ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 12, с. 2050–2058

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.955

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МНОГИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1)]

А. В. Заборский[1,*], А. В. Нестеров[2,], Д. Ю. Нечаев[2,***]**

[1]249035 Калужская обл., Обнинск, пр-т Маркса, 14А, ООО НПП “Радико”, Россия

[2]117997 Москва, Стремянный пер., 36, РЭУ им. Г.В. Плеханова, Россия

*e-mail: alexander.zaborskiy@mail.ru

**e-mail: andrenesterov@yandex.ru

***e-mail: Nechaev.DYU@rea.ru

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.
Переработанный вариант 28.04.2021 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса со многими пространственными переменными и слабой нелинейностью. При наложении ряда условий на данные задачи асимптотическое разложение построено в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от различных растянутых переменных. Получены задачи для определения всех членов асимптотического разложения, в частности, главный член определяется как решение задачи Коши для параболического уравнения. Приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 11.

Ключевые слова: дифференциально-операторные уравнения в частных производных, задача Коши, малая нелинейность, сингулярные возмущения, асимптотические разложения, параболические уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466921120188

ВВЕДЕНИЕ

В [1] построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР) по малому параметру ε решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного слабо нелинейного уравнения переноса $\varepsilon^2\left(U(x,t,p)_t + D(p)U(x,t,p)_x\right) = L_pU(x,t,p) + \varepsilon F(p,U)$ в критическом случае (т.е. в случае наличия у линейного оператора L_p, действующего по переменной p, нулевого однократного собственного значения (см. [2]).

Такие уравнения (не обязательно сингулярно возмущенные) возникают при описании переноса нейтронов (см. [3]–[5]), при линеаризации уравнений типа уравнения Больцмана, уравнений коагуляции (см. [6], [7]), уравнений переноса сложнокомпонентных и реагирующих примесей в атмосфере, и в других задачах математической физики, связанных с описанием процессов переноса. В этих задачах решение зависит не только от координат пространство–время, но и от дополнительной переменной, обозначенной ниже p, которая может описывать некоторые характеристики субстанции, например, внутреннюю энергию, размеры частиц или иные. Оператор L_p описывает эволюцию зависимости решения от переменной p и в подобных задачах часто

[1)]Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему “Разработка методологии и программной платформы для построения цифровых двойников, интеллектуального анализа и прогнозирования сложных экономических систем”, номер проекта FSSW-2020-0008.

является интегральным. Так, если $u(p)$ — плотность частиц размера p, то динамика процессов коагуляции—диссоциации в линейном приближении может описываться уравнением

$$u_t = L_p u = \int_{p_1}^{p_2} K(p,q)u(q)dq,$$

где ядро $K(p,q)$ определяется физикой процесса, p_1 и p_2 — минимальный и максимальный размеры частиц. Параметр p и оператор L_p могут иметь и иной смысл (см. [3], [4]).

В [1] было отмечено, что несмотря на гиперболический тип дифференциальной части уравнения, при начальных условиях, имеющих вид всплеска, и наличии однократного нулевого значения у оператора L_p, главный член асимптотики определяется уравнением параболического типа.

В настоящей работе результаты из [1] распространяются на случай аналогичного уравнения с многими пространственными переменными, который представляет интерес для различных прикладных областей.

Основная цель данной работы — построение ФАР для решения задачи Коши для многомерного сингулярно возмущенного уравнения переноса со слабой нелинейностью, поэтому ниже на операторы налагаются очень жесткие условия. Основное внимание уделяется алгоритму построения ФАР решения задачи и получению задач для определения членов разложения, вопросам обоснования полученной асимптотики уделяется меньшее внимание. Отметим, что схожие сингулярно возмущенные дифференциально-операторные уравнения в различных постановках исследовались многими авторами (см., например, [3], [4]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения в многомерном случае:

$$\varepsilon^2\left(U_t + \sum_{i=1}^{N} D_i(p)U_{x_i}\right) = L_pU + \varepsilon F(p,U), \tag{1}$$

