

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ МАСКИРОВКИ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА¹⁾

© 2021 г. Г. В. Алексеев^{1,*}, Ю. Э. Спивак^{1,2}

¹ 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН, Россия

² 690091 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный федеральный университет, Россия

*e-mail: alekseev@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 26.06.2020 г.

Переработанный вариант 26.06.2020 г.

Принята к публикации 16.09.2020 г.

Формулируются обратные задачи для трехмерной модели магнитостатики, возникающие при проектировании осесимметричных многослойных экранирующих и маскировочных устройств. В предположении, что проектируемое устройство состоит из конечного числа сферических слоев, каждый из которых заполнен однородной изотропной средой, предлагается численный алгоритм решения указанных задач, основанный на оптимизационном методе. С его помощью рассматриваемые обратные задачи сводятся к конечномерным экстремальным задачам, роль управлений в которых играют магнитные проницаемости каждого элементарного слоя. Для нахождения искомых управлений применяется метод роя частиц. На основе анализа проведенных вычислительных экспериментов показывается, что полученным оптимальным решениям отвечают маскировочные устройства, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе устройств и простотой технической реализации. Библ. 30. Фиг. 1. Табл. 7.

Ключевые слова: обратные задачи, метод оптимизации, метод роя частиц, магнитная маскировка.

DOI: 10.31857/S0044466921020034

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется разработке методов решения задач маскировки материальных тел. Начало указанному направлению было положено в работах [1]–[3], в которых авторы цитированных работ разработали оригинальный метод, получивший название “transformation optics” (ТО-подход). Указанный метод основан на установленных в [1], [4] и ряде других работ свойстве инвариантности уравнений Максвелла относительно определенных преобразований координат. Позже этот метод был распространен на акустические [5] и статические (тепловые, электрические и магнитные) поля [6]–[9]. Близкие обратные задачи восстановления диэлектрической или магнитной проницаемости тела, помещенного в прямоугольный волновод, изучались в [10], [11].

Нужно отметить, что полученные в цитируемых работах решения задач маскировки обладают рядом недостатков. Главным недостатком является трудность технической реализации полученных решений. По этой причине в последние годы стала развиваться другая стратегия решения задач дизайна устройств невидимости. Она основана на использовании оптимизационного метода решения обратных задач. Начиная с фундаментальных работ А.Н. Тихонова [12], оптимизационный метод широко используется при решении прикладных обратных задач. Преимуществом оптимизационного метода по сравнению с другими является то, что его применение позволяет учесть априори многие из требований, касающиеся технической реализации искомых решений задач дизайна. Использованию оптимизационного метода для решения задач дизайна маскировки и других специальных функциональных устройств посвящен ряд работ. Отметим среди них статьи [13]–[19], в которых оптимизационный метод вместе с методом топологической оптимизации или методом роя частиц (в качестве метода численной оптимизации) приме-

¹⁾ Работа обоих авторов выполнена при поддержке государственного задания ИПМ ДВО РАН. Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-31-90039).

няется для численного решения задач дизайна устройств маскировки и концентрирования статических полей. Упомянем также работы [20]–[24], посвященные качественному анализу задач электромагнитной или тепловой маскировки на основе оптимизационного метода.

Оптимизационный метод применяется и в настоящей работе для решения обратных задач магнитной маскировки в рамках трехмерной осесимметричной модели магнитостатики. Указанные задачи заключаются в нахождении материальных параметров неоднородной среды, заполняющей материальную (маскировочную либо экранирующую) оболочку в виде сферического слоя, исходя из выполнения условий маскировки либо экранирования. В предположении, что исходная оболочка состоит из конечного числа элементарных сферических слоев, заполненных однородными изотропными средами, мы сведем указанные задачи к решению соответствующих конечномерных экстремальных задач, в которых постоянные магнитные проницаемости каждого слоя играют роль управляющих параметров. Для нахождения решений указанных экстремальных задач мы предложим численный алгоритм их решения, основанный на методе роя частиц [25], по схеме, используемой в заметке [16], и обсудим результаты вычислительных экспериментов для случая однородного внешне приложенного магнитного поля. На основе проведенного анализа мы покажем, что применение разработанного алгоритма позволяет спроектировать маскировочные или экранирующие слоистые оболочки, обладающие высокой маскировочной эффективностью даже при малом количестве слоев и простотой технической реализации.

2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ

Задача магнитной маскировки по своей структуре содержит три основные компоненты: область, где рассматривается физический процесс, внешне приложенное магнитное поле и материальную оболочку, служащую для маскировки материальных тел [26]. В трехмерных задачах магнитной маскировки роль основной области играет все пространство \mathbb{R}^3 , исходное внешне приложенное магнитное поле создается компактно распределенными источниками, либо источниками, расположенными в бесконечности, тогда как роль маскировочной оболочки играет область в виде сферического слоя $\Omega = \{a < r = |\mathbf{x}| < b\}$, заполненная неоднородной изотропной либо анизотропной (в общем случае) средой с переменной магнитной проницаемостью μ . Обозначим через Ω_i и Ω_e^∞ внутренность и внешность области Ω соответственно. Будем предполагать, что эти области Ω_i и Ω_e^∞ заполнены однородной изотропной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 (см. фиг. 1).

Обозначим через B_R шар $|\mathbf{x}| < R$ радиуса R , содержащий внутри себя области Ω_i и Ω (см. фиг. 1), и предположим, что за пределами шара B_R находятся внешние источники, создающие в частном случае, когда $\mu = \mu_0$ в Ω и, следовательно, все пространство \mathbb{R}^3 заполнено однородной средой с постоянной магнитной проницаемостью μ_0 , однородное поле $\mathbf{H}_a = -\text{grad } \Phi_a$. Оно описывается магнитным потенциалом Φ_a , сужение которого на шар B_R удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi_a = 0$ в B_R .

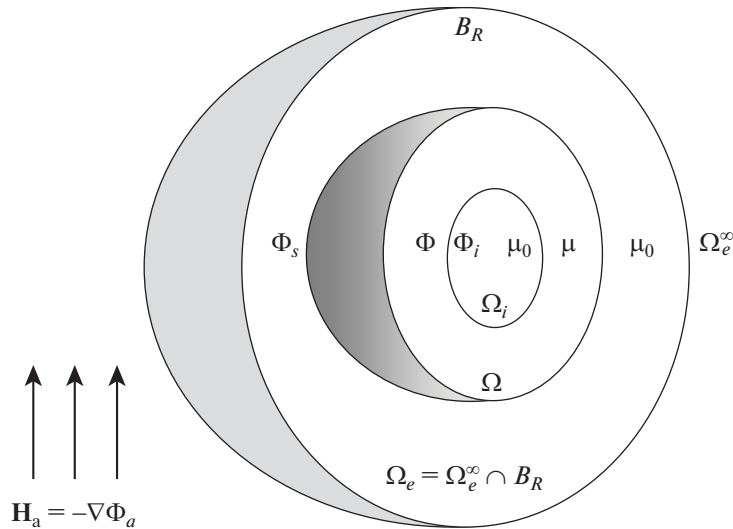
Наличие оболочки (Ω, μ) внутри B_R приводит к изменению поля Φ_a , в результате чего оно принимает вид $\tilde{\Phi} = \Phi_a + \tilde{\Phi}_s$. Здесь $\tilde{\Phi}_s$ – возмущение поля Φ_a , вызываемое внесением объекта (Ω, μ) в область B_R . Обозначим через Φ_i либо Φ сужения поля $\tilde{\Phi}$ на области Ω_i , либо Ω соответственно. Положим $\Phi_s = \tilde{\Phi}_s|_{\Omega_e^\infty}$. Введенные поля Φ_i в Ω_i , Φ в Ω и Φ_s в Ω_e^∞ являются решением следующей задачи сопряжения [23]:

$$\mu_0\Delta\Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \text{div}(\mu\nabla\Phi) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mu_0\Delta\Phi_s = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty, \tag{2.1}$$

$$\Phi_i = \Phi, \quad \mu_0 \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} = \mu \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \text{при } r = a, \tag{2.2}$$

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_s, \quad \mu \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial(\Phi_a + \Phi_s)}{\partial r} \quad \text{при } r = b, \tag{2.3}$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}) = o(1) \quad \text{при } r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \tag{2.4}$$



Фиг. 1. Схематическое изображение внешне приложенного магнитного поля и шара B_R , содержащего сферическую магнитную оболочку Ω .

