ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 2, с. 217–223

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.951

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ГАРМОНИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

М. Е. Боговский[1,2]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия
[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия
e-mail: bogovskii@ccas.ru, bogovskii.me@mipt.ru

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.
Переработанный вариант 21.07.2020 г.
Принята к публикации 15.08.2020 г.

В статье дано новое, основанное на идеологии Ф. Браудера, доказательство теоремы об аппроксимации гармоническими многочленами в пространствах Лебега $L_p(\Omega)$ и Соболева $W_p^1(\Omega)$ слабых решений уравнения Лапласа в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, со связной липшицевой границей. Библ. 9.

Ключевые слова: проблема аппроксимации, гармонические многочлены, ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, липшицева граница, пространство Лебега $L_p(\Omega)$, пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$, слабые решения уравнения Лапласа.

DOI: 10.31857/S0044466921010038

1. ВВЕДЕНИЕ

Ф. Браудером в [1], [2] было установлено, что если $\mathcal{A}$ – линейный эллиптический дифференциальный оператор, то решение уравнения

$$\mathcal{A}u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, может быть аппроксимировано в норме пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$ решениями того же уравнения для какой-либо подходящей области $\widetilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}$, содержащей замыкание $\overline{\Omega}$ области Ω, если решения для $\widetilde{\Omega}$ образуют аппроксимативный базис в $W_p^l(\widetilde{\Omega})$.

В настоящей работе рассматривается вопрос об аппроксимации гармоническими многочленами слабых решений уравнения Лапласа в пространствах Лебега $L_p(\Omega)$ и Соболева $W_p^1(\Omega)$ для ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, со связной липшицевой границей при $p \in (1, \infty)$.

Необходимо отметить, что подход Ф. Браудера к аппроксимации решений эллиптических уравнений в норме W_p^l принципиально опирается на двойственность пространства $\mathring{W}{}_p^l$ и пространства функционалов $\mathring{W}{}_{p'}^{-l}$ с сопряженным показателем $p' = p/(p-1)$. Существенным недостатком такого подхода является чрезмерная сложность неизбежно возникающих при этом вспомогательных задач для оператора $\mathcal{A}$, когда $\mathcal{A}$ уже не является простейшим оператором Лапласа. Этого недостатка лишен представленный в настоящей статье новый подход к задачам аппроксимации решений.

2. АППРОКСИМАЦИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

В этом разделе рассматриваются вопросы аппроксимации гармоническими многочленами слабых решений уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в нормах $L_p(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ для области Ω, т.е. для открытого связного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Существенно, что на замкнутых подпространствах слабых решений классов $L_p(\Omega)$ и $W_p^1(\Omega)$ устанавливается аппроксимативная базисность системы однородных гармонических многочленов, ортогональных на сфере S_R в $\mathbb{R}^n$ какого-либо радиуса $R > 0$, выбранного и зафиксированного так, чтобы сфера S_R содержала замыкание $\overline{\Omega}$ рассматриваемой области Ω. Отметим, что аппроксимативная базисность здесь понимается в строгом смысле определения 9.1 в [3, с. 275].

Как с более простого, начнем со случая аппроксимации в норме $L_p(\Omega)$. При этом функцию $u \in L_p(\Omega)$ будем называть слабым решением уравнения Лапласа в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено тождество

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = 0 \quad \forall v \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega),$$

где символом $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ обозначено пространство всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций с носителем, компактным в Ω. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой связной границей, $n \geq 2$, $1 < p < \infty$. Для всякого слабого решения уравнения Лапласа $u \in L_p(\Omega)$ найдется последовательность гармонических многочленов $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \|u - h_m\|_{L_p(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. Через $\mathcal{H}_p(\Omega)$ обозначим замыкание в $L_p(\Omega)$ подпространства всех гармонических многочленов. И пусть

$$\widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \left\{u \in L_p(\Omega) : \int_\Omega (u, \Delta\psi)dx = 0 \ \ \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)\right\}$$

