ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 2, с. 239–255

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.634

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЛОТКИ–ВОЛЬТЕРРА С СЕЗОННОСТЬЮ

Ю. В. Бибик

119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: yvbibik@ccas.ru

Поступила в редакцию 01.01.2020 г.
Переработанный вариант 01.01.2020 г.
Принята к публикации 15.08.2020 г.

Аналитически исследована динамика классической биологической системы Лотки–Вольтерра, к которой добавлен фактор сезонности. Исходная модель описана простым гамильтонианом. В ходе исследования для выявления хаотического поведения в системе гамильтониан представлен в виде суммы не зависящего от времени гамильтониана и отдельных резонансов. Исследование взаимодействия выделенных резонансов с помощью метода перекрытия резонансов Чирикова позволило определить аналитический критерий в терминах критических значений амплитуд сезонности, при которых в исходной системе происходит переход к хаосу. Результаты исследования показывают, что при наличии периодического возмущения (в данном случае сезонности) в системе с двумя зависимыми переменными возникает хаотическое поведение. Библ. 36.

Ключевые слова: хаос, система Лотки–Вольтерра, сезонность, метод перекрытия резонансов Чирикова.

10.31857/S0044466921010026

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются особенности хаотического поведения обобщения биологической системы Лотки–Вольтерра [1]–[4] с сезонностью. Система описывается простым гамильтонианом. Для определения характера динамики системы, включая выявление в ней хаотического поведения, и для определения параметров, при которых хаотическое поведение возникает, использован метод перекрытия резонансов Чирикова [5].

Теория хаотического поведения динамических систем является важнейшим научным достижением прошлого и текущего столетий. По значимости, которую эта теория внесла в понимание фундаментальных законов мироздания, она стоит в одном ряду с такими важнейшими теориями, как теория относительности и квантовая теория. Отличительной чертой сегодняшней теории хаоса является то, что она имеет междисциплинарное значение. Известные на сегодня основные характеристики хаоса, такие как нелинейность, детерминизм, чувствительность к начальным условиям, невозможность долгосрочного прогноза, устойчивые нарушения в поведении системы, наличие окон периодичности, оказались очень информативными и эффективными для понимания и объяснения природы землетрясений, лесных пожаров, эпидемий, колебаний в экономических и финансовых системах. Эта теория не имеет узко научной направленности, на ее основе формируются методы и подходы, позволяющие предотвратить катастрофические явления в экологии, биологии, медицине.

До описания деталей исследования представляется необходимым вкратце отметить наиболее значимые, основополагающие достижения и открытия, составляющие сегодняшний фундамент этой теории. Работы выдающихся математиков Анри Пуанкаре [6] 1892 г., [7] 1905 г. и Жака Адамара [8] 1898 г. для математической теории хаоса являются базовыми. Как известно, Пуанкаре впервые отметил, что на орбитах трех или более взаимодействующих небесных тел может возникать нестабильность и непредсказуемость поведения, а также то, что небольшие различия в начальных условиях дают в финале очень большие изменения, и предсказание поведения системы становится невозможным. Жак Адамар описал первую динамическую структуру, оказавшуюся хаотической. Работы Пуанкаре и Адамара были известны, но долгое время не находили широкого отклика среди исследователей.

В 1970-х годах появился целый ряд исследований, выдвинувших теорию хаоса в число важнейших научных достижений. Основные результаты важнейших исследований были получены после появления компьютерной техники, по мере накопления экспериментальных, теоретических данных, развития численных методов. Прорывные исследования этого периода начинаются с работ метеоролога Лоренца. Занимаясь исследованиями в области прогнозирования погоды, он исследовал компьютерную модель, содержащую уравнения, учитывающие зависимость между температурой, атмосферным давлением и скоростью ветра. Результаты исследований он опубликовал в знаменитых статьях “Deterministic Nonperiodic flow” (“Детерминированный непериодический поток”) [9] 1963 г. и “Predictability: Does the Flap of a Butterfly’s Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?” (“О возможности предсказаний: может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?”) [10] 1972 г. Результаты его исследований были оценены исследователями-современниками как “революционные”. Они обогатили теорию хаоса пониманием того, что небольшие изменения, происходящие в атмосфере, приводят к радикальным и неожиданным последствиям, что сложные динамические системы имеют порог предсказуемости, поэтому прогнозировать динамическое поведение сложных динамических моделей на длительный период невозможно. Лоренц также открыл первый “странный аттрактор” — подмножество фазового пространства, для которого все траектории, стартующие недалеко от него, стремятся к нему с течением времени.

К прорывным работам относятся работы Митчелла Фейгенбаума 1978—1981 гг., показавшего, что хаос может возникать через различные последовательности бифуркаций. Он обратил внимание на универсальные закономерности перехода к хаосу при удвоении периода. Используя метод ренормализационной группы, Фейгенбаум создал теорию, объясняющую универсальность удвоений периода [11], [12], [13]. Важнейшими для понимания природы хаоса стали также исследования этого периода Бенуа Мальденброта, обратившего внимание на то, что абсолютно случайные процессы имеют элементы подобия. Он впервые ввел понятие “фрактал”, одно из глобальных понятий в физике хаоса [14].

Следующий важнейший вклад в развитие теории хаоса был сделан в 1990 г., когда были опубликованы две выдающиеся новаторские работы, предложившие метод контроля хаоса и метод его синхронизации.

В первой их них (статья Эдварда Отта, Селсо Гребоги и Джеймса Йорке “Контроль хаоса” (Edward Ott, Celso Grebogi and James A. Yorke “Controlling Chaos”)) [15] был изложен универсальный метод контроля хаоса. Сегодня этот метод известен как метод OGY (по первым буквам фамилий авторов). Суть метода состоит в использовании аттрактора хаотической системы для выбора нестабильной орбиты, которая давала бы улучшенную производительность, и ее стабилизации с применением небольших возмущений системы. Предложенный метод позволяет использовать исключительную чувствительность хаотических систем к крошечным возмущениям для контроля хаоса и стабилизации системы. Указанный метод является универсальным и используется, например, в медицине, для исследования и выработки стратегии контроля за поведенческим возбуждением, эпилептическими припадками, сердечными приступами.

Во второй работе “Синхронизация в хаотических системах” (Louis M. Pecora and T.L. Carroll “Synchronization in chaotic systems”) [16], авторы Луис Пекора и Т.Л. Кэрролл предложили первую рабочую схему синхронизации хаоса. Техника синхронизации позволяет использовать хаос в шифровании, при передаче информации по широкополосным каналам, более устойчивым к шуму и помехам. Фактически авторы этих работ дали в руки исследователям инструменты управления хаосом.

В 2000-х годах были опубликованы значимые работы, прояснившие строение пространственно-временных хаотических структур. Особого внимания заслуживает работа Мэтью Фишмана и Дэвида Эгольфа “Выявление строительных блоков пространственно-временного хаоса: отклонения от экстенсивности” (Matthew P. Fishman, David A. Egolf “Revealing the building block of spatiotemporal chaos: deviations from extensivity”) [17] 2006. Авторы выполнили высокоточные вычислительные исследования фрактальной размерности как функции длины системы для пространственно-временных хаотических состояний одномерного комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау. Отклонения от экстенсивности по шкале длин показали, что эта пространственно-временная хаотическая система состоит из слабо взаимодействующих строительных блоков, каждый из которых содержит около 2-х степеней свободы. Результаты исследования дали объяснение “окнам периодичности”, обнаруженным в пространственно-временных структурах умеренных размеров. Выводы, полученные в работе [17] путем компьютерного моделирования уравнения Гинзбурга–Ландау, были подтверждены 2008 г. экспериментально. В работе [18], при исследовании жидкокристаллической электроконвекции с мягкими граничными условиями, было подтверждено существование четко определенных строительных блоков, управляющих динамикой пространственно-временного хаоса.