Ниже будем ссылаться на (2.1)–(2.4) как на задачу магнитного рассеяния, а на Φ_s – как на рассеянное оболочкой (Ω, μ) поле.

В случае, когда μ – диагональный в сферических координатах r, θ, φ тензор, причем $\mu = \text{diag}(\mu_r, \mu_\theta, \mu_\varphi)$, где μ_r и μ_θ – заданные ограниченные положительные функции, задача (2.1)–(2.4) была исследована теоретически в работе [23]. В ней установлены достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование единственного слабого решения. В рассматриваемом нами в данной статье случае, когда μ – скалярная функция, описывающая переменную изотропную среду, заполняющую область Ω , указанные условия, обеспечивающие корректность задачи (2.1)–(2.4), имеют вид

$$\mu \in L^\infty(\Omega), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq \mu^0 = \text{const} > 0 \text{ в } \Omega, \quad \Delta\Phi_a = 0 \text{ в } B_R. \tag{2.5}$$

Как уже указывалось, основное внимание в этой статье будет уделено численному анализу обратных задач для модели (2.1)–(2.4), связанных с проектированием устройств маскировки материальных тел. Указанные задачи состоят в нахождении неизвестной магнитной проницаемости μ , исходя из условий маскировки. Чтобы сформулировать их, обозначим через $\tilde{\Phi}^\mu \equiv (\Phi_i^\mu, \Phi_s^\mu, \Phi_e^\mu)$ решение задачи (2.1)–(2.4), отвечающее проницаемости μ в Ω и проницаемости μ_0 в Ω_i и Ω_e^∞ . Ниже будем рассматривать общую и две частные обратные задачи маскировки. Общая обратная задача, называемая задачей полной магнитной маскировки, состоит в нахождении магнитной проницаемости μ среды, заполняющей область Ω , исходя из следующих двух независимых условий:

$$\nabla\Phi_i^\mu = 0 \quad (\text{т.е. } \Phi_i^\mu = \text{const}) \text{ в } \Omega_i, \quad \Phi_s^\mu = 0 \text{ в } \Omega_e^\infty. \tag{2.6}$$

Первое условие в (2.6) относится к поведению внутреннего поля Φ_i^μ (т.е. поля $\tilde{\Phi}^\mu$ внутри области Ω_i), тогда как второе условие в (2.6) описывает поведение рассеянного поля Φ_s^μ во внешности Ω_e^∞ . С учетом этого задачу нахождения проницаемости μ , исходя из выполнения первого условия в (2.6), принято называть задачей внутренней маскировки или задачей экранирования, тогда как задачу нахождения μ , исходя из выполнения второго условия в (2.6), называют задачей внешней маскировки [26]. На саму пару (Ω, μ) , обеспечивающую выполнение первого условия (либо обоих условий) в (2.6), будем ссылаться как на экранирующую (либо маскировочную) оболочку.

Ниже мы будем предполагать, исходя из условий простоты технической реализации проектируемых с помощью оптимизационного метода оболочек, что искомая оболочка Ω является слоистой и состоит из M сферических слоев $\Omega_m = \{R_{m-1} < r = |\mathbf{x}| < R_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, $R_0 = a$, $R_M = b$

одной и той же толщины $d = (b - a)/M$. Каждый из них заполнен однородной изотропной средой, магнитные свойства которой характеризуются постоянной магнитной проницаемостью $\mu_m > 0$, $m = 1, 2, \dots, M$. Последнее означает, что искомую магнитную проницаемость μ искомой оболочки (Ω, μ) следует искать в виде

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_m \chi_m(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Здесь $\chi_m(\mathbf{x})$ – характеристическая функция слоя Ω_m , равная 1 в Ω_m и 0 вне Ω_m , а μ_m , $m = 1, 2, \dots, M$ – неизвестные положительные константы, которые находятся, исходя из точного или приближенного выполнения одного или двух условий в (2.6). Отметим, что функция (2.7) удовлетворяет при любых $\mu_m > 0$ первым двум условиям в (2.5).

3. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОГО ВНЕШНЕ ПРИЛОЖЕННОГО ПОЛЯ

Аналогично [8] будем рассматривать ниже важный частный случай, когда внешнее приложенное магнитное поле \mathbf{H}_a постоянно во всем пространстве и направлено вдоль оси z . В этом случае, означая, что источники находятся в бесконечности, поле \mathbf{H}_a представимо в виде

$$\mathbf{H}_a = -\nabla\Phi_a \text{ в } \mathbb{R}^3, \quad \Phi_a = -H_a r \cos \theta, \quad H_a = |\mathbf{H}_a|. \tag{3.1}$$

Поскольку потенциал Φ_a , введенный в (3.1), и магнитная проницаемость μ , определенная в (2.7), удовлетворяют условиям (2.5) при любом $R > 0$, то точное решение $\tilde{\Phi} \equiv (\Phi_i, \Phi, \Phi_s)$ задачи (2.1)–(2.4), отвечающее упомянутой паре μ и Φ_a в (2.7) и (3.1) (мы опускаем для простоты верхний индекс μ в обозначении решения), существует и единственно. Более того, используя метод Фурье, указанное решение можно записать в явном виде. С этой целью обозначим через $\Phi_m \equiv \Phi|_{\Omega_m}$ сужение компоненты Φ решения $\tilde{\Phi}$ на подобласть $\Omega_m \subset \Omega$, $m = 1, 2, \dots, M$, и положим $\Phi_0 = \Phi_i$ в Ω_i , $\Phi_{M+1} = \Phi_a + \Phi_s$ в Ω_e^∞ . Простой анализ показывает, что отдельные компоненты Φ_m (мы будем ссылаться на них как на поля), позволяющие определить решение $\tilde{\Phi} = (\Phi_i, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_s)$ во всем пространстве \mathbb{R}^3 , представимы в виде

$$\Phi_0(r, \theta) = \alpha_0 r \cos \theta \text{ в } \Omega_i, \quad \Phi_{M+1}(r, \theta) = \Phi_a(r, \theta) + (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_e^\infty, \tag{3.2}$$

$$\Phi_1(r, \theta) = (\alpha_1 r + \beta_1/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_1, \quad \Phi_2(r, \theta) = (\alpha_2 r + \beta_2/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_2, \tag{3.3}$$

...

$$\Phi_M(r, \theta) = (\alpha_M r + \beta_M/r^2) \cos \theta \text{ в } \Omega_M. \tag{3.4}$$

Здесь константы $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m$, $m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} определяются из условий непрерывности смежных полей Φ_m и Φ_{m+1} на общих границах $r = R_m$, $m = 0, 1, \dots, M$, имеющих вид

$$\Phi_m = \Phi_{m+1}, \quad \mu_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} = \mu_{m+1} \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial r} \quad \text{при } r = R_m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (\mu_{M+1} = \mu_0). \tag{3.5}$$

Под Φ_m при $m = 0$ и $M + 1$ в (3.5) мы понимаем, соответственно, Φ_i и $\Phi_a + \Phi_s$.