есть подпространство слабых решений уравнения Лапласа в области Ω. Очевидно, что $\mathcal{H}_p(\Omega) \subset \widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)$. Теорема будет доказана, если установить обратное включение $\widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega) \subset \mathcal{H}_p(\Omega)$. Для этого введем обозначение

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{f = \Delta v : v \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)\}, \tag{2.1}$$

где пространство Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega)$ определено как замыкание в $W_p^2(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$, что для ограниченной области Ω обеспечивает замкнутость в $L_p(\Omega)$ подпространства $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega)$, определенного в (2.1) как область значений оператора Лапласа Δ: $\overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega) \to L_p(\Omega)$.

Нетрудно убедиться, что при $1 < p < \infty$ подпространство $\widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)$ замкнуто в $L_p(\Omega)$. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)^\perp &= \overset{\circ}{\mathcal{D}}_{p'}(\Omega), \\ \overset{\circ}{\mathcal{D}}_p(\Omega)^\perp &= \widehat{\mathcal{H}}_{p'}(\Omega), \end{aligned} \qquad p' = p/(p-1), \quad 1 < p < \infty,$$

где символом $X^\perp$ обозначен аннулятор подпространства $X \subset L_p(\Omega)$. Отметим (см. [4, разд. 4.5–6)], что при $1 < p < \infty$ аннулятор подпространства $X \subset L_p(\Omega)$ будет сильно замкнутым подпространством в $L_{p'}(\Omega)$ с сопряженным показателем $p' = p/(p-1)$.

По определению ограниченный сферой S_R открытый шар $B_R \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ содержит замыкание $\overline{\Omega}$ области Ω. С помощью растяжений и усреднений легко проверить, что $\widehat{\mathcal{H}}_p(B_R)$ совпадает с замыканием в $L_p(B_R)$ его подпространства

$$\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R) = \{u \in C^\infty(\overline{B}_R) : \Delta u = 0\}.$$

Используя ортогональное разложение гармонических функций в $L_2(B_R)$ по сферическим гармоникам (см. [5], [6]), легко убедиться, что любой элемент подпространства $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ аппроксимируется гармоническими многочленами в норме пространства Соболева $W_2^l(B_R)$ для любого $l \geq n/2$, а значит, и в норме $L_p(B_R)$ при $p \in (1,\infty)$ в силу вложения $W_2^l(B_R)$ в $C(\overline{B}_R)$. Это означает совпадение подпространств $\widehat{\mathcal{H}}_p(B_R) = \mathcal{H}_p(B_R)$ при любом $p \in (1,\infty)$.

Теорема будет доказана, если убедиться, что замыкание в $L_p(\Omega)$ подпространства сужений на Ω функций из $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ совпадает с $\widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)$ при любом значении $p \in (1,\infty)$. Предположим противное. Тогда для некоторого $p \in (1,\infty)$ в силу теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $L_p(\Omega)$ найдутся ненулевые элементы $f \in L_{p'}(\Omega)$ и $v \in \widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_\Omega f(x)v(x)dx = 1, \quad \int_\Omega f(x)u(x)dx = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R). \tag{2.2}$$

Доопределяя $f = f(x)$ нулем в точках $x \in B_R\backslash\Omega$, получаем функцию $f \in L_{p'}(B_R)$, удовлетворяющую условию

$$\int_{B_R} f(x)u(x)dx = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R),$$