В 2015 г. опубликована работа, впервые доказавшая наличие хаоса в природе (Статья Элизы Бенинки и соавт. "Колебания видов, поддерживаемые циклической преемственностью на грани хаоса" (Elisa Benincà, Bill Ballantine, Stephen P. Ellner, and Jef Huisman. "Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos")) [19]. Работа основана на двадцатилетних наблюдениях в природных условиях за динамикой популяций в многовидовом сообществе (моллюсков, бурых водорослей и мидий). Учеными впервые подтверждено наличие в природных условиях хаотического поведения указанного сообщества в циклической сукцессии (голая порода $\to$ $\to$ ракушки и водоросли коры $\to$ мидии $\to$ голая порода) на Северном острове Новой Зеландии. Указанная работа обогатила теорию хаоса углубленным пониманием особенностей хаотического поведения экосистем в природных условиях.

В последнее десятилетие, вплоть до настоящего времени, проводятся теоретические, численные и экспериментальные исследования исключительной важности в области анализа и прогнозирования поведения хаотических систем. Эта проблема носит междисциплинарный характер и является ключевой в физике, экологии, биологии, медицине. Для прогнозирования возможных катастрофических сдвигов в физических и экологических системах проводятся исследования по выявлению и использованию в прогностических целях универсальных сигналов-индикаторов раннего предупреждения (Early Warning Signals (EWS)), которые бы заранее указывали на возможные сдвиги в процессах, которые могут изменить структуру и функции системы. Общая оценка состояния вопроса, перечень рисков, которые планируется выявить и предупредить с помощью сигналов-индикаторов, методы выявления самих сигналов, а также перечень проблем, требующих решения, перечислены в работах [20], [21]. Экспериментальное исследование по выявлению и использованию сигналов раннего предупреждения в термоакустической системе [22] подтверждает эффективность их использования. Исследования сигналов-индикаторов в работе [23] показали, что катастрофический коллапс в экологической системе может произойти без наличия сигналов раннего предупреждения, и для того, чтобы оценить, можно ли считать данный сигнал действительно эффективным сигналом раннего предупреждения, необходимы дополнительные исследования и проверка результатов.

Успешными и перспективными являются исследования на стыке теории хаоса с другими научными направлениями. Примером эффективного сотрудничества являются исследования в области теории лагранжевых когерентных структур (LCSs), использующих идеи теории хаоса и динамики жидкости. Теория позволяет не только понять, как потоки жидкости изолированы друг от друга, но и предсказать направление транспортировки в сложных потоках жидкости и в атмосферных потоках [24]. Углубленное исследование LCSs позволит улучшить на практике мониторинг переноса загрязненных потоков жидкости на поверхности океана и/или загрязненных потоков в атмосфере, вызванных как природными, так и техногенными катастрофами, а также улучшить мониторинг промышленных и биологических потоков. Исследуется использование идей LCSs в турбулентной жидкости [25] для описания транспортных процессов в плазме [26], в экологии, в работе [27] отмечено, что LCSs отслеживаются птицами для нахождения добычи, а использование метода LCSs "открывает интересные перспективы в управлении экосистемами и рыболовством".

В настоящее время основной проблемой хаотических систем является разработка универсальной методики их анализа в условиях сильной нелинейности взаимосвязей и случайных возмущений.

Данное аналитическое исследование выполняется в рамках указанной проблемы. Исследуемая в работе система Лотки–Вольтерра представляет собой задачу, традиционно связанную с математической биологией. Однако в последнее время она находит применение при исследовании нелинейной динамики плазмы [28], для исследования хаотической динамики вселенной [29], для анализа и прогнозирования хаотической динамики криптовалют [30].

Как известно, основной сложностью исследования хаотической динамики нелинейных систем является то, что они трудно поддаются прямому аналитическому исследованию.

Большинство исследований в области хаотического поведения различных обобщений системы Лотки–Вольтерра выполнено с использованием численных методов. В приведенных ниже численных работах выполнен достаточно подробный анализ различных типов поведения обобщенных систем Лотки—Вольтерра при разных параметрах, методах и подходах.

В работе [31] численно исследована возможность существования странных аттракторов в уравнениях Вольтерра для более чем трех видов с конкуренцией. В работе [32] численно исследовано возникновение странных аттракторов в трехмерных уравнениях Вольтерра. В работе [33] численно исследован механизм возникновения бифуркационного хаоса в четырехмерной системе Лотки—Вольтерра с конкуренцией. В работе [34] методом грубой силы численно изучено возникновение хаоса в базовых моделях Лотки—Вольтерра с четырьмя конкурирующими видами. По мнению авторов, изученная в работе система “является самым простым примером хаоса в реалистичной конкурентной модели Лотки—Вольтерра”.

Аналитических работ по исследованию хаоса в обобщенных системах Лотки—Вольтерра мало. Остановимся вкратце на результатах аналитических исследований.

В работе [35] изучена система Лотки—Вольтерра с N видами и n ресурсами. Аналитически доказано существование в системе многих гиперболических динамик на некоторых инвариантных множествах. Показано, что в зависимости от выбора параметров система генерирует все типы гиперболической динамики, включая хаотическую. В статье приведен пример системы Лотки—Вольтерра (для 10-ти видов с 3-мя ресурсами), которая имеет динамику Лоренца. Показано, что система Лоренца может быть реализована системой Лотки—Вольтерра. При этом “система Лотки—Вольтерра не имеет хаотического аттрактора, но имеет семейство параметров хаотических инвариантных множеств (эквивалентно аттракторам Лоренца)”. В статье отмечено, что существуют системы Лотки—Вольтерра для N видов и n ресурсов, которые сильно устойчивы и в то же время демонстрируют хаотичность поведения.

В работе [36] с помощью метода Мельникова аналитически исследована трехмерная система Лотки—Вольтерра с периодическими по времени возмущениями. Метод Мельникова использован для установления существования в системе поперечного гетероклинического цикла, подтверждающего наличие в трехмерной системе хаотического поведения.

Настоящая статья организована следующим образом:

В разд. 2 дано описание исследуемой двумерной модели системы Лотки—Вольтерра с сезонностью. В подразделах 2.1, 2.2 и 2.3 приведены основные понятия, определения и преобразования, выполненные для того, чтобы представить систему Лотки—Вольтерра с сезонностью в виде, который позволил бы применить к ней метод перекрытия резонансов Чирикова для выявления в системе хаотического поведения.

В разд. 3 предложен аналитический подход исследования динамики двумерной системы Лотки—Вольтерра с сезонностью с использованием метода перекрытия резонансов Чирикова.

В разд. 4 выполнен анализ полученных результатов. Показано, что исследованная двумерная система Лотки—Вольтерра с сезонностью имеет сложную динамику и при определенных условиях в системе происходит переход к хаотическому поведению.

Перейдем к описанию исходной модели в следующем разделе.

2. ОПИСАНИЕ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРА С СЕЗОННОСТЬЮ

Исследуемая в работе двумерная система Лотки—Вольтерра с сезонностью является обобщением классической системы Лотки—Вольтерра. Как известно, классическая система представляет собой нелинейный осциллятор, моделирующий колебания численности видов в системах типа хищник—жертва. Она представляет собой гамильтонову систему с одной степенью свободы и поэтому полностью интегрируема. Ее динамика является регулярной, хаос отсутствует. Она имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = x - xy, \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + xy. \tag{2.2}$$

Здесь x — численность жертв, y — численность хищников.

Однако реальные системы развиваются в среде с периодически меняющимися условиями. Такие системы могут быть описаны системой Лотки–Вольтерра с сезонностью. Уравнение Лотки–Вольтерра с учетом фактора сезонности имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = (1 + \alpha\cos\Omega t)x - xy, \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -(1 - \alpha\cos\Omega t)y + xy, \tag{2.4}$$

где $1 + \alpha\cos\Omega t$ – коэффициент рождаемости жертв, $1 - \alpha\cos\Omega t$ – коэффициент смертности хищников, α – амплитуда сезонности.