Подставляя (3.2)–(3.4) в (3.5), приходим к следующей системе $2M + 2$ линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m$, $m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} :

$$-R_0^3 \alpha_0 + R_0^3 \alpha_1 + \beta_1 = 0, \quad -\mu_0 R_0^3 \alpha_0 + \mu_1 R_0^3 \alpha_1 - 2\mu_1 \beta_1 = 0, \tag{3.6}$$

$$R_1^3 \alpha_1 - R_1^3 \alpha_2 + \beta_1 - \beta_2 = 0, \quad \mu_1 R_1^3 \alpha_1 - \mu_2 R_1^3 \alpha_2 - 2\mu_1 \beta_1 + 2\mu_2 \beta_2 = 0, \tag{3.7}$$

...

$$R_m^3 \alpha_m - R_m^3 \alpha_{m+1} + \beta_m - \beta_{m+1} = 0, \tag{3.8}$$

$$\mu_m R_m^3 \alpha_m - \mu_{m+1} R_m^3 \alpha_{m+1} - 2\mu_m \beta_m + 2\mu_{m+1} \beta_{m+1} = 0, \quad m = 2, \dots, M - 1, \tag{3.9}$$

...

$$\begin{aligned} -R_M^3 \alpha_M - \beta_M + \beta_{M+1} &= H_a R_M^3, \\ -\mu_M R_M^3 \alpha_M + 2\mu_M \beta_M - 2\mu_0 \beta_{M+1} &= \mu_0 H_a R_M^3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Решив систему (3.6)–(3.10) относительно неизвестных коэффициентов α_0 , α_m , β_m , $m = 1, \dots, M$, и β_{M+1} и подставив найденные значения в (3.2)–(3.4), мы получим соответствующие поля $\Phi_i = \Phi_0$ в Ω_i , Φ_m в Ω_m , $m = 1, 2, \dots, M$, и $\Phi_s = \Phi_{M+1} - \Phi_a = (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$ в Ω_e^∞ , образующие искомое решение задачи (2.1)–(2.4). Ясно, что так полученные поля Φ_i , Φ_m и Φ_s зависят от постоянных проницаемостей $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$ слоев $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$. Поэтому рассматриваемые нами обратные задачи магнитной маскировки сводятся при выполнении условия (3.1) к поиску таких проницаемостей μ_1, \dots, μ_M , что соответствующее им решение $(\Phi_i, \Phi_1, \dots, \Phi_M, \Phi_s)$, определяемое формулами (3.2)–(3.4), удовлетворяет точно или приближенно одному или обоим условиям в (2.6).

В простейшем случае, когда число слоев M равно 2, соответствующее точное решение $(\Phi_i, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_s)$ определяется формулами (3.2), (3.3), в которых следует положить $M = 2$. Здесь неизвестные коэффициенты α_0 , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 и β_3 являются решением системы шести линейных алгебраических уравнений, состоящей из (3.6), (3.7) и (3.10), где следует положить $M = 2$. Из (3.2) вытекает, что первое (либо второе) условие в (2.6) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_0 = 0$ (либо $\beta_3 = 0$). Используя аналитический модуль пакета Wolfram Mathematica, точные выражения для коэффициентов α_0 и β_3 можно записать в виде

$$\alpha_0(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{\alpha_0}}{\Delta} = -\frac{27H_a\mu_0\mu_1\mu_2R_0^3R_1^3R_2^3}{\Delta}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \beta_3(\mu_1, \mu_2) = \frac{\Delta_{\beta_3}}{\Delta} = & \frac{H_aR_0^3R_2^3(\mu_0(3\mu_1\mu_2R_1^3(R_0^3 - R_2^3) - 2\mu_1^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \\ & + 2\mu_2^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3)) + 2\mu_1\mu_2(-\mu_2(R_0^3 + 2R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) - \mu_1(R_0^3 - R_1^3)(2R_1^3 + R_2^3)) + \\ & + \mu_0^2(\mu_1(2R_0^3 + R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \mu_2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 + 2R_2^3)))}{\Delta}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где определитель Δ системы (3.6), (3.7), (3.10) при $M = 2$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta = & R_0^3(2\mu_1\mu_2(-\mu_2(R_0^3 + 2R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) - \mu_1(R_0^3 - R_1^3)(2R_1^3 + R_2^3)) - \\ & - 2\mu_0^2(\mu_1(2R_0^3 + R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \mu_2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 + 2R_2^3)) + \mu_0(4\mu_1^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + \\ & + 2\mu_2^2(R_0^3 - R_1^3)(R_1^3 - R_2^3) + 3\mu_1\mu_2(2R_1^6 + 3R_1^3R_2^3 + 2R_0^3(R_1^3 + R_2^3))))). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.11) следует в предположении $\mu_0 > 0$, что $\alpha_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu_1 = 0$ (либо $\mu_2 = 0$). Подставляя $\mu_1 = 0$ в (3.12), выводим, что

$$\beta_3(0, \mu_2) = \beta_3 = \frac{H_aR_2^3(2\mu_2(R_1^3 - R_2^3) + \mu_0(R_1^3 + 2R_2^3))}{2\mu_2(R_1^3 - R_2^3) - 2\mu_0(R_1^3 + 2R_2^3)}. \quad (3.14)$$

Полагая $\beta_3 = 0$ в (3.14), получаем линейное уравнение относительно неизвестной проницаемости μ_2 . Его решение, обеспечивающее выполнение условия $\beta_3 = 0$, имеет вид

$$\mu_2 = \mu_2^0 \equiv \mu_0 \frac{2R_2^3 + R_1^3}{2(R_2^3 - R_1^3)}. \quad (3.15)$$

Из построения следует, что пара $(\mu_1, \mu_2) = (0, \mu_2^0)$ является искомым решением обратной задачи полной маскировки. Впервые указанное решение было приведено в [8]. Хотя построенное точное решение описывается простой формулой (3.15), его техническая реализация не представляется возможной (вследствие условия $\mu_1 = 0$) из-за отсутствия природных либо инженерных материалов с нулевой магнитной проницаемостью. Ввиду этого указанное решение $(0, \mu_2^0)$ называют сингулярным. Один из способов преодоления трудностей с технической реализацией решений задач магнитной маскировки состоит в замене исходных обратных задач соответствующими приближенными задачами и в применении для решения последних задач оптимизационных методов, позволяющих учесть требования, связанные с технической реализацией отыскиваемых решений. Этим мы займемся в следующем разделе.

4. ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО МЕТОДА.
 ФОРМУЛИРОВКА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Для решения сформулированных выше обратных задач мы применим оптимизационный метод [12]. В соответствии с этим методом обратные задачи магнитной маскировки заменяются соответствующими экстремальными задачами, которые адекватно отвечают рассматриваемым обратным задачам. Указанные задачи заключаются в минимизации определенных функционалов качества, зависящих от магнитных проницаемостей μ_1, \dots, μ_M отдельных слоев $\Omega_1, \dots, \Omega_M$. Чтобы сформулировать их, введем в рассмотрение M -мерный вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, на который мы будем ссылаться как на вектор магнитных проницаемостей, и определим ограниченное множество K в пространстве \mathbb{R}^M формулой

$$K = \{\mathbf{m} \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) : 0 < \mu_{\min} \leq \mu_j \leq \mu_{\max}, j = 1, 2, \dots, M\}. \tag{4.1}$$

На введенное множество K , где заданные положительные константы μ_{\min} и μ_{\max} определяют его нижнюю и верхнюю границы, будем ссылаться как на множество управлений. Напомним, что введение множества K по формуле (4.1) отвечает так называемой схеме коробки или схеме простых ограничений.