которое означает, что $f \in \mathcal{H}_p(B_R)^\perp = \mathring{\mathfrak{D}}_{p'}(B_R)$ и найдется такая функция $w \in \mathring{W}{}^2_{p'}(B_R)$, что $f(x) = \Delta w(x)$ почти всюду в B_R. При этом для области $B_R\backslash\overline{\Omega}$ функция w оказывается решением однородной задачи Коши

$$\begin{gathered} \Delta w = 0, \quad x \in B_R\backslash\overline{\Omega}, \\ w|_{r=R} = \partial_r w|_{r=R} = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где ∂_r – производная по нормали к ∂B_R. А ввиду связности открытого множества $B_R\backslash\overline{\Omega}$,, единственное решение однородной задачи Коши для оператора Лапласа может быть только нулевым на $B_R\backslash\overline{\Omega}$, т.е. функция $w \in \mathring{W}{}^2_{p'}(B_R)$ будет тождественным нулем $w = 0$ на $B_R\backslash\overline{\Omega}$.. Последнее означает, что $w \in \mathring{W}{}^2_{p'}(\Omega)$, так как граница $\partial\Omega$ липшицева (подробности см. в [7]). Но тогда $f = \Delta w \in \mathring{\mathfrak{D}}_{p'}(\Omega) = \widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)^\perp$, что противоречит левому из двух равенств (2.2), так как $v \in \widehat{\mathcal{H}}_p(\Omega)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Функцию $u \in W_p^1(\Omega)$ будем называть слабым решением уравнения Лапласа в области Ω, если

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\psi dx = 0 \quad \forall\psi \in \mathring{C}^\infty(\Omega),$$

где точка означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$. Для таких функций справедлива следующая теорема об аппроксимации гармоническими многочленами в норме пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с липшицевой связной границей, $n \geq 2$, $1 < p < \infty$. Если $u \in W_p^1(\Omega)$ – слабое решение уравнения Лапласа в Ω, то найдется последовательность гармонических многочленов $\{h_m\}_{m=1}^\infty$ такая, что*

$$\lim_{m\to\infty} \|u - h_m\|_{W_p^1(\Omega)} = 0.$$

Доказательство теоремы существенно облегчила бы формальная отсылка к известному $\mathbf{L}_p$-разложению Гельмгольца–Вейля–Соболева. Но в рассматриваемом общем случае связной липшицевой границы $\partial\Omega$ это разложение известно только для достаточно малой окрестности значений показателя $p = 2$, расширение которой требует, вообще говоря, значительных дополнительных ограничений на $\partial\Omega$, заведомо лишних для доказываемой теоремы. Избежать лишних ограничений на связную липшицеву $\partial\Omega$ позволит использование лишь двух из трех компонент, участвующих в $\mathbf{L}_p$-разложении Гельмгольца—Вейля—Соболева, что потребует введения дополнительных обозначений.

Сначала введем вспомогательную ограниченную область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ с липшицевой связной границей. Через $\mathbf{L}_p(\Omega)$ обозначим пространство Лебега векторных полей $\mathbf{v}: \Omega \to \mathbb{R}^n$, и пусть $\mathring{\mathbf{G}}^\infty(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ – подпространства бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω потенциальных и соленоидальных векторных полей соответственно, т.е.

$$\mathring{\mathbf{G}}^\infty(\Omega) = \{\nabla u : u \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\}, \quad \mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{C}}^\infty(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}.$$

Замыкания подпространств $\mathring{\mathbf{G}}^\infty(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$ в пространстве Лебега $\mathbf{L}_p(\Omega)$ обозначим через $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ соответственно. При этом для ограниченной области Ω с липшицевой связной границей $\partial\Omega$ имеем эквивалентное определение

$$\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) = \{\nabla u : u \in \mathring{W}^1_p(\Omega)\},$$

где пространство Соболева $W^1_p(\Omega)$ определено как замыкание в $W^1_p(\Omega)$ его подпространства $\mathring{C}^\infty(\Omega)$. В общем случае обычно вводится еще одно, не всегда эквивалентное, определение подпространства $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ (см. [8]), но в рассматриваемом здесь простейшем случае ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ со связной липшицевой границей в этом нет необходимости.

Вышеупомянутая пара компонент $\mathbf{L}_p$-разложения Гельмгольца—Вейля—Соболева – это замкнутые в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ подпространства $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$. Сразу же заметим, что их алгебраическая сумма $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) + \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ будет прямой, т.е. их пересечение тривиально: $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega) = \{0\}$, что в случае ограниченной Ω почти очевидно, так как открытое множество $\Omega' \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ не пусто, а всякое $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) \cap \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ представимо в виде $\mathbf{v} = \nabla u$ с некоторой $u \in \mathring{W}^1_p(\Omega)$.