В уравнениях (2.3), (2.4) коэффициенты рождаемости жертв и смертности хищников периодически зависят от времени. Такая периодическая зависимость представляет собой математическое выражение фактора сезонности. После добавления к классической системе Лотки–Вольтерра фактора сезонности гамильтонова система Лотки–Вольтерра с одной степенью свободы превращается в гамильтонову систему с 3/2 степнями свободы. В работе исследуется, допускает ли такая система хаотическую динамику. Существуют разные методы исследования динамики и выявления хаотического поведения в таких системах. Для рассматриваемого случая используется метод перекрытия резонансов Чирикова, позволяющий определить условия перехода исследуемой системы к хаотическому поведению.

2.1 Преобразование исходной системы к гамильтонову виду, выражение не зависящего от времени гамильтониана в промежуточных переменных

Приведем уравнения (2.3), (2.4) к гамильтоновому виду с помощью следующей замены переменных:

$$q = \ln x, \quad p = \ln y. \tag{2.1.1}$$

В новых переменных эти уравнения примут следующий вид:

$$\frac{dq}{dt} = (1 + \alpha\cos\Omega t) - e^p, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{dp}{dt} = -(1 - \alpha\cos\Omega t) + e^q. \tag{2.1.3}$$

Уравнения (2.1.2), (2.1.3) гамильтоновы с гамильтонианом H:

$$H = e^q - (1 - \alpha\cos\Omega t)q + e^p - (1 + \alpha\cos\Omega t)p. \tag{2.1.4}$$

Преобразуем гамильтониан (2.1.4), представив его в виде суммы, не зависящего от времени гамильтониана $\bar{H}$ и зависящей от времени добавки

$$H = \bar{H} + \alpha\cos\Omega t = (q - p)e^q - q + e^p - p + \alpha\cos\Omega t(q - p). \tag{2.1.5}$$

В формуле (2.1.5) не зависящая от времени часть гамильтониана записана в терминах канонически сопряженных переменных p и q. Поэтому первым шагом на пути исследования будет переход к переменным типа действие–угол для не зависящей от времени части гамильтониана (2.1.5).

Вначале преобразуем не зависящий от времени гамильтониан $\bar{H}$. Представим его в следующем виде:

$$\bar{H} = e^q - q + e^p - p \cong \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2} + \frac{q^3}{6} + \frac{p^3}{6}. \tag{2.1.6}$$

В правой части формулы (2.1.6) оставим полиномиальное приближение гамильтониана $\bar{H}$ с точностью до членов третьего порядка. Оно может быть представлено в виде следующей суммы:

$$\bar{H} = H_0 + \frac{q^3}{6} + \frac{p^3}{6} = H_0 + \varepsilon H_1. \tag{2.1.7}$$

Здесь H_0 – гамильтониан гармонического осциллятора, а H_1 – возмущающий гамильтониан.

Гамильтонианы H_0 и H_1 имеют вид

$$H_0 = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2}, \tag{2.1.8}$$

$$H_1 = q^3 + p^3. \tag{2.1.9}$$

Малый параметр ε определен следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{6}. \tag{2.1.10}$$

Перейдем к переменным типа действие–угол для гамильтониана $\bar{H}$. Поскольку гамильтониан $\bar{H}$ представлен в виде малого возмущения гармонического осциллятора (2.1.7), удобно перейти к переменным типа действие–угол в два этапа. На первом этапе будем использовать стандартные переменные типа действие–угол для гамильтониана гармонического осциллятора H_0. На втором этапе, в пп. 2.2, выполним переход от этих переменных к переменным типа действие–угол для гамильтониана $\bar{H}$.

Приступим к выполнению первого этапа и выполним переход от переменных p и q к переменным типа действие–угол для гармонического осциллятора H_0 (основной части гамильтониана $\bar{H}$)

$$(p,q) \to (I,\theta). \tag{2.1.11}$$

Старые переменные p и q выражаются через новые переменные I и θ по следующим формулам:

$$p = \sqrt{2I}\cos\theta, \tag{2.1.12}$$

$$q = \sqrt{2I}\sin\theta. \tag{2.1.13}$$

Гамильтониан гармонического осциллятора H_0 в новых переменных равен просто переменной действия I:

$$H_0 = \frac{q^2}{2} + \frac{p^2}{2} = I. \tag{2.1.14}$$

На этом преобразование гамильтониана гармонического осциллятора H_0 в новых переменных завершено. Тогда не зависящий от времени гамильтониан $\bar{H}$ примет вид

$$\bar{H} = H_0 + \varepsilon H_1 = I + \varepsilon 2^{3/2} I^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta). \tag{2.1.15}$$

Гамильтониан $\bar{H}$ записан в промежуточных переменных I и θ. Они представляют собой переменные типа действие–угол для гамильтониана H_0, но не являются таковыми для гамильтониана $\bar{H}$. Поэтому дальнейшая задача заключается в построении переменных типа действие–угол для гамильтониана $\bar{H}$. Для этого в следующем разделе будет развит метод Гамильтона–Якоби, основанный на разложении в ряд теории возмущений по параметру ε.

2.2. Построение переменных типа действие–угол для не зависящего от времени гамильтониана $\bar{H}$ (2.1.15) с использованием метода Гамильтона–Якоби

Перейдем к построению переменных типа действие–угол для гамильтониана $\bar{H}$ (2.1.15)

$$(I,\theta) \to (J,\varphi). \tag{2.2.1}$$

Переход к переменным J, φ даст возможность преобразовать гамильтониан (2.1.5) к виду, который позволит применить метод Чирикова к исследуемой системе. Для перехода к этим переменным воспользуемся методом Гамильтона–Якоби, использующим производящую функцию канонических преобразований S. Она позволит выразить старые переменные через новые по следующим формулам:

$$\varphi = \frac{\partial S(J,\theta)}{\partial J}, \tag{2.2.2a}$$

$$I = \frac{\partial S(J,\theta)}{\partial \theta}. \tag{2.2.2б}$$

Далее, используя формулу (2.2.2а), можно будет свести процедуру по определению новых переменных к исследованию дифференциального уравнения первого порядка – к уравнению Гамильтона–Якоби. Уравнение Гамильтона–Якоби для производящей функции S с использованием гамильтониана (2.1.15) имеет следующий вид:

$$\bar{H}(I,\theta) = \bar{H}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta},\theta\right) = K(J). \tag{2.2.3}$$

Здесь $K(J)$ – не зависящий от времени гамильтониан (2.1.15) в терминах новой переменной J.

Решить уравнение Гамильтона–Якоби в общем случае довольно сложно. Для его решения будем использовать метод возмущения. При этом используем наличие в гамильтониане (2.1.15) малого параметра ε. С учетом разложения гамильтонианов $\bar{H}$ и $K(J)$ в ряд по малому параметру ε уравнение (2.2.3) примет вид

$$\bar{H}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta},\theta\right) = H_0\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial \theta},\theta\right) = \frac{\partial S}{\partial \theta} + \varepsilon 2^{3/2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \ldots . \tag{2.2.4}$$

Для применения теории возмущений производящая функция S также разлагается в ряд по ε:

$$S = J\theta + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots . \tag{2.2.5}$$

На первом этапе решения уравнения Гамильтона–Якоби приступим к определению первых трех членов $K_0(J)$, $K_1(J)$, $K_2(J)$ ряда теории возмущений для нового гамильтониана $K(J)$.

