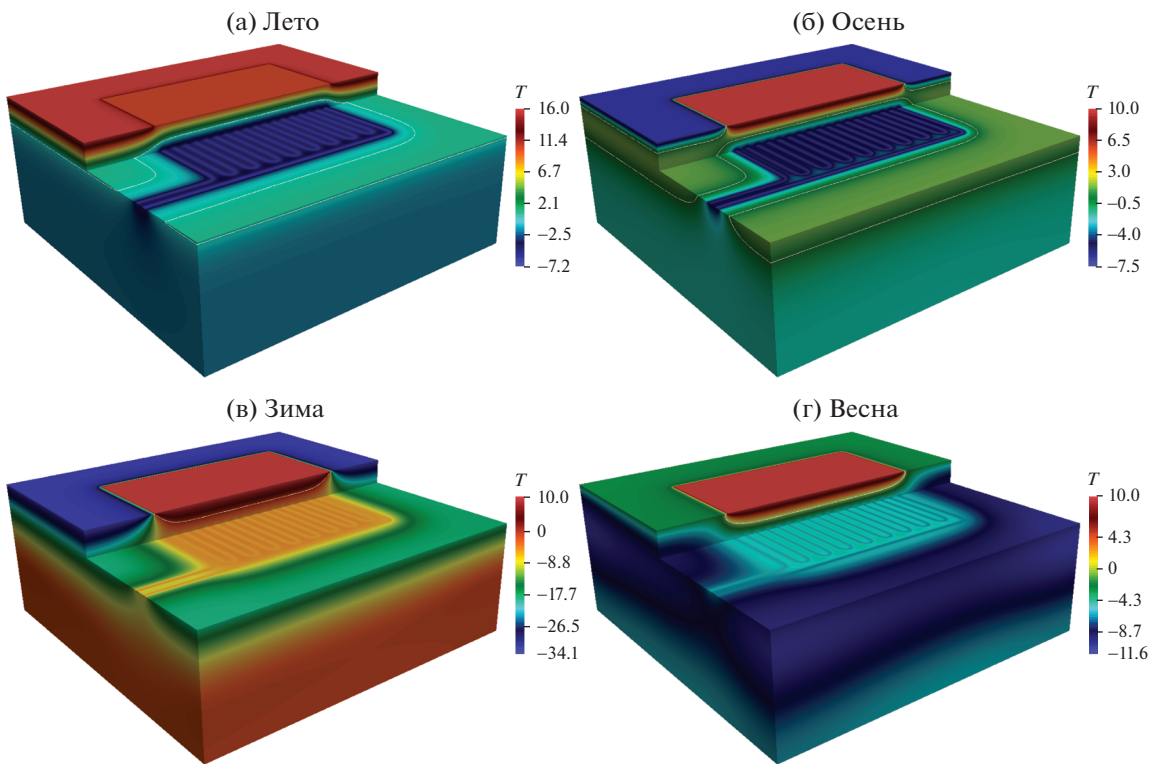
На поверхности грунта по центру на квадратной области с размером  $[12 \text{ м}] \times [12 \text{ м}]$  зададим граничное условие Дирихле с постоянной температурой, равной  $10^\circ\text{C}$ , которое будет моделировать температуру сооружения. На остальной части поверхности грунта задается граничное условие Робина с учетом многолетнего гармонического колебания температуры воздуха, имеющего региональный характер, который в условиях города Якутска варьируется от  $T_w = -35.7^\circ\text{C}$  зимой до  $T_s = 17.3^\circ\text{C}$  летом:

$$\begin{aligned}
 T_m &= 10^\circ\text{C}, \quad x \in \Gamma_D, \\
 -\lambda_\Delta(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Gamma_N, \\
 -\lambda_\Delta(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial n} &= \alpha(T - T_{\text{air}}), \quad x \in \Gamma_R, \\
 T_{\text{air}} &= \frac{T_w - T_s}{2} \sin\left(\frac{\pi(30(M-1) + \bar{t} + 75)}{180 \cdot 30 \cdot 86400}\right) + \frac{T_w + T_s}{2},
 \end{aligned}$$

где  $\alpha = 14$ ,  $\bar{t} = t/86400$  – время в сутках,  $M = 5$  – начальный месяц.



Фиг. 5. Трехмерная область и пространственная сетка.



Фиг. 6. Распределение температуры в различные моменты времени года. Белая линия – изотерма нуля градусов.

На фиг. 6 показано распределение температуры в грунте в различные моменты времени. Рисунки показаны со срезом некоторой части области для более детального просмотра динамики изменения температуры, где расположена труба. Представленные графики иллюстрируют, что система СОУ позволяет основанию здания находиться в мерзлом состоянии в течение года.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Материалы Международной научно- практической конференции по инженерному мерзлотоведению, посвященной 20-летию создания ООО НПО “Фундаментстройаркос”. Тюмень: Сити-пресс, 2011.
2. Васильев В.И., Сидняев Н.И., Федотов А.А. и др. Моделирование распределения нестационарных температурных полей в криолитозоне при проектировании геотехнических сооружений. М.: Курс, 2017.