Введем переобозначение $\Phi[\mathbf{m}] = (\Phi_i[\mathbf{m}], \Phi[\mathbf{m}], \Phi_s[\mathbf{m}])$ для решения $\tilde{\Phi}^\mu \equiv (\Phi_i^\mu, \Phi^\mu, \Phi_s^\mu)$ задачи (2.1)–(2.4), отвечающего магнитной проницаемости μ в Ω , связанной с вектором $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M) \in K$ формулой (2.7). Кроме того, в аналогичной ситуации будем использовать обозначение (Ω, \mathbf{m}) для маскировочной оболочки вместо обозначения (Ω, μ) . Положим $\Omega_e = \Omega_e^\infty \cap B_R$.

Предполагая ниже, что вектор $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ принадлежит множеству управлений K , сформулируем следующие три экстремальные задачи:

$$J_i(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \tag{4.2}$$

$$J_e(\mathbf{m}) \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K, \tag{4.3}$$

$$J(\mathbf{m}) = 0.5[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] \rightarrow \inf, \quad \mathbf{m} \in K. \tag{4.4}$$

Здесь функционалы качества $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ определяются формулами

$$J_i(\mathbf{m}) = \frac{\|\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_i)}}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega)}}, \quad J_e(\mathbf{m}) = \frac{\|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}}, \quad J(\mathbf{m}) = 0.5[J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})]. \tag{4.5}$$

Напомним, в частности, что $\Phi_a = -H_a r \cos \theta$ – потенциал заданного внешне приложенного поля, а L^2 – нормы, входящие в (4.5), определяются формулами

$$\begin{aligned} \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_a|^2 dx, & \|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi_a|^2 dx, \\ \|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} |\Phi_s[\mathbf{m}]|^2 dx, & \|\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]|^2 dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Из вида функционала $J_i(\mathbf{m})$ следует, что условие $J_i(\mathbf{m}^*) = 0$ на некотором векторе $\mathbf{m}^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_M^*) \in K$ эквивалентно тому, что $\nabla\Phi_i[\mathbf{m}^*] = 0$ в Ω_i . Это означает, что отвечающая вектору \mathbf{m}^* в силу формулы (2.7) проницаемость

$$\mu^*(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M \mu_m^* \chi_m(\mathbf{x})$$

является решением задачи экранирования. Аналогично, условие $J_e(\mathbf{m}^*) = 0$ эквивалентно тому, что рассеянное поле $\Phi_s^{\mu^*} \equiv \Phi_s[\mathbf{m}^*]$ обращается в нуль всюду в подобласти $\Omega_e \equiv \Omega_e^\infty \cap B_R$ области Ω_e^∞ . Отсюда вытекает в силу принципа единственного продолжения гармонической в Ω_e^∞ функции $\Phi_s^{\mu^*}$, что $\Phi_s^{\mu^*} = 0$ всюду в Ω_e^∞ . Последнее эквивалентно тому, что проницаемость μ^* является

решением задачи внешней маскировки. Наконец, условие $J(\mathbf{m}^*) \equiv 0.5[J_i(\mathbf{m}^*) + J_e(\mathbf{m}^*)] = 0$ означает, что проницаемость μ^* является решением задачи полной маскировки.

Способность проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) экранировать либо маскировать материальные объекты характеризуется так называемой экранирующей либо маскировочной эффективностью. Количественно указанные характеристики описывают точность, с которой выполняются оба условия в (2.6), либо одно из этих условий. Простой анализ формул (4.5), (4.6) показывает, что введенные выше функционалы $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ имеют наглядный смысл среднеквадратичных интегральных ошибок выполнения первого, второго или обоих условий маскировки в (2.6) на векторе $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$.

Из сказанного вытекает, что для оценки экранирующей либо маскировочной эффективности проектируемой оболочки (Ω, \mathbf{m}) следует использовать именно значения $J_i(\mathbf{m})$, $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$ функционалов J_i , J_e и J . Так, маскировочную эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) следует оценивать при помощи значения $J(\mathbf{m})$, которое связано с ней обратной зависимостью: чем меньше значение $J(\mathbf{m})$, тем выше маскировочная эффективность оболочки (Ω, \mathbf{m}) , и наоборот. В частности, условие $J(\mathbf{m}^*) = 0$ для некоторого $\mathbf{m}^* \in K$, математически эквивалентное тому, что \mathbf{m}^* является точным решением задачи полной маскировки, физически означает, что соответствующая маскировочная оболочка обладает наивысшей маскировочной эффективностью.

Но нужно отметить, что введенный в (4.5) функционал $J \equiv 0.5(J_i + J_e)$ необходимо удовлетворяет условию $J(\mathbf{m}) > 0$ для всех $\mathbf{m} \in K$, где K — любое ограниченное множество, введенное в (4.1). Фактически это вытекает из того известного в теории маскировки факта (см., например, [9], [26]), что проницаемость μ , обеспечивающая точный маскировочный эффект, и, следовательно, отвечающая в силу (2.7) вектору $\mathbf{m} \in K$, для которого $J(\mathbf{m}) = 0$, необходимо должна принимать сингулярные (например, нулевые) значения в некоторых точках множества $\bar{\Omega}$. В то же время проницаемость $\mu(\mathbf{x})$, определенная формулой (2.7), является регулярной положительной в $\bar{\Omega}$ функцией для любого вектора $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ с положительными μ_m . Поэтому наша цель при решении, например, задачи (4.4) при заданном множестве K будет заключаться в том, чтобы найти вектор проницаемостей (оптимальное решение задачи (4.4)) $\mathbf{m}^{\text{opt}} \in K$, на котором функционал J принимает минимальное на множестве K значение $J^{\text{opt}} = J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$, а следовательно, спроектированная оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$ обладает максимальной (на множестве K) маскировочной эффективностью. На аналогичные цели направлены задачи (4.2) и (4.3).

Для реализации указанных целей мы применим численный алгоритм, основанный на методе роя частиц (МРЧ) [25]. Напомним, что МРЧ был предложен в 1995 г. в работе [27]. Он не использует значений производных от минимизируемого функционала, является достаточно универсальным и простым при численной реализации. Поэтому в последнее время этот метод широко применяется при решении большого класса обратных и экстремальных задач в различных областях науки и техники. Указанный метод применялся, в частности, в статьях [15]–[18] при численном решении двумерной и трехмерной задач статической маскировки при помощи оболочек, состоящих из однородных изотропных (либо анизотропных, в общем случае) материалов. Мы будем использовать МРЧ по схеме, подробно описанной в заметке [16]. Из нее следует, что основную роль в описанном выше алгоритме играет вычисление значений $J(\mathbf{m})$ минимизируемого функционала J для конкретного вектора $\mathbf{m} \in K$, моделирующего положения конкретных частиц, составляющих используемый рой. С учетом особенностей предложенного выше метода решения прямой задачи магнитной маскировки указанная процедура состоит из двух этапов.