После подстановки формулы (2.2.5) в формулу (2.2.4) получим следующее уравнение:

$$J + \frac{\varepsilon\partial S_1}{\partial\theta} + \frac{\varepsilon^2\partial S_2}{\partial\theta} + \ldots + \varepsilon 2^{3/2}\left(J + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\theta} + \ldots\right)^{3/2}\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) = K_0(J) + \varepsilon K_1(J) + \ldots . \tag{2.2.6}$$

В нулевом порядке по ε из уравнения (2.2.6) следует уравнение для $K_0(J)$:

$$K_0(J) = J. \tag{2.2.7}$$

В первом порядке по ε из формулы (2.2.6) вытекает следующее уравнение для K_1:

$$\varepsilon 2\pi K_1(J) = \int_0^{2\pi} d\theta\left[\frac{\varepsilon\partial S_1}{\partial\theta} + \varepsilon 2^{3/2}J^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right] = 0. \tag{2.2.8}$$

Из формулы (2.2.8) видно, что $K_1 = 0$. Для производящей функции в первом порядке по ε из формулы (2.2.6) следует уравнение:

$$\varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\theta} = -\varepsilon 2^{3/2}J^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta). \tag{2.2.9}$$

Интегрируя уравнение (2.2.9), получаем следующее выражение для функции S_1:

$$\begin{aligned} S_1 &= C - 2^{3/2}J^{3/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right) = \\ &= C - 2^{3/2}J^{3/2}\left(\frac{1}{12}\cos 3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{12}\sin 3\theta\right). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Во втором порядке по ε из уравнения (2.2.6) получим следующее уравнение для функции $K_2(J)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 2\pi K_2(J) &= \int_0^{2\pi} d\theta\left[\frac{\varepsilon^2\partial S_2}{\partial\theta} + \varepsilon^2 2^{3/2}\frac{3}{2}J^{1/2}\frac{\partial S_1}{\partial\theta}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right] = \\ &= \varepsilon^2\int_0^{2\pi} d\theta 2^{3/2}\frac{3}{2}J^{1/2}(-1)2^{3/2}J^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2 = \\ &= -12\varepsilon^2 J^2\int_0^{2\pi} d\theta(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2 = -12\varepsilon^2 J^2\frac{5}{4}\pi = -15\varepsilon^2 J^2\pi. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Величина $K_2(J)$ имеет вид

$$K_2(J) = -\frac{15}{2}J^2. \quad (2.2.12)$$

Таким образом, первый этап завершен. Получены первые три члена $K_0(J)$, $K_1(J)$, $K_2(J)$ ряда теории возмущений для нового гамильтониана $K(J)$. Кроме того, производящая функция канонических преобразований $S = J\theta + \varepsilon S_1$ найдена с точностью до первого порядка по ε.

На втором этапе используем производящую функцию канонических преобразований S_1 для перехода к новым переменным J и φ с точностью до первого порядка по ε. Уравнения (2.2.2) с точностью до первого порядка по ε, примут следующий вид:

$$I = \frac{\partial S}{\partial\theta} = J + \frac{\varepsilon\partial S_1}{\partial\theta} = J - \varepsilon J^{3/2}2^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta). \quad (2.2.13)$$

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial\theta} = \theta + \frac{\varepsilon\partial S_1}{\partial J} = \theta + \varepsilon(-2^{3/2})\frac{3}{2}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right). \quad (2.2.14)$$

Для решения уравнений (2.2.13) и (2.2.14) разложим функцию θ в ряд по степеням ε:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots . \quad (2.2.15)$$

Тогда формула для переменой φ будет иметь вид

$$\varphi = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon 2^{3/2}\frac{3}{2}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3(\theta_0 + \varepsilon\theta_1) - \cos(\theta_0 + \varepsilon\theta_1) + \sin(\theta_0 + \varepsilon\theta_1) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta_0 + \varepsilon\theta_1)\right). \quad (2.2.16)$$

В нулевом порядке по ε получим следующее уравнение:

$$\theta_0 = \varphi. \quad (2.2.17)$$

В первом порядке по ε получим уравнение

$$\theta_1 = 2^{3/2}\frac{3}{2}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right). \quad (2.2.18)$$

Объединив формулы (2.2.16) , (2.2.17) и (2.2.18), получим с точностью до первого порядка по ε выражение для переменной θ через переменные J и φ:

$$\theta = \varphi + \varepsilon 2^{3/2}\frac{3}{2}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^{-3}\varphi\right). \quad (2.2.19)$$

Таким образом, в данном подразделе построены переменные типа действие–угол для гамильтониана (2.1.15). Старые переменные I и θ выражены через новые переменные J и φ. Это позволит применить метод Чирикова к исследованию динамики исходной системы. В следующем разделе представим полный гамильтониан (2.1.15) в виде гамильтониана, представляющего собой сумму не зависящего от времени гамильтониана в переменных J и φ и отдельных резонансов.

2.3. Преобразование полного гамильтониана системы Лотки–Вольтерра с сезонностью (2.1.5) *в виде гамильтониана, представляющего собой сумму не зависящего от времени гамильтониана и отдельных резонансов*

Для того чтобы исследовать динамику двумерной системы Лотки–Вольтерра с сезонностью методом Чирикова, преобразуем полный гамильтониан таким образом, чтобы в его состав входили в качестве слагаемых отдельные резонансы. Для этого выполним следующие преобразования.

Вначале выразим полный гамильтониан (2.1.5) через не зависящий от времени гамильтониан $\bar{H}$ (2.1.15), записанный в переменных J и φ, а также через зависящий от времени дополнительный член, пропорциональный α и выраженный в переменных I и θ.

С использованием формул (2.2.7), (2.2.8), (2.2.12) гамильтониан будет иметь вид

$$H = \bar{H} + \alpha(q - p)\cos\Omega t = J - \varepsilon^2\frac{15}{2}J^2 + \alpha\cos\Omega t\sqrt{2I}(\sin\theta - \cos\theta). \quad (2.3.1)$$

В зависящем от времени члене формулы (2.3.1) выразим сомножитель, содержащий I через переменные J и θ. Получим следующую формулу:

$$\sqrt{2I} = 2^{1/2}(J - \varepsilon J^{3/2}2^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta))^{1/2} = 2^{1/2}J^{1/2}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon J^{1/2}2^{3/2}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\right). \qquad (2.3.2)$$

Осталось выразить переменную θ через переменные J и φ. Как следует из формулы (2.2.19), выражения для $\sin\theta$ и $\cos\theta$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin\left(\varphi + \varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\right) = \\ &= \sin\varphi\cos\left(\varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\right) + \\ &+ \cos\varphi\sin\left(\varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\right) = \\ &= \sin\varphi + \varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos\varphi.\end{aligned} \qquad (2.3.3)$$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos\left(\varphi + \varepsilon^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\right) = \\ &= \cos\varphi - \sin\varphi\varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right).\end{aligned} \qquad (2.3.4)$$

Используя формулы (2.3.2), (2.3.3) и (2.3.4), выразим гамильтониан, представленный в формуле (2.3.1) через переменные J и φ:

$$\begin{aligned}H &= J - \varepsilon^2\frac{15}{2}J^2 + \alpha\cos\Omega t\left(\sin\varphi - \cos\varphi + \varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\times\right. \\ &\times\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\cos\varphi + \\ &\left.+ \varepsilon 2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\sin\varphi\right)\times \\ &\times 2^{1/2}\left(J^{1/2} - \frac{1}{2}\varepsilon J 2^{3/2}\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)\right) = J - \varepsilon^2\frac{15}{2}J^2 + \\ &+ \alpha\cos\Omega t 2^{1/2}J^{1/2}(\sin\varphi - \cos\varphi) + \varepsilon\alpha\cos\Omega t 2^{1/2}J^{1/2}2^{3/2}\frac{2}{3}J^{1/2}\times \\ &\times(\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right) + \\ &+ \varepsilon\alpha\cos\Omega t 2^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)J 2^{3/2}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)(\sin\varphi - \cos\varphi) + \ldots .\end{aligned} \qquad (2.3.5)$$