$$U(\bar{x},0,p) = w(\bar{x}\varepsilon^{-1},p), \tag{2}$$

где $U = U(\bar{x},t,p)$ — решение; $\{\bar{x},t,p\} \in H = \{\|\bar{x}\| < \infty; t > 0; p \in P\}$, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр; $D_i(p)$ — непрерывные по p функции; L_p — линейный оператор, действующий по скалярной переменной $p \in P$ на функции $f(\bar{x},t,p) \in A$, принадлежащие по p функциональному пространству L, соответствующему оператору L_p, со скалярным произведением $(h_1(p),h_2(p))$, и бесконечно дифференцируемых по $\bar{x},t$: $A = L \otimes C^{\infty}_{|\bar{x}|<\infty,t>0}$, причем $\forall z \in A : L_p z \in A$. Множество значений P переменной p может иметь разный вид, например, $P = [p_1,p_2]$. Функция $F(p,U) \in L \otimes C^{\infty}$ принадлежит пространству L по переменной p и бесконечно дифференцируема по U.

Пусть оператор L_p имеет однократное собственное нулевое значение $\lambda_0 = 0$. Обозначим через $h_0(p)$ собственную функцию оператора L_p, соответствующую его собственному нулевому значению λ_0, а через $h_0^*(p)$ — собственную функцию сопряженного оператора L_p^*, соответствующую нулевому собственному значению $\lambda_0^* = 0$ оператора L_p^*. Ниже аргумент p, от которого зависят собственные функции $h_0(p)$ и $h_0^*(p)$, может опускаться.

Остальные требования на задачу (1), (2) будут сформированы ниже с нумерацией I, II и так далее.

I. Функция $w(\bar{z},p)$ вместе со всеми частными производными по пространственным переменным удовлетворяет неравенству $|w(\bar{z},p)| \le Ce^{-\beta\|\bar{z}\|^2}$, $C > 0, \beta > 0$, где постоянные $C > 0, \beta > 0$ могут зависеть от порядка производных.

II. Все собственные значения λ линейного оператора L_p, кроме λ_0, имеют отрицательные вещественные части, удовлетворяющие неравенствам $\operatorname{Re}\lambda \le -k$, $k > 0$.

III. Скалярное произведение $(h_0(p),h_0^*(p))$ отлично от нуля: $(h_0,h_0^*) \ne 0$.

Замечание. При этом можно выбрать эти функции так, чтобы $(h_0,h_0^*) = 1$, что и полагается ниже.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФАР РЕШЕНИЯ

Алгоритм построения ФАР решения начальной задачи (1), (2) аналогичен алгоритму, использованному в [1]. В соответствии с алгоритмом построения погранслойных разложений А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова (см. [2]) ФАР решения ищется в виде суммы регулярной части $\bar{U}$, функции всплеска S, пограничной функции Π и остаточного члена R:

$$U(\bar{x},t,p) = \bar{U}(\bar{x},t,p) + S(\bar{\zeta},t,p) + \Pi(\bar{\xi},\tau,p) + R. \tag{3}$$

Назначение функций $\bar{U}, S, \Pi, R$, входящих в ФАР (3), а также вид аргументов $\bar{\zeta}, \bar{\xi}, \tau$ пояснены ниже.

ФАР (3) строится с помощью модификации алгоритмов построения погранслойных разложений (см. [2]).

Очевидно, что регулярная часть решения ФАР $\bar{U}(\bar{x},t,p)$ при начальном условии вида (2), удовлетворяющем условию I и имеющим вид всплеска в малой ε-окрестности точки $x = 0$, тождественно равна нулю: $\bar{U}(\bar{x},t,p) \equiv 0$.

Таким образом, ФАР решения с точностью $O(\varepsilon^{M+1})$, где M – произвольное натуральное число, строится в виде суммы функции всплеска S, сосредоточенной в окрестности некоторой линии $\{l : \bar{\zeta} = 0\}$ ("псевдохарактеристике" уравнения) и пограничной функции Π, сосредоточенной в окрестности границы $t = 0$:

$$\begin{aligned} U(\bar{x},t,p) &= S(\bar{\zeta},t,p) + \Pi(\bar{\xi},\tau,p) + R = \\ &= \sum_{i=0}^{M} \varepsilon^i \left(s_i(\bar{\zeta},t,p) + \pi_i(\bar{\xi},\tau,p)\right) + R, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\bar{\zeta} = \{\zeta_i, i = 1, 2, \ldots, N\}, \zeta_i = \dfrac{x_i - V_i t}{\varepsilon}$, – переменные, с помощью которых описывается функция всплеска $S(\bar{\zeta},t,p)$, здесь $V_i = (D_i(p)h_0(p), h_0^*(p))$; $\bar{\xi} = \{\xi_i, i = 1,2,\ldots,N\}, \xi_i = \dfrac{x_i}{\varepsilon}$ и $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon^2}$ – растянутые переменные, с помощью которых описывается пограничная функция $\Pi(\bar{\xi},\tau,p)$, R – остаточный член.