Доопределяя $u \in \mathring{W}^1_p(\Omega)$ нулем на все $\mathbb{R}^n$ с сохранением класса W^1_p и не меняя обозначений, будем без ограничения общности считать, что $u \in W^1_p(\mathbb{R}^n)$, где $u \subset \overline{\Omega}$. Принадлежность $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ означает интегральное тождество

$$\int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla\psi dx = 0 = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla\psi dx \quad \psi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^n),$$

в силу которого гармоническая в $\mathbb{R}^n$ функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равняясь нулю вне Ω, может быть только тождественным нулем в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, $\mathbf{v} \equiv 0$ и пересечение подпространств $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ тривиально при любом значении показателя $p \in (1, \infty)$.

Проверим теперь, что прямая алгебраическая сумма $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) + \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ замкнутых подпространств $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ будет замкнутым подпространством в $\mathbf{L}_p(\Omega)$. Для этого достаточно установить существование такой постоянной $C > 0$, что

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} \le C \|\nabla u + \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} \quad \forall u \in \mathring{W}^1_p(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega). \tag{2.4}$$

С этой целью, полагая $\mathbf{f} \overset{\text{def}}{=} \nabla u + \mathbf{v}$ и сохраняя прежние обозначения, доопределим $u \in \mathring{W}^1_p(\Omega)$, $\mathbf{v} \in (\Omega)$ и $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_p(\Omega)$ нулем вне ограниченной области Ω. При этом получим $\nabla u \in \mathring{\mathbf{G}}_p(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}_p(\mathbb{R}^n)$ в силу определения $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ как замыканий в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ подпространств $\mathring{\mathbf{G}}^\infty(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}^\infty(\Omega)$, тогда как носители элементов u, $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}$ окажутся подмножествами замыкания $\overline{\Omega}$. В таком случае почти всюду в $\mathbb{R}^n$ будет выполняться равенство $\nabla u(x) + \mathbf{v}(x) = \mathbf{f}$, преобразование Фурье которого с учетом принадлежности $\mathbf{v} \in \mathring{\mathbf{J}}_p(\mathbb{R}^n)$ приводит к равенствам

$$i\xi\hat{u}(\xi) + \hat{\mathbf{v}}(\xi) = \hat{\mathbf{f}}(\xi), \quad \xi \cdot \hat{\mathbf{v}}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где крышечка означает преобразование Фурье, т.е.

$$\hat{u}(\xi) = F[u(x)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-i\xi\cdot x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

При этом компактность носителей элементов u, $\mathbf{v}$, $\mathbf{f}$ означает непрерывность на всем $\mathbb{R}^n$ их образов Фурье $\hat{u}$, $\hat{\mathbf{v}}$, $\hat{\mathbf{f}}$. Из (2.5) легко находим

$$i\xi_j\hat{u}(\xi) = \xi_j\frac{\xi\cdot\hat{\mathbf{f}}(\xi)}{|\xi|^2}, \quad v_j(\xi) = f_j(\xi) - \xi_j\frac{\xi\cdot\hat{\mathbf{f}}(\xi)}{|\xi|^2} \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1,\dots,n,$$

где $\hat{\mathbf{f}} = (\hat{f}_1,\dots,\hat{f}_n)$, откуда следует представление

$$\nabla u = \mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{f}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{f}) \tag{2.6}$$

слагаемых ∇u и $\mathbf{v}$ через их сумму $\mathbf{f}$ с помощью вектор-оператора

$$\mathbf{R}\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad \mathbf{R} = (R_1,\dots,R_n), \quad 1 < p < \infty,$$