3. Крылов В.А., Черноозерский В.А., Никитин А.А. и др. Учет неравномерности температурного поля в геотермальной скважине теплового насоса // Вестн. Международной академии холода. 2015. № 1. С. 75–79.
4. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
5. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
6. Martin V., Jaffre J., Roberts J.E. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. V. 26. № 5. P. 1667–1691.
7. Kalinkin A.A., Laevsky Yu.M. Mathematical model of water-oil displacement in fractured porous medium // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2015. V. 12. P. 743–751.
8. Formaggia L., Fumagalli A., Scotti A., et al. A reduced model for darcy's problem in networks of fractures // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2014. V. 48. № 4. P. 1089–1116.
9. D'Angelo C., Scotti A. A mixed finite element method for darcy flow in fractured porous media with non-matching grids // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2012. V. 46. № 2. P. 465–489.
10. D'Angelo C., Quarteroni A. On the coupling of 1d and 3d diffusion-reaction equations: application to tissue perfusion problems // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008. V. 18. № 8. P. 1481–1504.
11. Panfili P., Cominelli A., Scotti A. Using embedded discrete fracture models (edfms) to simulate realistic fluid flow problems / In Second EAGE workshop on naturally fractured reservoirs. 2013. cp-371-00022.
12. Fumagalli A., Scotti A. An efficient xfem approximation of darcy flows in arbitrarily fractured porous media // Oil & Gas Science and Technology—Revue d'IFP Energies nouvelles. 2014. V. 69. № 4. P. 555–564.
13. Kim J., Deo M.D. Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // AIChE Journal. 2000. V. 46. № 6. P. 1120–1130.
14. Karimi-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K., et al. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators / In SPE Reservoir Simulation Symposium. Society of Petroleum Engineers. 2003. SPE 79699. P. 1–11.
15. Karimi-Fard M., Firoozabadi A., et al. Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model / In SPE annual technical conference and exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2001. SPE 71615. P. 1–16.
16. Vasil'eva M.V., Vasiliev V.I., Krasnikov A.A., Nikiforov D.Y. Numerical simulation of single-phase fluid flow in fractured porous media // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2017. T. 159. № 1. P. 100–115.
17. Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Gladkikh V.S., et al. Numerical Solution of a Fluid Filtration Problem in a Fractured Medium by Using the Domain Decomposition Method // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2018. V. 12. № 4. C. 785–796.
18. Fries T.P., Belytschko T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications // Internat. Journal for Numerical Methods in Eng-ng. 2010. V. 84. № 3. P. 253–304.
19. Nikiforov D.Y., Stepanov S.P. Numerical simulation of the embedded discrete fractures by the finite element method // J. of Physics: Conference Series. 2019. IOP Publishing. Vol. 1158. N 3. Paper 032038.
20. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН. 1960. Т. 135. № 5. С. 1054–1057.
21. Каменомостская С.Л. О задаче Стефана // Матем. сборник. 1961. Т. 53. № 4. С. 489–514.
22. Самарский А.А., Мусеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.
23. Akkutlu I.Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., et al. Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media // J. of Natural Gas Science and Eng-ng. 2017. V. 48. P. 65–76.
24. Chung E.T., Efendiev Y., Leung T., Vasilyeva M. Coupling of multiscale and multicontinuum approaches // GEM—Internat. Journal on Geomathematics. 2017. V. 8. № 1. P. 9–41.
25. Chung E.T., Efendiev Y., Li G., Vasilyeva M. Generalized multiscale finite element method for problems in perforated heterogeneous domains // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2254–2279.
26. Chung E.T., Efendiev Y., Lee Ch. Mixed generalized multiscale finite element methods and applications // Multiscale Modeling & Simulation. 2015. V. 13. № 1. P. 338–366.
27. Вабищевич П.Н., Варламов С.П., Васильев В.И. и др. Численное моделирование температурного поля многолетнемерзлого грунтового основания железной дороги // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С. 110–124.
28. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
29. Vasilyeva M., Vasil'ev V., Stepanov S. Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for solving the heat problem with phase change // J. of Computational and Applied Mathematics. 2018. V. 340. P. 645–652.

30. *Pavlova N.V., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V.* Mathematical modeling of thermal stabilization of vertical wells on high performance computing systems / In International Conference on Large-Scale Scientific Computing. Springer. 2013. P. 636–643.
31. *Степанов С.П., Сурдитов И.К., Васильева М.В. и др.* Разработка программного средства для численного моделирования теплового режима грунтов в условиях криолитозоны // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. 2015. № 47(3). С. 115–125.
32. *Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е. и др.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Физматлит, 1996.
33. *Цыпкин Г.Г.* Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009.
34. *Vasil'ev V., Vasilyeva M.* An Accurate Approximation of the Two-Phase Stefan Problem with Coefficient Smoothing // Mathematics. 2020. V. 8. № 11. Paper 1924.
35. *Мухеев М.А., Мухеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
36. *Brenner S., Scott L.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 2007.
37. *Kolesov A.E., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V.* Splitting schemes for poroelasticity and thermoelasticity problems // Computers & Mathematics with Applications. 2014. V. 67. № 12. P. 2185–2198.
38. *Вабищевич П.Н., Захаров П.Е.* Численное решение нестационарных задач с различными масштабами времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 10. С. 1604–1615.
39. *Amestoy P.R., Duff I.-F., L'Excellent J.Y. et al.* A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2001. V. 23. № 1. P. 15–41.