Следуя [2], представим функцию $F(p,U)$ в виде суммы

$$F(p,U) = SF + \Pi F + RF, \tag{5}$$

где

$$SF = F(p,S), \tag{6}$$

$$\Pi F = F(p,S+\Pi) - F(p,S), \tag{7}$$

$$RF = F(p,S+\Pi+R) - F(p,S+\Pi). \tag{8}$$

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ВСПЛЕСКА S

Функция всплеска $S(\bar{\zeta},t,p)$ ищется в виде разложения по степеням параметра ε:

$$S(\bar{\zeta},t,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k(\bar{\zeta},t,p), \tag{9}$$

и должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon^2 \left(S_t + \sum_{i=1}^{N} D_i S_{x_i}\right) = L_p S + \varepsilon SF. \tag{10}$$

Перейдя в уравнении (10) от переменных $(\bar{x},t,p)$ к переменным $(\bar{\zeta},t,p)$, получаем

$$L_pS = \varepsilon^2 S_t + \varepsilon\sum_{i=1}^{N}\Psi_i S_{\zeta_i} - \varepsilon SF, \tag{11}$$

где

$$\Psi_i(p) = D_i(p) - V_i = D_i(p) - (D_i(p)h_0(p), h_0^*(p)). \tag{12}$$

Подставив разложение (9) в (6), получим

$$SF = F\left(p, \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k s_k\right) = F(p,s_0) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k(F'(p,s_0)s_k + Sf_k), \tag{13}$$

где через Sf_k обозначены слагаемые, зависящие от s_j, $j < k$, штрих означает производную $F(x,y)$ по второму аргументу.

Подставив (9) и (13) в уравнение (11), стандартным способом (см. [2]) получаем систему уравнений для членов разложения s_i:

$$\varepsilon^0 :\ L_ps_0 = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^1 :\ L_ps_1 = \sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{0,\zeta_i} - F(p,s_0), \tag{15}$$

$$\varepsilon^2 :\ L_ps_2 = \sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{1,\zeta_i} + s_{0,t} - F'(p,s_0)s_1, \tag{16}$$

$$\ldots$$

$$\varepsilon^k :\ L_ps_k = \sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{k-1,\zeta_i} + s_{k-2,t} - F'(p,s_0)s_{k-1} - SF_{k-1}.(17) \tag{17}$$

$$\ldots$$

Решение уравнения (14) имеет вид

$$s_0 = \varphi_0(\bar{\zeta},t)h_0(p), \tag{18}$$

где φ_0 – пока неизвестная функция.

Для разрешимости уравнения (15) должно выполняться условие разрешимости – ортогональности правой части к собственной функции сопряженного к L_p оператора L_p^*, соответствующей его нулевому собственному значению (см. [2]).

В соответствии с этим наложим условие

IV. $(F(p,U), h_0^*) = 0$.

При выполнении условия IV условие разрешимости уравнения (15):

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{0,\zeta_i} - F(p,s_0), h_0^*\right) = \left(\sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{0,\zeta_i}, h_0^*\right) - (F(p,s_0), h_0^*) = 0, \tag{19}$$

выполняется, так как в силу определения $V_i = (D_i(p)h_0, h_0^*)$ и замечания к условию III для всех номеров i выполняются равенства

$$(\Psi_i s_{o,\zeta_i}, h_0^*) = (\Psi_i\varphi_{o,\zeta_i}h_0, h_0^*) = \varphi_{o,\zeta_i}((D_i(p) - V_i)h_0, h_0^*) = \varphi_{o,\zeta_i}((D_i(p)h_0, h_0^*) - V_i) = 0.$$

Соответственно решение уравнения (15) имеет вид

$$s_1 = \varphi_1(\bar{\zeta},t)h_0(p) + G\left(\sum_{i=1}^{N}\Psi_i s_{0,\zeta_i} - F(p,s_0)\right), \tag{20}$$

где G – псевдообратный к L_p оператор.