компонентами которого $R_j\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ служат ограниченные на $L_p(\mathbb{R}^n)$ преобразования Рисса

$$R_jw = F^{-1}\left[\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{w}\right], \quad \widehat{R_jw} = \frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{w}, \quad j = 1,\dots,n,$$

подробно описанные в [9]. Из представления (2.6) и ограниченности вектор-оператора $\mathbf{R}\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbf{L}_p(\mathbb{R}^n)$ при $1 < p < \infty$ вытекает справедливость неравенства (2.4) с некоторой постоянной $C > 0$, зависящей только от n и p. А тогда алгебраическая сумма $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) + \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ будет еще и прямой топологической суммой $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega) \oplus \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ замкнутых подпространств $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$.

Подпространство градиентов слабо гармонических функций в пространстве Лебега $\mathbf{L}_p(\Omega)$ обозначим через $\mathbf{I}_p(\Omega)$. Поскольку ограниченная область Ω имеет липшицеву границу, можно без ограничения общности полагать, что

$$\mathbf{I}_p(\Omega) = \left\{\nabla u\colon u \in W_p^1(\Omega), \int\limits_\Omega u(x)dx = 0, \int\limits_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi dx = 0 \ \ \forall\psi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\right\}.$$

Очевидно, определенное таким образом подпространство $\mathbf{I}_p(\Omega)$ будет замкнуто в пространстве Лебега $\mathbf{L}_p(\Omega)$.

Для завершения доказательства теоремы нам понадобятся еще два замкнутых в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ подпространства потенциальных и соленоидальных векторных полей

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_p(\Omega) = \{\nabla u\colon u \in W_p^1(\Omega)\},\\ \mathbf{J}_p(\Omega) = \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{L}_p(\Omega)\colon \int\limits_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\psi dx = 0 \ \ \forall\psi \in \mathring{C}^\infty(\Omega)\right\},\end{gathered} \tag{2.7}$$

которые служат аннуляторами подпространств $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$ и $\mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)$, т.е.

$$\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)^\perp = \mathbf{J}_{p'}(\Omega), \quad \mathring{\mathbf{J}}_p(\Omega)^\perp = \mathbf{G}_{p'}(\Omega), \quad p' = p/(p-1), \quad 1 < p < \infty, \tag{2.8}$$

где верхний индекс $\perp$ в обозначении сильно замкнутого подпространства в рефлексивном $\mathbf{L}_p(\Omega)$ превращает это подпространство в его сильно замкнутый в $\mathbf{L}_{p'}(\Omega)$ аннулятор (см. [4, с. 108, 109]).

Отметим, что первое из двух равенств (2.9) вытекает непосредственно из теоремы Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $\mathbf{L}_p(\Omega)$ и определения $\mathring{\mathbf{G}}_p(\Omega)$, тогда как второе принято считать очевидным следствием теоремы двойственности де Рама без каких бы то ни было требований к области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Однако для ограниченной области с липшицевой границей фундаментальная и необобщаемая теорема двойственности де Рама эквивалентна паре равенств, установленных в статье [8], а именно, следствию из теоремы 1 на с. 153 в совокупности с равенством (25) на с. 157.

Отметим также, что пересечение подпространств (2.7) легко вычисляется

$$\mathbf{G}_p(\Omega) \cap \mathbf{J}_p(\Omega) = \mathbf{I}_p(\Omega), \quad 1 < p < \infty, \tag{2.9}$$

так как принадлежность $\mathbf{v} \in \mathbf{G}_p(\Omega)$ означает, что $\mathbf{v} = \nabla u$ с некоторым $u \in W_p^1(\Omega)$, а принадлежность того же $\mathbf{v} \in \mathbf{J}_p(\Omega)$ означает выполнение условия

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi dx = 0 \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega),$$

откуда сразу же следует принадлежность $\mathbf{v} \in \mathbf{I}_p(\Omega)$, т.е. $\mathbf{G}_p(\Omega) \cap \mathbf{J}_p(\Omega) \subset \mathbf{I}_p(\Omega)$. Обратное включение следует из определения $\mathbf{I}_p(\Omega)$ как подпространства градиентов всех слабых решений уравнения Лапласа класса $W_p^1(\Omega)$.