Преобразуем формулу (2.3.5) к более удобному виду. Для удобства работы введем коэффициенты A, B и C:

$$A = \alpha\cos\Omega t 2^{1/2}J^{1/2}, \qquad (2.3.6)$$

$$B = \varepsilon\cos\Omega t 2^{1/2}\frac{8}{3}J, \qquad (2.3.7)$$

$$C = -2\varepsilon\cos\Omega t J. \qquad (2.3.8)$$

После введения указанных коэффициентов формула (2.3.5) примет вид

$$\begin{aligned}H &= J - \varepsilon^2\frac{15}{2}J^2 + A(\sin\varphi - \cos\varphi) + \\ &+ B(\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right) + \\ &+ C(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)(\sin\varphi - \cos\varphi) + \ldots .\end{aligned} \qquad (2.3.9)$$

Формулу (2.3.9) можно упростить, если произвести сдвиг фазы φ, выполнив следующую замену переменных:

$$\varphi \to \varphi - \frac{\pi}{4}. \tag{2.3.10}$$

После сдвига фазы члены формулы (2.3.9), содержащие $\sin\varphi$, $\sin^3\varphi$, $\cos\varphi$, $\cos^3\varphi$ примут следующий вид:

$$\sin\varphi - \cos\varphi \to -\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \tag{2.3.11}$$

$$\cos\varphi + \sin\varphi \to \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \tag{2.3.12}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi + \sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi = \frac{1}{12}\cos 3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{12}\sin 3\varphi + \frac{3}{4}\sin\varphi = \\ = \frac{3}{4}(-\sqrt{2})\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{2}\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}(-\sqrt{2})\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{2}\sin\left(3\varphi + \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ = \frac{3}{4}\left(-\sqrt{2}\right)\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{12}\sqrt{2}\cos\left(3\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\right),\end{gathered} \tag{2.3.13}$$

$$\begin{gathered}\cos^3\varphi + \sin^3\varphi = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi + \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi = \\ = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\cos\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\sin\left(3\varphi + \frac{\pi}{4}\right).\end{gathered} \tag{2.3.14}$$

После сдвига фазы формулу (2.3.9) можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}H = J - \varepsilon^2\frac{15}{2}J^2 + \tilde{A}\cos\varphi + \tilde{B}_1\sin\varphi\cos\varphi + \\ + \tilde{B}_2\sin\varphi\cos 3\varphi + \tilde{C}_1\sin\varphi\cos\varphi + \tilde{C}_2\cos\varphi\sin 3\varphi.\end{gathered} \tag{2.3.15}$$

В формуле (2.3.15) коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ пропорциональны функции $\cos\Omega t$. После выполненных выше преобразований члены, содержащие эти коэффициенты, очень похожи на резонансы. Разница состоит в том, что некоторые из этих членов содержат произведения тригонометрических функций вместо самих тригонометрических функций. Поэтому далее выполним их замену на одиночные тригонометрические функции. Коэффициенты $\tilde{A}$, $\tilde{B}_1$, $\tilde{B}_2$, $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ в формуле (2.3.15) имеют следующий вид:

$$\tilde{A} = \left(-\sqrt{2}\right)A = -2\alpha J^{1/2}\cos\Omega t, \tag{2.3.16}$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{3}{2}B = -\varepsilon\alpha\cos\Omega t 4J, \tag{2.3.17}$$

$$\tilde{B}_2 = \frac{1}{6}B = \varepsilon\alpha J^{1/2}\cos\Omega t\frac{4}{9}J, \tag{2.3.18}$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{3}{2}C = 3\varepsilon\alpha\cos\Omega tJ, \tag{2.3.19}$$

$$\tilde{C}_2 = -\frac{1}{2}C = \varepsilon\alpha\cos\Omega tJ. \tag{2.3.20}$$

Произведем дальнейшее преобразование тригонометрических функций по следующим формулам:

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi, \tag{2.3.21}$$

$$\sin\varphi\cos 3\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\varphi + 3\varphi) + \sin(\varphi - 3\varphi)), \tag{2.3.22}$$

$$\sin 3\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}(\sin(\varphi + 3\varphi) + \sin(3\varphi - \varphi)). \tag{2.3.23}$$

Воспользовавшись формулами (2.3.21)–(2.3.23), приведем выражение (2.3.15) к следующему виду:

$$H = J - \varepsilon^2 \frac{15}{2} J^2 + \tilde{A}\cos\varphi + \left[\left(\frac{\tilde{B}_1 + \tilde{C}_1}{2}\right) - \frac{\tilde{B}_2}{2} + \frac{\tilde{C}_2}{3}\right]\sin 2\varphi + \left[\frac{\tilde{B}_2}{2} + \frac{\tilde{C}_2}{2}\right]\sin 4\varphi. \tag{2.3.24}$$

Подставив коэффициенты из формул (2.3.16)–(2.3.20) в формулу (2.3.24), получим окончательную формулу для полного гамильтониана с тремя выделенными резонансами

$$H = J - \varepsilon^2 \frac{15}{2} J^2 - 2\alpha J^{1/2}\cos\Omega t\cos\varphi - \frac{2}{9}\varepsilon\alpha J\cos\Omega t\sin 2\varphi + \frac{13}{2}\varepsilon\alpha J\cos\Omega t\sin 4\varphi. \tag{2.3.25}$$

Формула (2.3.25) содержит резонансные члены, выраженные в виде произведений тригонометрических функций, содержащих параметры Ωt и φ. Выполним последнее преобразование и разложим каждое их этих произведений в виде суммы из двух слагаемых. Окончательная формула преобразованного гамильтониана с выделенными резонансами будет иметь вид

$$\begin{gathered} H = J - \varepsilon^2 \frac{15}{2} J^2 - \alpha J^{1/2}[\cos(\varphi - \Omega t) + \cos(\varphi + \Omega t)] - \varepsilon\alpha\left(\frac{1}{9}\right) J[\sin(2\varphi - \Omega t) + \sin(2\varphi + \Omega t)] + \\ + \varepsilon\alpha\left(\frac{13}{36}\right) J\left[\sin(4\varphi - \Omega t) + \sin(4\varphi + \Omega t)\right]. \end{gathered} \tag{2.3.26}$$

Таким образом, после выполненных выше преобразований полный гамильтониан системы Лотки–Вольтерра с сезонностью (2.1.5) удалось записать приближенно в виде гамильтониана (2.3.26), содержащего три резонанса: $\cos(\varphi - \Omega t)$, $\sin(2\varphi - \Omega t)$, $\sin(4\varphi - \Omega t)$, с помощью которых в следующем разделе будет исследована динамика исходной системы.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПЕРЕКРЫТИЯ РЕЗОНАНСОВ ЧИРИКОВА

Используемый в работе метод Чирикова основан на выделении из множества резонансов исследуемого гамильтониана нескольких наиболее значимых резонансов. Для них определяется момент, когда эти резонансы начинают перекрываться и взаимодействовать. При этом каждый выделенный резонанс в отдельности описывается гамильтонианом нелинейного маятника. С помощью таких гамильтонианов для каждого резонанса определяется его частотная ширина. Выделенные резонансы разделены определенным частотным интервалом. Каждый из них занимает область на оси частот, определяемую его шириной. Резонансы начинают взаимодействовать, когда эти области перекрываются. Это происходит, когда сумма полуширин этих резонансов становится равной частотному расстоянию между резонансами. Количественная оценка взаимодействия резонансов определяется с помощью критерия, определяющего степень перекрытия резонансов. Критерий был предложен Чириковым для характеристики динамики гамильтоновых систем [5].