Замечание. Назовем оператор G псевдообратным к оператору L_p, если решение уравнения $L_pU = F$ при условии $(F, h_0^*) = 0$ может быть записано в виде $U = GF + Ch_0$, где C не зависит от p.

Подставляя (18) и (20) в условие разрешимости уравнения (16):

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \Psi_i s_{1,\zeta_i} + s_{0,t} - F'(p, s_0) s_1, h_0^*\right) = 0,$$

с учетом равенств $(\Psi_i h_0, h_0^*) = 0\ \forall i$, а также условий III , IV получаем уравнение для определения функции φ_0:

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^{N}(F_{eff,i}(\varphi_0))_{\zeta_i} = 0, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} M_{ii} = (\Psi_i G\Psi_i h_0, h_0^*), \\ M_{ij} = ((\Psi_i G\Psi_j h_0, h_0^*) + (\Psi_j G\Psi_i h_0, h_0^*))/2, \\ F_{eff,i}(\varphi_0) = -(\Psi_i GF(p, \varphi_0 h_0), h_0^*). \end{gathered} \tag{22}$$

При условии разрешимости соответствующих уравнений функции $s_k, k = 1,2,\ldots,$ имеют вид

$$s_k = \varphi_k(\overline{\zeta}, t)h_0(p) + G\left(\sum_{i=1}^{N} \Psi_i s_{k-1,\zeta_i} + s_{k-2,t} - F'(p, s_0) s_{k-1} - SF_{k-1}\right). \tag{23}$$

Действуя аналогично, выбрав номер k, записывая условие разрешимости уравнения для номера $k+2$, получаем уравнение для определения функции φ_k:

$$\varphi_{k,t} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}\varphi_{k,\zeta_i\zeta_j} - \sum_{i=1}^{N}(F1_{i,eff})'_{\zeta_i} = \Phi_k, \tag{24}$$

где $F1_{i,eff} = (\Psi_i GF'(p, \varphi_0 h_0)\varphi_k)'_{\zeta_i} h_0, h_0^*)$, Φ_k выражаются через уже найденные $\varphi_j, j < k$. Отметим, что уравнение (24), в отличие от уравнения (21), линейное.

Таким образом, получены выражения для нахождения s_k и уравнения для определения входящих в эти выражения функций φ_k.

Наложим условие

V. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{N} M_{ij}z_i z_j$, где M_{ij} определены соотношениями (22), является знакоотрицательной (или полузнакоотрицательной).

При выполнении условия V уравнения (21), (24) будут параболическими.

ПОСТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ П

Отметим, что ввиду вполне определенного вида зависимости функций $s_k(\overline{\zeta}, t, p)$ от переменной p функция S, вообще говоря, ни в каком приближении не может удовлетворять начальным условиям (2). Для удовлетворения этих условий строится пограничная функция $\Pi(\overline{\xi}, \tau, p)$ (см. [2]), $\overline{\xi} = \overline{x}/\varepsilon, \tau = t/\varepsilon^2$, которая удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2\left(\Pi_t + \sum_{i=1}^{N} D_i(p)\Pi_{x_i}\right) = L_p\Pi + \varepsilon\Pi F, \tag{25}$$

условию

$$\lim_{\tau\to+\infty} \Pi = 0, \tag{26}$$

а также совместно с функцией S удовлетворяет начальным условиям (2)

$$S\left(\overline{\xi},0,p\right)+\Pi(\overline{\xi},0,p)=w\left(\overline{\xi},p\right). \tag{27}$$

Функция Π ищется в виде разложения по степеням ε:

$$\Pi(\overline{\xi},\tau,p)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\pi_k(\overline{\xi},\tau,p). \tag{28}$$

Перейдя от переменных $(\overline{x},t,p)$ к $(\overline{\xi},\tau,p)$, представим уравнение (25) в виде

$$\Pi_\tau=L_p\Pi-\varepsilon\sum_{i=1}^{N}D_i(p)\Pi_{\xi_i}+\varepsilon\Pi F. \tag{29}$$