На первом этапе мы находим компоненты α_0 и β_{M+1} решения системы (3.6)–(3.10) для конкретного вектора $\mathbf{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ с использованием пакета Matlab R2019a и, подставив найденные значения α_0 и β_{M+1} в формулы (3.2), содержащие поля $\Phi_i \equiv \alpha_0 r \cos \theta$ и $\Phi_s \equiv (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$, находим внутреннее и рассеянное поля $\Phi_i[\mathbf{m}] = \alpha_0 r \cos \theta$ и $\Phi_s[\mathbf{m}] = (\beta_{M+1}/r^2) \cos \theta$, отвечающие конкретному вектору \mathbf{m} . Далее мы подставляем найденные выражения $\Phi_i[\mathbf{m}]$ и $\Phi_s[\mathbf{m}]$ в (4.5) и вы-

числяем соответствующие интегралы, определяющие нормы, входящие в (4.6), с помощью следующих аналитических формул:

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi_a|^2 dx = \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\nabla\Phi_a|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R_0^3 H_a^2, \\ \|\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \int_{\Omega_i} |\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]|^2 dx = \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi \alpha_0^2 R_0^3, \\ \|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{\Omega_e} \Phi_a^2 dx = H_a^2 \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^4 \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi = H_a^2 \pi \frac{4(R_{M+1}^5 - R_M^5)}{15}, \\ \|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2 &= \int_{R_M}^{R_{M+1}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\beta_{M+1})^2 / r^2] \cos^2\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi\beta_{M+1}^2(R_{M+1} - R_M)}{3R_M R_{M+1}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} J_i(\mathbf{m}) &= \sqrt{\frac{\|\nabla\Phi_i[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_i)}^2}{\|\nabla\Phi_a\|_{L^2(\Omega_i)}^2}} = \frac{\alpha_0}{H_a}, \\ J_e(\mathbf{m}) &= \sqrt{\frac{\|\Phi_s[\mathbf{m}]\|_{L^2(\Omega_e)}^2}{\|\Phi_a\|_{L^2(\Omega_e)}^2}} = \frac{\beta_{M+1}}{H_a} \sqrt{\frac{5(R_{M+1} - R_M)}{R_M R_{M+1} (R_{M+1}^5 - R_M^5)}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$J(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} [J_i(\mathbf{m}) + J_e(\mathbf{m})] = \frac{\alpha_0}{2H_a} + \frac{\beta_{M+1}}{2H_a} \sqrt{\frac{5(R_{M+1} - R_M)}{R_M R_{M+1} (R_{M+1}^5 - R_M^5)}}. \quad (4.9)$$

Здесь R_0, R_1, \dots, R_M – величины (радиусы сфер), введенные в (3.5), $R_{M+1} = R$.

Важно отметить, что все приведенные выше интегралы вычисляются точно, поэтому этот этап не вносит дополнительной ошибки в процедуру нахождения решения. Это важно в вычислительном плане, поскольку рассматриваемые обратные задачи относятся к классу некорректных задач. Тем не менее с учетом плохой обусловленности системы (3.6)–(3.10) в общем случае задание ее коэффициентов, нахождение решения и все другие расчеты производились с достаточно высокой точностью, обеспечиваемой правилами пакета Matlab R2019a.

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Обсудим здесь некоторые результаты по численному решению рассматриваемых задач магнитной маскировки с использованием метода роя частиц (МРЧ). Численное моделирование проводилось для следующих исходных данных:

$$a = 0.035 \text{ м}, \quad b = 0.05 \text{ м}, \quad \mu_0 = 1, \quad R = 0.7 \text{ м}. \quad (5.1)$$

Внешне приложенное магнитное поле имеет вид (3.1). Основное внимание мы уделим анализу вычислительных экспериментов по решению задачи экранирования (4.2) либо задачи полной маскировки (4.4).

Напомним, что параметр R входит в виде R_{M+1} в формулы (4.8), (4.9) для вычисления $J_e(\mathbf{m})$ и $J(\mathbf{m})$. Анализ этих формул в сравнении с (2.6) показывает, что чем больше R , тем больше информации об условии $\Phi_s = 0$ в Ω_e^∞ , входящем в (2.6), учитывается в выражениях (4.8), (4.9). Отсюда следует, что точность решения задач внешней и полной маскировки должна увеличиваться с увеличением R . Этот же факт подтвердили численные эксперименты, проводимые (в случае, когда $a = 0.035$ м, $b = 0.05$ м) при разных значениях R , равных 0.07, 0.1, 0.15 и 0.7 м, причем дальнейшее увеличение R не приводило к сколь-нибудь заметным различиям в результатах. По этой причине приводимые ниже результаты расчетов относятся именно к значению $R = 0.7$ м в (5.1).

Анализ большого количества проведенных вычислительных экспериментов по решению задачи (4.2) позволил выявить весьма интересную тенденцию в поведении компонент μ_m^{opt} ее опти-

мального решения $\mathbf{m}^{\text{opt}} = (\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}}, \dots, \mu_M^{\text{opt}})$. Оказалось (при определенных условиях на исходные данные задачи (4.2)), что оптимальные значения μ_m^{opt} всех параметров μ_m с нечетными индексами $m = 1, 3, 5, \dots, M - 1$ совпадают с одной из границ μ_{\min}, μ_{\max} множества управлений K , тогда как оптимальные значения $\mu_2^{\text{opt}}, \mu_4^{\text{opt}}, \dots, \mu_M^{\text{opt}}$ остальных параметров (с четными индексами) совпадают с другой границей. Таким образом, выполняются соотношения:

$$\mu_1^{\text{opt}} = \mu_3^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-1}^{\text{opt}} = \mu_{\min}, \quad \mu_2^{\text{opt}} = \mu_4^{\text{opt}} = \dots = \mu_M^{\text{opt}} = \mu_{\max}, \quad (5.2)$$

либо

$$\mu_1^{\text{opt}} = \mu_3^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-1}^{\text{opt}} = \mu_{\max}, \quad \mu_2^{\text{opt}} = \mu_4^{\text{opt}} = \dots = \mu_M^{\text{opt}} = \mu_{\min}. \quad (5.3)$$

Следуя [17], [18], мы будем ссылаться на (5.2) (либо на (5.3)) как на соотношения чередующегося дизайна 1-го (либо 2-го) типа. Напомним, что под термином “чередующийся дизайн” в теории маскировки понимаю решение в виде слоистой оболочки, состоящей из конечного числа слоев, заполненных чередующимися (по слоям) материалами с большим (определенным) отношением параметров указанных материалов [6]. Указанное отношение принято называть их контрастом. Одним из условий, обеспечивающих выполнение условия (5.2) (либо (5.3)), является условие

$$\mu_0^2 - \mu_{\min}\mu_{\max} \geq 0. \quad (5.4)$$

Из (5.2) (либо (5.3)) следует, что для соответствующего оптимального решения $\mathbf{m}^{\text{opt}} \equiv (\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}}, \dots, \mu_M^{\text{opt}})$ задачи (4.2) справедлив аналог так называемого свойства bang-bang. Согласно этому свойству каждая компонента μ_m^{opt} оптимального решения принимает одно из двух значений μ_{\min}, μ_{\max} , являющихся границами множества K [28]. Как мы увидим ниже, именно это свойство играет основополагающую роль для получения легко реализуемых решений рассматриваемых задач.

Обсудим теперь результаты решения задачи экранирования (4.2) для трех конкретных тестов, отвечающих следующим трем парам (μ_{\min}, μ_{\max}) :

$$1) (0.025, 40), \quad 2) (0.0045, 40) \quad \text{и} \quad 3) (0.0045, 70). \quad (5.5)$$

Отметим, что все введенные в (5.5) значения, кроме $\mu_{\min} = 0.025$, отвечают магнитным проницаемостям известных материалов. Например, значение $\mu = 40$ описывает относительную магнитную проницаемость закаленной нержавеющей стали, значение $\mu = 70$ отвечает магнитной проницаемости кобальта, тогда как значение $\mu = 0.0045$ отвечает известному метаматериалу под названием “сверхпроводник SuperPower SCS12050” [29], [30], который широко используется в приложениях. Подчеркнем, что все пары в (5.5) удовлетворяют условию (5.4).