Задача исследования, выполняемая в этом разделе, состоит в том, чтобы выяснить, при какой амплитуде сезонности в исходной системе Лотки–Вольтерра происходит переход к хаотическому поведению. Динамика системы будет исследоваться поэтапно, с использованием трех резонансов полного гамильтониана системы (2.3.26). Каждый из трех резонансов гамильтониана (2.3.26) описывается с помощью гамильтониана нелинейного маятника. Это позволяет оценить размеры резонансов как по оси переменой действия J, так и по оси частот ω. Зная размеры резонансов, можно определить амплитуду сезонности, при которой возникает хаотическое поведение в системе.

Исследование выполняется в три этапа.

На первом этапе, для удобства исследования, гамильтониан (2.3.26) представлен в общем виде (3.1), (3.2). С помощью уравнений динамики для данного гамильтониана выделяется один из трех резонансов. Он преобразовывается в гамильтониан хорошо изученного нелинейного осциллятора, для которого по известным формулам можно определить ширину резонанса. Остальные резонансы исследуются аналогичным образом.

На втором этапе исследования оцениваются размеры резонансов с помощью полученного гамильтониана нелинейного осциллятора.

На третьем этапе, после получения размеров выделенных резонансов, определяются условия, при которых полуширины резонансов перекрывают расстояния между ними. В этот момент происходит перекрытие резонансов, которое приводит к возникновению хаотического поведения в системе. С помощью критерия Чирикова определяется конкретное значение амплитуды сезонности, при котором исследуемая система переходит к хаосу.

Перейдем к реализации первого этапа. Представим гамильтониан (2.3.26) в общем виде:

$$H = \bar{H}(J) + \alpha V(J, \varphi, t). \tag{3.1}$$

Здесь зависящее от времени слагаемое представлено следующим образом:

$$V(J, \varphi, t) = \sum_{k,l} V_{k,l}(J)\cos(k\varphi - l\Omega t + \varphi_{k,l}). \tag{3.2}$$

Гамильтониан (3.1), (3.2) порождает уравнения движения, которые описывают динамику взаимодействующих резонансов. Уравнения динамики для данного гамильтониана имеют вид

$$\frac{dJ}{dt} = -\alpha\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \alpha\sum_{k,l} kV_{k,l}(J)\sin(k\varphi - l\Omega t + \varphi_{k,l}), \tag{3.3}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\alpha\frac{\partial H}{\partial J} = \frac{d\bar{H}(J)}{dJ} + \alpha\frac{\partial \bar{H}(J, \varphi, t)}{\partial J} = w(J) + \alpha\sum_{k,l}\frac{\partial V}{\partial J}\cos(k\varphi - l\Omega t + \varphi_{k,l}). \tag{3.4}$$

Вначале выделим отдельные резонансы из множества всех резонансов. До тех пор пока частотные полуширины резонансов не перекрывают частотного расстояния между ними, такое выделение можно осуществить. При достаточно малом параметре α в возмущающем члене динамика системы представляет собой динамику невзаимодействующих резонансов. Резонансы возникают, когда одна из фаз, заданных парой k, l в уравнениях (3.3), (3.4), начинает меняться медленно. При этом другие фазы меняются значительно быстрее, а их средний вклад незначителен. Исходя из этих соображений, можно выделить из множества резонансов, влияющих на динамику системы (3.3), (3.4), один главный.

Приступим к выделению отдельного резонанса.

Резонанс проявляется наиболее сильно, когда соответствующая фаза перестает меняться. При этом ее производная по времени становится равной нулю:

$$k\omega - l\Omega = 0. \tag{3.5}$$

Здесь ω — собственная частота системы, Ω — частота внешнего воздействия, k и l — целые числа, определяющие кратности вхождения частот в фазу.

Когда выполняется условие резонанса (3.5), соответствующая фаза в уравнениях (3.3), (3.4) становится медленнее по сравнению с остальными и вносит главный вклад в динамику. Поэтому оставим в уравнениях (3.3), (3.4) только один определенный резонанс. Ему будет соответствовать действие J_0, удовлетворяющее уравнению

$$k_0\omega(J_0) - l_0\Omega = 0. \tag{3.6}$$

Переобозначим входящие в формулы (3.3), (3.4) коэффициенты следующим образом:

$$V_{k_0,l_0} = V_0. \tag{3.7}$$

Тогда упрощенная система уравнений (3.3), (3.4) примет следующий вид:

$$\frac{dJ}{dt} = \alpha k_0 V_0 \sin(k_0\varphi - l_0\Omega t + \varphi), \tag{3.8}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(J) + \alpha\frac{\partial V_0}{\partial J}\cos(k_0\varphi - l_0\Omega t + \varphi). \tag{3.9}$$

Система (3.8), (3.9) представляет собой редукцию системы (3.3), (3.4), выполненную для описания выделенного резонанса, заданного парой k_0, l_0. Для упрощения этой системы вначале введем переменную

$$\Delta J = J - J_0. \tag{3.10}$$

Эта переменная будет представлять собой одну из пары канонически сопряженных переменных, в которых можно будет выразить динамику системы (3.8), (3.9). Как будет показано ниже (формула (3.16)), другой канонически сопряженной переменной будет фаза, от которой зависят тригонометрические функции в системе (3.8), (3.9).

Далее выполним следующие шаги аппроксимации.

1. В правых частях системы (3.8), (3.9) коэффициент V_0 заменим на константу $V_0 = V_0(J_0)$. Это приближение позволит избавиться от второго слагаемого в правой части формулы (3.9). Формула (3.9) примет следующий вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(J). \tag{3.11}$$

2. Оставшееся первое слагаемое в формуле (3.11) допускает следующее преобразование:

$$\omega(J) = \omega_0 + \omega'\Delta J, \tag{3.12}$$

где

$$\omega_0 = \omega(J_0), \quad \omega' = \frac{d\omega(J_0)}{dJ}. \tag{3.13}$$

После завершения аппроксимации подставим формулы (3.12), (3.13) в формулу (3.11) и получим формулу

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \omega'\Delta J. \tag{3.14}$$

Формула (3.14) допускает упрощения. Умножим уравнения (3.14) на константу k_0. Получим следующее уравнение:

$$\frac{dk_0\varphi}{dt} = k_0\omega_0 + k_0\omega'\Delta J = l_0\Omega + k_0\omega'\Delta J = \frac{d}{dt}l_0\Omega t + k_0\omega'\Delta J. \tag{3.15}$$

Перенесем слагаемое $\frac{d}{dt}l_0\Omega t$ в левую часть формулы (3.15). В итоге в левой части появится производная по времени от новой фазы ψ:

$$\frac{d}{dt}(k_0\varphi - l_0\Omega t + \pi) = \frac{d}{dt}\psi = k_0\omega'\Delta J. \tag{3.16}$$

Здесь ψ — новая фаза:

$$\psi = k_0\varphi - l_0\Omega t + \varphi - \pi. \tag{3.17}$$

В результате выполненных упрощений и преобразований система (3.8), (3.9) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}(\Delta J) = -\alpha k_0 V_0 \sin\psi, \tag{3.18}$$

$$\frac{d}{dt}\psi = k_0\omega'\Delta J. \tag{3.19}$$

Представим уравнения (3.18), (3.19) в гамильтоновой форме

$$\frac{d}{dt}(\Delta J) = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\psi}, \quad \frac{d}{dt}\psi = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial(\Delta J)}, \tag{3.20}$$

где гамильтониан $\tilde{H}$ имеет вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}k_0\omega'(\Delta J)^2 - \varepsilon k_0 V_0 \cos\psi. \tag{3.21}$$

Гамильтониан (3.21) представляет собой гамильтониан нелинейного маятника. Он описывается уравнением

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \Omega_0^2 \sin\psi = 0, \tag{3.22}$$

где частота колебаний маятника имеет вид

$$\Omega_0 = (\alpha k_0^2 V_0 |\omega'|)^{1/2}. \tag{3.23}$$

Таким образом, первый этап завершен. Динамику одного выделенного резонанса удалось описать в терминах колебаний нелинейного маятника. Аналогичным образом описывается динамика остальных резонансов.