Подставив разложения (9) и (28) в (7), переходя к переменным $(\overline{\xi},\tau,p)$, разложим ΠF в ряд по степеням малого параметра

$$\Pi F=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi F_k. \tag{30}$$

Подставив (28) и (30) в уравнение (29), стандартным способом из [2] получаем систему уравнений для членов разложения p_i:

$$\varepsilon^0:\pi_{0,\tau}=L_p\pi_0, \tag{31}$$

$$\varepsilon^1:\pi_{1,\tau}=L_{p1}\pi+\tilde{P}_0, \tag{32}$$

$$\varepsilon^i:\pi_{i,\tau}=L_p\pi_i+\tilde{P}_{i-1}, \tag{33}$$

где $\tilde{P}_i=-\sum_{i=1}^{N}D_i\left(p\right)\pi_{i-1,\xi_i}+\Pi F_{i-1}$ выражаются через функции π_j с номерами $j<i$.

Потребуем выполнения следующих условий:

VI. Множество собственных значений оператора $L_p:\lambda_0,\lambda_1,\ldots$ – счетное.

VII. Собственные значения оператора $L_p:\lambda_0,\lambda_1,\ldots$ – однократны, а отвечающие им собственные функции $h_0\left(p\right),h_1\left(p\right),\ldots$ – ортогональны, нормированы, образуют полную систему функций.

VIII. Функция $w(\overline{\xi},p)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд $w(\overline{\xi},p)=\sum_{k=0}^{\infty}w_k(\overline{\xi})h_k(p)$, который можно почленно дифференцировать по ξ достаточное количество раз. Отметим, что в этом случае коэффициенты ряда $w_i(\overline{\xi})$ вместе с функцией w удовлетворяют неравенствам $\left|w_i(\overline{\xi})\right|\le C\exp(-\beta\left\|\overline{\xi}\right\|^2)$, где C и β – константы.

Учитывая условие (26), выпишем π_0:

$$\pi_0(\overline{\xi},\tau,p)=\sum_{k=1}^{\infty}C_{0k}(\overline{\xi})h_k(p)e^{\lambda_k\tau}, \tag{34}$$

где суммирование ведется по номерам, отвечающим ненулевым собственным значениям линейного оператора L_p (т.е. всем, кроме $\lambda_0=0$).

Из равенства (27) следует

$$\varepsilon^0:s_0(\overline{\xi},0,p)+\pi_0(\overline{\xi},0,p)=w\left(\overline{\xi},p\right), \tag{35}$$

$$\varepsilon^i:s_i(\overline{\xi},0,p)+\pi_i(\overline{\xi},0,p)=0,\quad i\ge 1. \tag{36}$$

Подставляя (18), (34) и условие VII в равенство (35), получаем

$$\varphi_0(\overline{\xi},0)h_0(p)+\sum_{k=1}^{\infty}C_{0k}(\overline{\xi})h_k(p)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k(\overline{\xi})h_k(p). \tag{37}$$

Отсюда, в силу условий VI–VIII, получаем

$$\varphi_0(\overline{\xi},0) = w_0(\overline{\xi}), \tag{38}$$

$$C_{0k}(\overline{\xi}) = w_k(\overline{\xi}), \quad k > 0. \tag{39}$$

Таким образом, получено начальное условие (38) для уравнения (41), определяющего функцию φ_0, и определена функция π_0 (34), (39).

Построение функций $\pi_k(\overline{\xi},\tau,p), k \geq 1$, почти дословно повторяет соответствующие построения в [1], [2].

Функция π_1 удовлетворяет уравнению

$$\pi_{1,\tau} = L_p\pi_1 + \Pi F_1, \tag{40}$$

решение которого имеет вид

$$\pi_1(\overline{\xi},\tau,p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\overline{\xi},\tau)h_k(p), \tag{41}$$

суммирование ведется по всем собственным функциям оператораL_p.

Подставив (41) в (40), умножив скалярно на h_j, получаем

$$C_{1j,\tau} = C_{1j}\lambda_j + \Gamma_j(\overline{\xi},\tau), \tag{42}$$

где $\Gamma_j(\overline{\xi},\tau) = (\Pi F_1, h_j)$.