Результаты решения с помощью МРЧ задачи (4.2) для первой пары (μ_{\min}, μ_{\max}) в (5.5) с контрастом $\mu_{\max}/\mu_{\min} = 40/0.025 = 1600$ для четных значений M , изменяющихся от 2 до 16, приведены в табл. 1. Она содержит оптимальные значения $\mu_1^{\text{opt}}, \mu_M^{\text{opt}}$ магнитных проницаемостей первого и последнего слоев, совпадающие в силу (5.3) с μ_{\max} и μ_{\min} соответственно, и оптимальные значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ функционала $J_i(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}} \equiv (\mu_{\max}, \mu_{\min}, \mu_{\max}, \dots, \mu_{\min})$, вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ (для сравнения) для четных значений M , изменяющихся от 2 до 16. Остальные значения управлений $\mu_m^{\text{opt}}, m = 2, 3, \dots, M - 1$, определяются из соотношений (5.3), где следует положить $\mu_{\min} = 0.025, \mu_{\max} = 40$. Анализ табл. 1 показывает, что при изменении M от 2 до 16 значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ изменяются в пределах от 2.16×10^{-2} до значения 1.28×10^{-4} , которое соответствует невысокой экранирующей эффективности.

Из общих соображений (см. детали в [18]) следует, что для повышения экранирующей эффективности следует увеличить контраст μ_{\max}/μ_{\min} . Этого можно добиться как за счет уменьшения μ_{\min} , так и за счет увеличения μ_{\max} . Полагая в соответствии со вторым сценарием в (5.5) $\mu_{\min} = 0.0045, \mu_{\max} = 40$, чему соответствует контраст $\mu_{\max}/\mu_{\min} = 8888.9$, и применяя МРЧ к задаче (4.2), мы получаем результаты, приведенные в табл. 2, которая является аналогом табл. 1 для

Таблица 1. Задача экранирования: $\mu_{\min} = 0.025$, $\mu_{\max} = 40$, $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	40	0.025	2.16×10^{-2}	1.14×10^{-2}	1.18×10^{-3}
4	40	0.025	2.77×10^{-3}	1.83×10^{-3}	9.02×10^{-4}
6	40	0.025	8.46×10^{-4}	7.68×10^{-4}	6.91×10^{-4}
8	40	0.025	4.08×10^{-4}	4.69×10^{-4}	5.29×10^{-4}
10	40	0.025	2.55×10^{-4}	3.30×10^{-4}	4.06×10^{-4}
12	40	0.025	1.86×10^{-4}	2.48×10^{-4}	3.10×10^{-4}
14	40	0.025	1.50×10^{-4}	1.92×10^{-4}	2.34×10^{-4}
16	40	0.025	1.28×10^{-4}	1.51×10^{-4}	1.74×10^{-4}

Таблица 2. Задача экранирования: $\mu_{\min} = 0.0045$, $\mu_{\max} = 40$, $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	40	0.0045	4.14×10^{-3}	2.78×10^{-3}	1.41×10^{-3}
4	40	0.0045	1.10×10^{-4}	7.30×10^{-4}	1.35×10^{-3}
6	40	0.0045	7.97×10^{-6}	6.50×10^{-4}	1.29×10^{-3}
8	40	0.0045	1.08×10^{-6}	6.19×10^{-4}	1.24×10^{-3}
10	40	0.0045	2.25×10^{-7}	5.93×10^{-4}	1.19×10^{-3}
12	40	0.0045	6.46×10^{-8}	5.69×10^{-4}	1.14×10^{-3}
14	40	0.0045	2.36×10^{-8}	5.48×10^{-4}	1.10×10^{-3}
16	40	0.0045	1.04×10^{-8}	5.28×10^{-4}	1.06×10^{-3}

новой пары $(\mu_{\min}, \mu_{\max}) = (0.0045, 40)$. Она содержит оптимальные значения μ_1^{opt} , μ_M^{opt} магнитных проницаемостей первого и последнего слоев, совпадающие в силу (5.3) с μ_{\max} и μ_{\min} соответственно, и оптимальные значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ функционала $J_i(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}}$, вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$. Анализ табл. 2 показывает, что значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ изменяются в пределах от 4.14×10^{-3} до 1.04×10^{-8} при увеличении M от 2 до 16. В то же время значения $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$, приведенные в двух последних столбцах табл. 2, достаточно велики. Это, естественно, связано с тем, что мы минимизируем именно функционал $J_i(\mathbf{m})$.

Последнее значение $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}}) = 1.04 \times 10^{-8}$ (при $M = 16$) соответствует достаточно высокой экранирующей эффективности оптимальной оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$, причем спроектированная в рамках теста 2 оболочка $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{alt}})$ допускает простую техническую реализацию, поскольку она состоит из слоев, заполненных чередующимися распространенными материалами. Первым из них является распространенный инженерный материал – закаленная нержавеющая сталь с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 40$, вторым является известный метаматериал Super-Power SCS12050 с относительной магнитной проницаемостью $\mu = 0.0045$.

Наконец, выбрав в качестве следующего теста третий сценарий в (5.5), когда $\mu_{\min} = 0.0045$, $\mu_{\max} = 70$ и применяя МРЧ, мы получаем результаты, приведенные в табл. 3, являющейся аналогом табл. 1 для третьей пары (μ_{\min}, μ_{\max}) в (5.5). Видно, что при увеличении M от 2 до 16 значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ уменьшаются от 2.43×10^{-3} до значения 2.45×10^{-10} , которое отвечает очень высокой экранирующей эффективности.

Обсудим теперь результаты вычислительных экспериментов по решению задачи полной маскировки (4.4). Предварительно напомним, что в физической литературе общепринято в качестве

Таблица 3. Задача экранирования: $\mu_{\min} = 0.0045$, $\mu_{\max} = 70$, $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}}$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	70	0.0045	2.43×10^{-3}	1.92×10^{-3}	1.41×10^{-3}
4	70	0.0045	3.80×10^{-5}	6.94×10^{-4}	1.35×10^{-3}
6	70	0.0045	1.64×10^{-6}	6.46×10^{-4}	1.29×10^{-3}
8	70	0.0045	1.35×10^{-7}	6.17×10^{-4}	1.23×10^{-3}
10	70	0.0045	1.77×10^{-8}	5.90×10^{-4}	1.18×10^{-3}
12	70	0.0045	3.28×10^{-9}	5.64×10^{-4}	1.13×10^{-3}
14	70	0.0045	8.03×10^{-10}	5.41×10^{-4}	1.08×10^{-3}
16	70	0.0045	2.45×10^{-10}	5.18×10^{-4}	1.04×10^{-3}

решения задачи маскировки использовать решение \mathbf{m}^{alt} , отвечающее чередующемуся дизайну [6], [26]. Это связано с тем, что оболочку, состоящую из чередующихся слоев с большим контрастом, принято считать хорошей аппроксимацией анизотропной оболочки, которая получается в результате применения для решения задач дизайна устройств маскировки метода, основанного на ТО подходе [2]. Однако, как показывает анализ табл. 1–3, оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{alt}})$, отвечающие схеме чередующегося дизайна, обладают низкой маскировочной эффективностью. Действительно, в то время как значения $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$, где $\mathbf{m}^{\text{opt}} = \mathbf{m}^{\text{alt}}$, приведенные в табл. 2 и 3, достаточно малы при M , близких к 16, отвечая высокой экранирующей эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{alt}})$, значения $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$, наоборот, относительно велики, имея порядок 10^{-3} – 10^{-4} даже при M , близких к 16, что отвечает невысокой маскировочной эффективности. Для того, чтобы получить решение задачи маскировки, обладающее высокой маскировочной эффективностью, необходимо решить именно экстремальную задачу (4.4), отвечающую задаче полной маскировки.