Перейдем ко второму этапу исследования и определим ширину выделенного резонанса. Для определения его ширины используем формулу для сепаратрисы нелинейного маятника. Сепаратриса нелинейного маятника, заданного гамильтонианом (3.21), определяется уравнением

$$\Delta J_s = \pm\sqrt{\frac{4\alpha V_0}{\omega'}}\cos\frac{\psi}{2}. \tag{3.24}$$

С помощью формулы (3.24) определим полуширину резонанса в терминах переменной действия ΔJ:

$$\Delta J = 2\sqrt{\frac{\alpha V_0}{\omega'}}. \tag{3.25}$$

Далее, через полуширину в терминах переменной действия, выразим частотную полуширину выделенного резонанса

$$\Delta\omega = \omega'\Delta J = 2\sqrt{\alpha\omega' V_0}. \tag{3.26}$$

На втором этапе, с помощью полученного гамильтониана нелинейного осциллятора, определены размеры выделенного резонанса. Таким же образом определяются размеры остальных резонансов.

После получения размеров выделенных резонансов перейдем к третьему этапу и исследуем систему с учетом взаимодействия этих резонансов. Рассмотрим пару, образованную первым и вторым резонансом. Формулой (3.26) определены их полуширины. Располагая двумя полуширинами этих резонансов, критерий Чирикова можно выразить в виде

$$(\Delta\omega)_1 + (\Delta\omega)_2 = \Delta\Omega. \tag{3.27}$$

Здесь $(\Delta\omega)_1$ – полуширина первого резонанса, $(\Delta\omega)_2$ – полуширина второго резонанса, $\Delta\Omega$ – расстояние между резонансами.

Согласно критерию Чирикова появление хаотического поведения следует ожидать, когда сумма полуширин соседних резонансов становится равной расстоянию между резонансами. Приведенные выше формулы (3.26) и (3.27) справедливы для любого резонанса и любой пары резонансов. Располагая этими формулами, можно перейти к исследованию конкретных резонансов, заданных формулой (2.3.26). Из формулы (2.3.26) следует конкретное выражение для частоты $\omega(J)$ исследуемой системы Лотки–Вольтерра с сезонностью:

$$\omega(J) = 1 - 15\varepsilon^2 J. \tag{3.28}$$

Теперь с учетом формулы (3.28) формула (3.6) для первого, второго и третьего резонанса примет вид

$$1 - 15\varepsilon^2 J_1 = \Omega, \tag{3.29}$$

$$1 - 15\varepsilon^2 J_2 = \frac{\Omega}{2}, \tag{3.30}$$

$$1 - 15\varepsilon^2 J_3 = \frac{\Omega}{4}. \tag{3.31}$$

Первая производная от частоты по параметру действия одинакова для всех трех резонансов и равна

$$\omega' = -15\varepsilon^2. \tag{3.32}$$

Осталось определить входящий в формулу (3.26) параметр V_0. Значения параметра V_0 для первого, второго и третьего резонанса равны

$$V_{01} = J_1^{1/2} = \left(\frac{1-\Omega}{15\varepsilon^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{12}{5}(1-\Omega)\right)^{1/2}, \tag{3.33}$$

$$V_{02} = \frac{1}{9}\varepsilon J_2 = \frac{\varepsilon}{9}\frac{\left(1-\frac{\Omega}{2}\right)}{15\varepsilon^2} = \frac{2}{45}\left(1-\frac{\Omega}{2}\right), \tag{3.34}$$

$$V_{03} = \frac{13}{36}\varepsilon J_3 = \frac{13}{36}\varepsilon\frac{\left(1-\frac{\Omega}{4}\right)}{15\varepsilon^2} = \frac{13}{90}\left(1-\frac{\Omega}{4}\right). \tag{3.35}$$

Подставим формулы (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) в формулы (3.26), (3.27). В итоге получим формулы для определения частотных полуширин для первого, второго и третьего резонансов

$$(\Delta\omega)_1 = 2\alpha^{1/2}\sqrt{\frac{5}{12}}\left(\frac{12}{15}(1-\Omega)\right)^{1/4}, \tag{3.36}$$

$$(\Delta\omega)_2 = 2\alpha^{1/2}\sqrt{\frac{5}{12}}\left(\frac{2}{45}\left(1-\frac{\Omega}{2}\right)\right)^{1/2}, \tag{3.37}$$

$$(\Delta\omega)_3 = 2\alpha^{1/2}\sqrt{\frac{5}{12}}\left(\frac{13}{90}\left(1-\frac{\Omega}{4}\right)\right)^{1/2}. \tag{3.38}$$

Располагая конкретными полуширинами этих резонансов, можно использовать критерий Чирикова для определения условий перехода системы к хаосу. Когда частотные полуширины известны, критерий Чирикова формулируется следующим образом:

$$K_{ch} = \frac{(\Delta\omega)_1 + (\Delta\omega)_2}{\Delta\Omega} \geq 1. \tag{3.39}$$

Если умножить левую и правую части формулы (3.39) на $\Delta\Omega$, то получим более удобную для дальнейших расчетов форму критерия Чирикова – формулу (3.27). Подставив в формулу (3.27) частотные полуширины соседних резонансов из формул (3.36), (3.38), получим окончательные формулы критерия Чирикова, из которых можно определить критическую амплитуду сезонности α, при которой в исследуемой системе происходит переход к хаотическому поведению

$$(\Delta\omega)_1 + (\Delta\omega)_2 = 2\alpha^{1/2}\sqrt{\frac{5}{12}}\left[\left(\frac{12}{5}(1-\Omega)\right)^{1/4} + \left(\frac{2}{45}\left(1-\frac{\Omega}{2}\right)\right)^{1/2}\right] = \frac{\Omega}{2}, \tag{3.40}$$

$$(\Delta\omega)_2 + (\Delta\omega)_3 = 2\alpha^{1/2}\sqrt{\frac{5}{12}\left[\left(\frac{2}{45}\left(1-\frac{\Omega}{2}\right)\right)^{1/2} + \left(\frac{13}{90}\left(1-\frac{\Omega}{4}\right)\right)^{1/2}\right]} = \frac{\Omega}{4}. \tag{3.41}$$

Формула (3.40) определяет критерий Чирикова для первого и второго резонансов, формула (3.41) – для второго и третьего резонансов. Для того чтобы оценить порядок величины $\alpha_{1,2}$, при котором перекрываются первый и второй резонансы и в исследуемой системе происходит переход к хаосу, положим для определенности $\Omega = \frac{1}{2}$. Тогда из формулы (3.40) следует, что $\alpha_{1,2} = 0.024$. Второй расчет проведем для второго и третьего резонансов, приняв значение $\Omega = \frac{3}{2}$. В этом случае из формулы (3.41) следует, что значение $\alpha_{2,3}$, при котором перекрываются второй и третий резонансы и происходит переход системы к хаосу, составляет $\alpha_{2,3} = 0.515$. С помощью критерия Чирикова определено значение критической амплитуды сезонности α, при которой в результате взаимодействия выделенных резонансов (первого и второго, второго и третьего) происходит переход к хаотической динамике в системе Лотки–Вольтерра с сезонностью. При этом размеры резонансов прямо пропорциональны $\alpha^{1/2}$. Таким образом, при наличии периодического возмущения (в данном случае сезонности), при определенном параметре амплитуды сезонности, в исходной системе с двумя зависимыми переменными возникает хаотическое поведение.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована динамика системы Лотки–Вольтерра с сезонностью с применением эффективного и достаточно простого метода перекрытия резонансов Чирикова [5]. Каких-либо сложностей с использованием этого метода для выявления хаотического поведения в исходной системе не возникало. Метод Чирикова широко известен, хорошо изучен и позволяет с помощью параметра K, определяющего степень перекрытия резонансов, охарактеризовать динамику гамильтоновых систем. В соответствии с теорией Чирикова, при малом взаимодействии резонансов и $K \ll 1$ динамика системы характеризуется как регулярная. При сильном перекрытии резонансов и $K \geq 1$ динамика системы оказывается очень сложной, в ней возникает нерегулярное движение, сопровождающееся переходом системы к хаосу.