Вычислим теперь аннулятор подпространства $\mathbf{I}_p(\Omega)$. Для этого заметим сначала, что в силу (2.8) и (2.9) аннулятор алгебраической суммы

$$(\overset{\circ}{\mathbf{G}}_p(\Omega) + \overset{\circ}{\mathbf{J}}_p(\Omega))^\perp = \overset{\circ}{\mathbf{G}}_p(\Omega)^\perp \cap \overset{\circ}{\mathbf{J}}_p(\Omega)^\perp = \mathbf{G}_{p'}(\Omega) \cap \mathbf{J}O_{p'}(\Omega) = \mathbf{I}_{p'}(\Omega),$$

откуда ввиду уже установленной при всех значениях показателя $p \in (1,\infty)$ замкнутости в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ его подпространства $\overset{\circ}{\mathbf{G}}_p(\Omega) + \overset{\circ}{\mathbf{J}}_p(\Omega)$ находим

$$\mathbf{I}_p(\Omega)^\perp = \overset{\circ}{\mathbf{G}}_{p'}(\Omega) + \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{p'}(\Omega) = \overset{\circ}{\mathbf{G}}_{p'}(\Omega) \oplus \overset{\circ}{\mathbf{J}}_{p'}(\Omega) \tag{2.10}$$

с сопряженным показателем $p' = p/(p-1) \in (1,\infty)$.

Наконец все готово для завершения доказательства теоремы. Через $\mathcal{H}^1_p(\Omega)$ обозначим замыкание в $W_p^1(\Omega)$ подпространства гармонических многочленов, а через $\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega)$ – подпространство слабых решений уравнения Лапласа в области Ω класса $W_p^1(\Omega)$, т.е.

$$\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega) = \left\{ u \in W_p^1(\Omega) : \int_\Omega (\nabla u, \nabla \psi) dx = 0 \quad \forall \psi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega) \right\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{H}^1_p(\Omega) \subset \widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega)$. Осталось доказать обратное включение, т.е. $\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega) \subset \mathcal{H}^1_p\Omega)$.

Для рассматриваемой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевой связной границей выберем и зафиксируем радиус $R > 0$ так, чтобы открытый шар $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ содержал замыкание $\overline{\Omega}$. С помощью растяжений и усреднений легко проверить, что $\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(B_R)$ совпадает с замыканием в $W_p^1(B_R)$ его подпространства гармонических функций $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$. А используя ортогональное разложение элементов $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ по сферическим гармоникам (см. [5], [6]), заключаем, что любой элемент подпространства $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ аппроксимируется гармоническими многочленами в норме пространства Соболева $W_2^l(B_R)$ для любого $l \geq 1$. Поэтому в силу вложения $W_2^l(B_R)$ в $W_p^1(B_R)$ при значениях $l \geq 1 + n/2$ любой элемент подпространства $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ аппроксимируется гармоническими многочленами в норме $W_p^1(B_R)$ с любым показателем $p \in (1,\infty)$. Последнее означает совпадение подпространств $\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(B_R) = \mathcal{H}^1_p(B_R)$ при любом $p \in (1,\infty)$.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что замыкание в $W_p^1(\Omega)$ подпространства сужений на Ω функций из $\mathcal{H}^\infty(\overline{B}_R)$ совпадает с $\widehat{\mathcal{H}}{}^1_p(\Omega)$ при любом $p \in (1,\infty)$, что эквивалентно совпадению замыкания в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ подпространства градиентов гармонических функций как элементов $\mathbf{I}_p(B_R)$ с подпространством $\mathbf{I}_p(\Omega)$. Предположим противное. Тогда для некоторого $p \in (1, \infty)$ по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала на $\mathbf{L}_p(\Omega)$ найдутся ненулевые элементы $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{p'}(\Omega)$ и $\mathbf{v} \in \mathbf{I}_p(\Omega)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx = 1, \quad \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{I}_p(B_R). \tag{2.11}$$