Мы начнем наш анализ результатов решения задачи (4.4) с анализа простейшего случая двухслойной оболочки ($M = 2$). Напомним, что в этом случае существует точное решение $(0, \mu_2^0)$ задачи полной маскировки, где μ_2^0 определяется формулой (3.15). Простые вычисления с учетом соотношений (5.1), согласно которым $R_0 = a = 0.035$ м, $R_1 = (a + b)/2 = 0.0425$ м, $R_2 = b = 0.05$ м, показывают, что $\mu_2^0 = \mu_0(2R_2^3 + R_1^3)/(2(R_2^3 - R_1^3)) = 3.38726919339$. (Последнее значение записано с 11-ю верными цифрами после запятой). С учетом этого мы зафиксируем верхнюю границу $\mu_{\max} = 10$, а в качестве нижней границы μ_{\min} выберем убывающую последовательность $\mu_1^n = 10^{-n}$. Результаты решения задачи (4.4) в виде оптимальных проницаемостей μ_1^{opt} , μ_2^{opt} и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ функционала $J(\mathbf{m})$, где $\mathbf{m}^{\text{opt}} = (\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}})$, представлены вместе со значениями $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ (для сравнения) в табл. 4 для ряда значений μ_1^n , изменяющихся от 10^{-1} до 10^{-12} .

Анализ табл. 4 показывает, что с уменьшением нижней границы μ_{\min} множества K от 10^{-1} до 10^{-12} , чему соответствует увеличение контраста μ_{\max}/μ_{\min} от 100 до 10^{13} , оптимальное решение $(\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}})$ задачи полной маскировки (4.4), найденное с помощью МРЧ, при стремлении μ_{\min} к нулю приближается к точному (сингулярному) решению $(0, \mu_2^0)$ задачи полной маскировки. При этом значение $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$, где $\mathbf{m}^{\text{opt}} = (\mu_1^{\text{opt}}, \mu_2^{\text{opt}})$, изменяется от 1.10×10^{-1} при $\mu_{\min} = 10^{-1}$ до значения 3.90×10^{-12} при $\mu_{\min} = 10^{-12}$, отвечающего очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$. Указанные факты подтверждают высокую точность используемого нами оптимизационного метода для решения обратной задачи полной маскировки. Хотя, как уже отмечалось выше, в практическом плане полученные с высокой точностью решения, отвечающие малым значениям μ_1^{opt} , мало перспективны в виду их сингулярности.

Таблица 4. Задача маскировки: $M = 2$, $\mu_{\min}^n = 10^{-n}$, $n = 1, \dots, 12$, $\mu_{\max} = 10$

μ_{\min}	μ_{\max}	μ_1^{opt}	μ_2^{opt}	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
10^{-1}	10.0	10	0.10000000000	1.10×10^{-1}	2.20×10^{-1}	5.86×10^{-4}
10^{-2}	10.0	10	0.01000000000	1.60×10^{-2}	3.06×10^{-2}	1.35×10^{-3}
10^{-4}	10.0	10^{-4}	3.38595617966	3.90×10^{-4}	7.80×10^{-4}	0.0
10^{-6}	10.0	10^{-6}	3.38725605599	3.90×10^{-6}	7.80×10^{-6}	0.0
10^{-8}	10.0	10^{-8}	3.38726906202	3.90×10^{-8}	7.80×10^{-8}	0.0
10^{-10}	10.0	10^{-10}	3.38726919208	3.90×10^{-10}	7.80×10^{-10}	0.0
10^{-12}	10.0	10^{-12}	3.38726919338	3.90×10^{-12}	7.80×10^{-12}	0.0

Из табл. 4 следует, что $\mu_1^{\text{opt}} = \mu_{\min}$ для всех $n = 4, \dots, 12$ (кроме $n = 1, 2$, когда $\mu_1^{\text{opt}} = \mu_{\max}$ и $\mu_2^{\text{opt}} = \mu_{\min}$), тогда как μ_2^{opt} принимает некоторое промежуточное значение между μ_{\min} и μ_{\max} . Это является проявлением общей тенденции в поведении отдельных компонент оптимального решения задачи (4.4) для всех значений M . Указанная тенденция состоит в том, что соотношения (5.2) (либо (5.3)) для оптимальных проницаемостей, отвечающие схеме чередующегося дизайна 1-го (либо 2-го) типа, выполняются при выполнении условия (5.4) для всех управлений μ_m^{opt} , кроме, быть может, последнего μ_M^{opt} , которое принимает некоторое промежуточное значение между μ_{\min} и μ_{\max} . Другими словами, для задачи (4.4) вместо (5.2) (либо (5.3)) выполняются следующие соотношения почти чередующегося дизайна:

$$\mu_1^{\text{opt}} = \mu_3^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-1}^{\text{opt}} = \mu_{\min}, \quad \mu_2^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-2}^{\text{opt}} = \mu_{\max}, \quad \mu_{\min} \leq \mu_M^{\text{opt}} \leq \mu_{\max} \quad (5.6)$$

либо

$$\mu_1^{\text{opt}} = \mu_3^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-1}^{\text{opt}} = \mu_{\max}, \quad \mu_2^{\text{opt}} = \dots = \mu_{M-2}^{\text{opt}} = \mu_{\min}, \quad \mu_{\min} \leq \mu_M^{\text{opt}} \leq \mu_{\max}. \quad (5.7)$$

Приведем теперь результаты решения задачи маскировки для нескольких конкретных тестов. Первый тест отвечает первой выбранной ранее паре $(\mu_{\min}, \mu_{\max}) = (0.025, 40)$ в (5.5). Соответствующие результаты решения задачи (4.4) в виде оптимальных управлений $\mu_1^{\text{opt}}, \mu_M^{\text{opt}}$ и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ функционала $J(\mathbf{m})$ представлены вместе со значениями $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ (для сравнения) в табл. 5. Остальные управления $\mu_2^{\text{opt}}, \dots, \mu_{M-1}^{\text{opt}}$ при $M \geq 4$ определяются из соотношений (5.7), отвечающих схеме почти чередующегося дизайна 2-го типа. Из табл. 5 видно, что последнее управление μ_M^{opt} совпадает с $\mu_{\min} = 0.025$ при $M = 2, 4$ и 6, при $M \geq 8$ оно принимает промежуточные между μ_{\min} и μ_{\max} значения, убывающие от 0.0546 при $M = 8$ до 0.0339 при $M = 16$, тогда как значение $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ убывает от 1.14×10^{-2} при $M = 2$ до значения 7.28×10^{-5} при $M = 16$, отвечающего невысокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$.

Следующий тест отвечает второй выбранной ранее паре $(\mu_{\min}, \mu_{\max}) = (0.0045, 40)$ в (5.5). Соответствующие результаты решения задачи (4.4) в виде управлений $\mu_1^{\text{opt}}, \mu_M^{\text{opt}}$ и оптимальных значений $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ функционала $J(\mathbf{m})$ представлены вместе со значениями $J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ и $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ в табл. 6, которая является аналогом табл. 5. Остальные значения $\mu_2^{\text{opt}}, \dots, \mu_{M-1}^{\text{opt}}$ при $M \geq 4$ определяются из соотношений (5.6), отвечающих схеме почти чередующегося дизайна 1-го типа. Из табл. 6 видно, что последнее управление μ_M^{opt} совпадает с $\mu_{\min} = 0.0045$ при $M = 2$, а при изменении M от 4 до 16 μ_M^{opt} возрастает от значения 6.3817 до 21.3467, тогда как значение $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ убывает от 2.78×10^{-3} при $M = 2$ до значения 8.09×10^{-9} при $M = 16$, отвечающего достаточно высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$.