Основная сложность исследования заключалась в поэтапном преобразовании системы Лотки–Вольтерра с сезонностью таким образом, чтобы к ней можно было применить метод Чирикова. Необходимое преобразование выполнено в три этапа в пп. 2.1, 2.2 и 2.3. В результате преобразований удалось выразить гамильтониан исходной системы в виде суммы не зависящего от времени гамильтониана в переменных действие–угол и нескольких резонансов. Выполненное в разд. 3 исследование взаимодействия выделенных резонансов с использованием метода Чирикова позволило определить аналитический критерий возникновения хаотического поведения в исследуемой системе. Аналитический критерий основан на определении критических величин амплитуд сезонности, при которых в исследуемой системе Лотки–Вольтерра с сезонностью возникает хаотическое поведение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volterra V.* Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // Nature. 1926. V. 118. P. 558–560.
https://doi.org/10.1038/118558a0
2. *Volterra V.* Variazioni e fluttuazioni dei numero d'individui in specie animali conviventi; Memorie della Regia Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. V. 2. P. 31–113. English translation in Chapman, R.N., Animal Ecology, New York: McGraw–Hill, 1931.
3. *Volterra V.* Lessons on the mathematical theory of struggle for life. (Original: Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie). Paris: Gauthier-Villars, 1931. P. 214.
4. *Lotka A.J.* Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. P. 495.
5. *Chirikov B.V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263–379.
6. *Poincaré H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. V. 1–3, Paris: Gauthier-Villars, 1892. P. 412.
7. *Poincaré H.* Leçons de mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1905. P. 365.
8. *Hadamard J.S.* Sur le billard non-Euclidien // Soc. Sci. Bordeaux, Procès Verbaux 1898. 147 p.
9. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963.V. 20. № 2. P. 130–141.
https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2
10. *Lorenz E.N.* Predictability: Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas? // American Association for the Advancement of Science. 1972.
http://gymportalen.dk/sites/lru.dk/files/lru/132_kap6_lorenz_artikel_the_butterfly_effect.pdf
11. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. № 1. P. 25–52.
https://doi.org/10.1007/BF01020332
12. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. № 6. P. 669–706.
https://doi.org/10.1007/BF01107909
13. *Feigenbaum M.J., Greene J.M., MacKay R.S., Vivaldi F.* Universal behaviour in families of area-preserving maps // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1981. V. 3. № 3. P. 468–486.
https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90034-8
14. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman, 1982. P. 468.
15. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 11. P. 1196–1199.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1196
16. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. № 8. P. 821–824.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821

17. *Fishman M.P., Egolf D.A.* Revealing the building block of spatiotemporal chaos: deviations from extensivity // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. № 5. Article ID 054103. P. 4.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.054103
18. *Spiegel D.R., Johnson E.R.* Experimental investigation of the transition to spatiotemporal chaos with a system-size control parameter // Research Letters in Physics. V. 2008. Article ID 891324. P. 5.
https://doi.org/10.1155/2008/891324
19. *Benincà E., Ballantine B., Ellner S.P., Huisman J.* Species fluctuations sustained by a cyclic succession at the edge of chaos // PNAS (Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America). 2015. V. 112. № 20. P. 6389–6394.
https://doi.org/10.1073/pnas.1421968112
20. *Clements C.F., Ozgul A.* Indicators of transitions in biological systems // Ecol. Lett. 2018. V. 21. № 6. P. 905–919.
https://doi.org/10.1111/ele.12948
21. *Scheffer M., Bascompte J., Brock W. et al.* Early-warning signals for critical transitions // Nature. 2009. V. 461. P. 53–59.
https://doi.org/10.1038/nature08227
22. *Gopalakrishnan E. et al.* Early warning signals for critical transitions a thermoacoustic system // Sci. Rep. 2016. V.6. Article number: 35310. P. 1-10.
https://doi.org/10.1038/srep35310
23. *Boerlijst M.C., Oudman T., de Roos A.M.* Catastrophic collapse can occur without early warning: examples of silent catastrophes in structured ecological models // PLOS ONE. 2013. V. 8. № 4. P. 1–6.
https://doi.org/10.1371/journal.pone.0062033
24. *Peacock T., Haller G.* Lagrangian coherent structures. The hidden skeleton of fluid flows. // Physics Today. 2013. P. 41.
25. *Mathur M., Haller G., Peacock T., Ruppert-Felsot J.E., Swinney H.L.* Uncovering the Lagrangian skeleton of turbulence // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. № 14. P. 144502-1–144502-4.
https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.144502
26. *Falessi M.V., Pegoraro F., Schep T.J.* Lagrangian coherent structures and plasma transport processes // J. of Plasma Physics. 2015. V. 81. № 5.
https://doi.org/10.1017/S0022377815000690
27. *Kai E.T., Rossi V., Sudre J., Weimerskirch H., Lopez C., Hernandez-Garcia E., Marsac F., Garcon V.* Top marine predators track Lagrangian coherent structures // PNAS (Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America). 2009. V. 106. № 20. P. 8245–8250.
28. *Zhu H., Chapman S.C., Dendy R.O.* Robustness of predator-prey models for confinement regime transitions in fusion plasmas // Phys. Plasmas. 2013. V. 20. № 4. P. 042302-1–042302-11.
https://doi.org/10.1063/1.4800009
29. *Aydiner E.* Chaotic universe model: Lotka–Volterra dynamics of the universe evolution // arXiv: 1610.07338v3 [gr-qc]. 2017. P. 9.
30. *Gatabazi P., Mba J.C., Pindza E.* Fractional gray Lotka–Volterra models with application to cryptocurrencies adoption // Chaos. 2019. V. 29. № 7. P. 10.
https://doi.org/10.1063/1.5096836
31. *Arneodo A., Coullet P., Peyraud J. et al.* Strange attractors in Volterra equations for species in competition // J. Math. Biology. 1982. V. 14. № 2. P. 153–157.
https://doi.org/10.1007/BF01832841
32. *Arneodo A., Coullet P., Tresser C.* Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations // Phys. Lett. A . 1980. V. 79A. № 4. P. 259–263.
https://doi.org/10.1016/0375-9601(80)90342-4
33. *Wang R., Xiao D.* Bifurcations and chaotic dynamics in a 4-dimensional competitive Lotka–Volterra system // Nonlinear Dyn. 2010. V. 59. № 3. P. 411–422.
https://doi.org/10.1007/s11071-009-9547-3
34. *Vano J.A., Wildenberg J.C., Anderson M.B., Noel J.K., Sprott J.C.* Chaos in low-dimensional Lotka–Volterra models of competition // Nonlinearity. 2006. V. 19. № 10. P. 2391–2404.
https://doi.org/10.1088/0951-7715/19/10/006
35. *Kozlov V., Vakulenko S.* On chaos in Lotka–Volterra systems: an analytical approach // Nonlinearity. 2013. V. 26. № 8. P. 2299–2314.
https://doi.org/10.1088/0951-7715/26/8/2299
36. *Christie J.R., Gopalsamy K., Li J.* Chaos in perturbed Lotka–Volterra systems // Anziam J. (Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal). 2001. V. 42. № 3. P. 399–412.
https://doi.org/10.1017/S1446181100012025