Следуя [2], из условия $C_{10} \to 0$ при $\tau \to \infty$ получаем

$$C_{10}(\overline{\xi},0) = -\int_{\tau}^{\infty} \Gamma_0(\overline{\xi},s)ds. \tag{43}$$

Подставив (20) в виде $s_1 = \varphi_1 h_0 + N_1$, где $N_1 = G\left(\sum_1^N \Psi_i s_{0,\zeta_i} - F(p,s_0)\right)$, и (41) в (36), получаем

$$\varphi_1 h_0 + N_1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}h_k = 0. \tag{44}$$

Умножив (44) на h_0, получаем

$$\varphi_1(\overline{\xi},0) = -(C_{10}(\overline{\xi},0) + (N_1,h_0)), \tag{45}$$

умножая (44) на h_j, $j \geq 1$, получаем

$$C_{1j}(\overline{\xi},0) = -(N_1,h_j). \tag{46}$$

Таким образом, получено начальное условие (45) для функции φ_1 и определена функция π_1 (41).

Построение функций π_i и начальных условий для уравнений, определяющих φ_i, для $i > 1$ проводится аналогично.

ОЦЕНКИ ЧЛЕНОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Справедливы теоремы об оценках членов разложений.

Теорема 1. *При выполнении условий* I, V *существуют постоянные* $T_1 > 0$, $\kappa > 0$, $C \geq 0$ *такие, что на* $[0,\ T_1]$ *все* $\varphi_i(\overline{\zeta},t)$ *для* $i \geq 0$ *существуют, единственны и удовлетворяют оценкам*

$$\left|\varphi_i(\overline{\zeta},t)\right| < Ce^{-\kappa\|\zeta\|^2} \tag{47}$$

вместе с частными производными всех порядков.

Замечание 1. Величины $T_1 > 0$, $\kappa > 0$, $C \geq 0$ могут зависеть от номера i.

Замечание 2. Из оценок (47) следуют оценки

$$\left|s_i(\overline{\zeta}, t, p)\right| < Ce^{-\kappa\|\overline{\zeta}\|^2}. \tag{48}$$

Теорема 2. *При выполнении условий* II, VI–VIII *для любого* $T > 0$ *все* $\pi_i(\overline{\xi}, \tau, p)$ *на* $[0, T]$ *существуют, единственны и имеют оценку*

$$\left|\pi_i(\overline{\xi}, \tau, p)\right| < Ce^{-\kappa(\tau+\|\overline{\zeta}\|^2)}, \tag{49}$$

где $C > 0$, $\kappa > 0$ – *постоянные.*

Доказательства этих теорем практически дословно повторяют доказательства соответствующих теорем из [1], [2], [11] и здесь не приводятся. Отметим лишь, что доказательство теоремы 1 основано на методе последовательных приближений с использованием оценок фундаментального решения параболического уравнения (см. [8]).

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА R

Будем считать выполненным условие

IX. Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T_2]$, где $T_2 > 0$ – положительная величина, не зависящая от ε.

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* I–IX. *Тогда на отрезке* $[0,T]$, *где* $T = \min(T_1,T_2)$, *решение задачи* (1), (2) *существует и для любого натурального* M *представимо в виде*

$$U(\overline{x},t) = S_M(\overline{\zeta},t,p) + \Pi_M(\overline{\xi},\tau,p) + R =$$
$$= \sum_{i=0}^{M} \varepsilon^i (s_i(\overline{\zeta},t,p) + \pi_i(\overline{\xi},\tau,p)) + R = U_M + R,$$

где S_M, Π_M *есть частичные суммы рядов* (9) *и* (28) (*ФАР*), *остаточный член* R *удовлетворяет задаче Коши*

$$\varepsilon^2\left(R_t + \sum_{i=1}^{N} D_i(p)R_{x_i}\right) = L_pR + \varepsilon RF + r, \quad |\overline{x}| < \infty, \quad t > 0, \quad R(\overline{x},0,p) = 0, \tag{50}$$

$r = O(\varepsilon^{M+1})$ – *известная функция, удовлетворяющая оценке*

$$\left|r(\overline{\xi},\tau,p)\right| < C\varepsilon^{M+1}e^{-\kappa\|\overline{\zeta}\|^2}.$$

Доказательство теоремы 3. Существование самой величины R следует из условия IX. Уравнение и начальные условия (50) для функции R, а также оценка функции непосредственно вытекают из алгоритма построения ФАР, а также оценок (48), (49).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построено ФАР решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными. Получены задачи для определения всех членов разложения решения по малому параметру.