Доопределяя $\mathbf{f}$ нулем на $B_R \backslash \Omega$, получаем вектор-функцию $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{p'}(\Omega)$, удовлетворяющую условию

$$\int_{B_R} \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} dx = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{I}_p(B_R),$$

которое означает принадлежность

$$\mathbf{f} \in \mathbf{I}_p(B_R)^\perp = \mathring{\mathbf{G}}_{p'}(B_R) \oplus \mathring{\mathbf{J}}_{p'}(B_R).$$

А тогда доопределенная нулем вне Ω вектор-функция $\mathbf{f}$ должна иметь вид

$$\mathbf{f} = \nabla U + \mathbf{V}, \quad U \in \mathring{W}^{\,l}_{p'}(B_R), \quad \mathbf{V} \in \mathring{\mathbf{J}}_{p'}(B_R),$$

при условии $\mathbf{f} = 0$ на $B_R \backslash \Omega$, которое означает выполнение равенств $U = 0$ и $\mathbf{V} = 0$ вне области Ω.

Поскольку граница $\partial\Omega$ липшицева и $U \in \mathring{W}^{\,l}_{p'}(B_R)$, условие $U = 0$ вне Ω с липшицевой границей означает, что $U \in \mathring{W}^{\,l}_{p'}(\Omega)$ (см. [7]). В свою очередь, выполнение условия $\mathbf{V} = 0$ вне ограниченной области Ω с липшицевой границей для вектор-функции $\mathbf{V} \in \mathring{\mathbf{J}}_{p'}(B_R)$ означает, что $\mathbf{V} \in \mathring{\mathbf{J}}_{p'}(\Omega)$ (см. [8]). Таким образом, имеем

$$\mathbf{f} = \nabla U + \mathbf{V}, \quad U \in W^1(\Omega), \quad \mathbf{V} \in \mathring{J}_{p'}(\Omega),$$

что означает равенство нулю первого из двух интегралов (2.11), тогда как он равен единице. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. В доказательствах теорем 1 и 2 шар B_R можно заменить любой ограниченной областью $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой связной границей такой, что $\overline{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}$, например параллелепипедом. При этом гармонические в $\widetilde{\Omega}$ функции могут дополнительно удовлетворять любым локально корректным краевым условиям (Дирихле, Неймана или третьему краевому) на одной или нескольких частях границы $\partial\widetilde{\Omega}$, но не на всей $\partial\widetilde{\Omega}$. Такой подход принципиально упрощает технику построения в явном виде, возможно, более подходящего для заданной области Ω аппроксимативного базиса из гармонических функций (не обязательно многочленов), который, учитывая форму области Ω, обеспечит более эффективную реализацию аналитико-численных методов решения корректно поставленных краевых задач для уравнения Лапласа в заданной области Ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Browder F.E.* Approximation by solutions of partial differential equations // Am. J. Math. 1962. V. 84. P. 134–160.
2. *Browder F.E.* Functional analysis and partial differential equations. 2 // Math. Ann. 1962. V. 145. P. 81–226.
3. *Singer I.* Bases in Banach Spaces, vol. 2. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1981.
4. *Рудин У.* Функциональнцй анализ. М.: Мир, 1975.
5. *Axler A., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic functions theory (2nd ed.). New York: Springer, 2001.
6. *Efthimou C., Frye Ch.* Spherical Harmonics in p Dimensions. Hackensack, NJ: World Scientific Publ. Co., 2014.
7. *Буренков В.И.* О приближении функций из пространства $W_p^r(\Omega)$ финитными функциями для произвольного открытого множества Ω // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 1974. Т. 131. С. 51–63.
8. *Масленникова В.Н., Боговский М.Е.* Аппроксимация потенциальных и соленоидальных векторных полей // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24. № 5. С. 149–171.
9. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций М.: Мир, 1973.