2. Алгоритм построения ФАР решения задачи (1), (2) без труда распространяется на уравнения с переменными коэффициентами $D_i(\overline{x}, p)$, $L_p(\overline{x})$, $F(\overline{x}, U, p)$.

3. Условие однократности нулевого собственного значения оператора L_p является существенным. При более высокой кратности нулевого собственного значения поведение решения и, соответственно, структура асимптотики будет иной.

4. Согласование масштабов малости параметра в уравнении (1) и начальных условиях (2) существенно. Если взять начальные условия (2) вида более узкой “шапочки”, то в окрестности начала координат необходимо строить внутреннее разложение, описывающее быстрые переходные процессы и общее ФАР строить методом согласования (см. [10]). В противном случае построение ФАР решения задачи (1), (2) становится тривиальным.

5. Поведение главного члена ФАР в соответствии с параболическим уравнением (21) и, соответственно, бесконечная гладкость ФАР в дальней зоне не зависимо от гладкости начальных условий (2) не противоречит основным свойствам решения уравнения переноса, в соответствии с которыми возможные разрывы начальных условий должны распространяться вдоль характеристик. В [11] прослежена эволюция решения начально-краевой задачи для системы двух уравнений с одной пространственной переменной при несогласованных начальных и краевых условиях. В этом случае точное решение имеет разрыв I рода, распространяющийся вдоль характеристики, выходящей из начала координат. В [11] показано, что этот разрыв экспоненциально затухает как $\exp(-t/\varepsilon^2)$, на временах порядка $O(1)$ экспоненциально мал и, соответственно, не входит ни в один член ФАР с конечной степенью параметра ε.

6. Задача (1), (2) описывает разные процессы в многофазных средах, в частности, процессы переноса различных субстанций. Ход этих процессов можно разделить на два этапа. На начальном этапе, $t = O(\varepsilon^2)$, решение определяется функциями $S + \Pi$, затем происходит установление динамического равновесия между фазами, что соответствует затуханию функции Π. На следующем этапе (в дальней зоне, $t = O(1)$, где в силу оценок (49) функция Π асимптотически мала, $P = O(\varepsilon^M)\forall M > 0$) решение определяется функцией S, главный член которой $s_0 = \varphi_0(\overline{\zeta}, t)h_0(p)$ описывается параболическим уравнением (21) типа многомерного уравнения Бюргерса. Известно (см. [9]), что уравнения типа Бюргерса могут иметь решения вида бегущих волн.

7. Реальные процессы переноса в многофазных средах, как правило, развиваются в трехмерном пространстве. В случае трехмерного пространства при бесконечном количестве фаз начальное возмущение будет перемещаться с эффективной скоростью V_{eff} и “диффундировать” по всем трем осям в соответствии с уравнениями (21), (24) и определением переменных $\overline{\zeta}$.

8. Знание структуры решения в дальней зоне позволяет строить подходящие разностные схемы и выбирать адаптивные сетки, что актуально для задач большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заборский А.В., Нестеров А.В.* Асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного нелинейного уравнения // Вестник МИФИ. 2015. Т. 4. № 4. С. 333–338.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 106 с.
3. *Тупчиев В.А., Чепурко А.Н.* Асимптотика решения спектральной задачи переноса нейтронов в слое // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 847–850.
4. *Латышев В.Н.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной спектральной задачи, возникающей в теории переноса. Обнинск: ОИАтЭ, 1987. 26 с.
5. *Крючков Э.Ф.* Теория переноса нейтронов. Москва.: МИФИ, 2007.
6. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
7. *Галкин В.А.* Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 стр.
9. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны // Серия Синергетика: от прошлого к будущему. № 80. Москва.: URSS, 2017. С. 308.
10. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. С. 334.
11. *Нестеров А. В.* Об асимптотике решения системы уравнений диффузия–сорбция при малых коэффициентах диффузии // Ж. вычисл. матем. и математ. физ. 1989. Т. 29. № 9. С. 1318–1330.