Таблица 5. Задача маскировки: $\mu_{\min} = 0.025$, $\mu_{\max} = 40$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	40	0.025	1.14×10^{-2}	2.16×10^{-3}	1.18×10^{-3}
4	40	0.025	1.83×10^{-3}	2.77×10^{-3}	9.02×10^{-4}
6	40	0.025	7.68×10^{-4}	8.46×10^{-3}	6.91×10^{-4}
8	40	0.0546	3.19×10^{-4}	6.37×10^{-4}	4.78×10^{-19}
10	40	0.0465	1.76×10^{-4}	3.52×10^{-4}	1.59×10^{-19}
12	40	0.0411	1.18×10^{-4}	2.36×10^{-4}	7.96×10^{-20}
14	40	0.0370	8.91×10^{-5}	1.78×10^{-4}	3.19×10^{-19}
16	40	0.0339	7.28×10^{-5}	1.46×10^{-4}	0.0

Таблица 6. Задача маскировки: $\mu_{\min} = 0.0045$, $\mu_{\max} = 40$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	40	0.0045	2.78×10^{-3}	4.14×10^{-3}	1.41×10^{-3}
4	0.0045	6.3817	2.43×10^{-4}	4.85×10^{-4}	0.0
6	0.0045	9.2633	1.24×10^{-5}	2.48×10^{-5}	0.0
8	0.0045	11.9708	1.33×10^{-6}	2.66×10^{-6}	0.0
10	0.0045	14.5166	2.35×10^{-7}	4.71×10^{-7}	0.0
12	0.0045	16.9168	5.97×10^{-8}	1.19×10^{-7}	0.0
14	0.0045	19.1880	1.98×10^{-8}	3.96×10^{-8}	0.0
16	0.0045	21.3467	8.09×10^{-9}	1.62×10^{-8}	0.0

Таблица 7. Задача маскировки: $\mu_{\min} = 0.0045$, $\mu_{\max} = 70$

M	μ_1^{opt}	μ_M^{opt}	$J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_i(\mathbf{m}^{\text{opt}})$	$J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}})$
2	70	0.0045	1.92×10^{-3}	2.43×10^{-3}	1.41×10^{-3}
4	0.0045	6.3806	1.39×10^{-4}	2.79×10^{-4}	0.0
6	0.0045	9.2573	4.15×10^{-6}	8.31×10^{-6}	0.0
8	0.0045	11.9512	2.66×10^{-7}	5.31×10^{-7}	0.0
10	0.0045	14.4691	2.88×10^{-8}	5.75×10^{-8}	0.0
12	0.0045	16.8218	4.61×10^{-9}	9.22×10^{-9}	0.0
14	0.0045	19.0213	1.00×10^{-9}	2.00×10^{-9}	0.0
16	0.0045	21.0804	2.77×10^{-10}	5.54×10^{-10}	0.0

Достигнутую эффективность можно сделать еще выше, если увеличить контраст μ_{\max}/μ_{\min} за счет увеличения μ_{\max} . В этом можно убедиться из табл. 7, которая является аналогом табл. 6 для случая $\mu_{\max} = 70$, отвечающего магнитной проницаемости кобальта. Видно, что указанное изменение μ_{\max} до 70 привело к изменению $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ от 1.92×10^{-3} при $M = 2$ до значения 2.77×10^{-10} при $M = 16$, которое отвечает очень высокой маскировочной эффективности оболочки $(\Omega, \mathbf{m}^{\text{opt}})$. Отметим еще одну особенность последних двух тестов. Она состоит в том, что построенное оптимальное решение \mathbf{m}^{opt} задачи полной маскировки является при $M \geq 4$ одновременно точным решением задачи внешней маскировки. Это вытекает из соотношений $J_e(\mathbf{m}^{\text{opt}}) = 0$, приведенных в последнем столбце каждой из табл. 6 и 7 при $M > 2$.

На наш взгляд, представляет интерес сравнить табл. 7 и 3 (а также 6 и 2), отвечающие одним и тем же данным (μ_{\min}, μ_{\max}). Указанное сравнение позволяет сделать вывод об очень сильном влиянии на качество (т.е. точность) решения задачи маскировки именно последнего управления μ_M^{opt} . Действительно, ошибка решения задачи маскировки, определяемая значением $J(\mathbf{m}^{\text{alt}})$, где \mathbf{m}^{alt} — чередующееся решение, равна 5.18×10^{-4} в табл. 3 (при $M = 16$) и равна $J(\mathbf{m}^{\text{opt}}) = 2.77 \times 10^{-10}$ в табл. 7 на оптимальном решении \mathbf{m}^{opt} задачи (4.4), отличающемся от \mathbf{m}^{alt} лишь последней компонентой μ_M^{opt} . Такое существенное уменьшение значения $J(\mathbf{m}^{\text{opt}})$ на шесть порядков обусловлено изменением последнего управления μ_M^{opt} .

Таким образом, применение численного алгоритма решения обратных задач экранирования и маскировки, основанного на оптимизационном методе, позволило получить решения, обладающие наивысшей эффективностью в рассматриваемом классе. Для задачи экранирования полученные решения обладают также простотой технической реализации при определенном выборе множества управлений K в (4.1), поскольку отвечающие им экранирующие оболочки состоят из чередующихся слоев, заполненных распространенными материалами. Для задачи маскировки материал последнего слоя может не принадлежать классу природных или инженерных материалов. В связи с этим может возникнуть техническая трудность с реализацией полученных решений. Однако эта трудность не является принципиальной ввиду больших успехов, достигнутых в последнее время в создании метаматериалов с заданными магнитными свойствами.

Полученные в статье результаты относятся к случаю однородного внешне приложенного магнитного поля, имеющего вид (3.1). На наш взгляд, большой интерес представляет перенесение полученных выше результатов на случай неоднородного внешне приложенного поля, создаваемого компактно распределенными источниками. Исследованию этой проблемы авторы собираются посвятить будущую работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Долин Л.С. О возможности сопоставления трехмерных электромагнитных систем с неоднородным анизотропным заполнением // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4. № 4. С. 964–967.
2. Pendry J.B., Schurig D., Smith D.R. Controlling electromagnetic fields // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782.
3. Leonhardt U. Optical conformal mapping // Science. 2006. V. 312. P. 1777–1780.
4. Ward A.J., Pendry J.B. Refraction and geometry in Maxwell's equations // J. of Modern Optics. 1996. V. 43. P. 773–793.
5. Chen H., Chan C.T. Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterial // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 91. № 183518. P. 1–3.
6. Han T., Qiu C.-W. Transformation Laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and dc fields // J. Opt. 2016. V. 18. № 044003. P. 1–13.
7. Yang F., Zhong Mei Z.L., Jin T.Y., Cui T.J. DC electric invisibility cloak // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. № 053902. P. 1–5.
8. Gomotry F., Solovyov M., Souc J., Navau C., Prat-Camps J., Sanchez A. Experimental realization of a magnetic cloak // Science. 2012. V. 335. P. 1466–1468.
9. Guenneau S., Amra C., Veynante D. Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux // Opt. Express. 2012. V. 20. P. 8207–8218.
10. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G. Determination of permittivity of an inhomogeneous dielectric body in a waveguide // Inverse Problems. 2011. V. 27. № 9. P. 095010.
11. Smirnov Y.G., Medvedik M.Y., Moskaleva M.A. Two-step method for permittivity determination of an inhomogeneous body placed in a rectangular waveguide // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39. P. 1114–1147.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
13. Peralta I., Fachinotti V.D. Optimization-based design of heat flux manipulation devices with emphasis on fabricability // Sci. Rep. 2017. V. 7. № 6261. P. 1–8.
14. Fachinotti V.D., Carbonetti A.A., Peralta I., Rintoul I. Optimization-based design to easy-to-make devices for heat flux manipulation // Int. J. Therm. Sci. 2018. V. 128. P. 38–48.
15. Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А. Оптимизационный анализ задачи тепловой маскировки цилиндрического тела // Докл. АН. 2017. Т. 472. № 4. С. 398–402.
16. Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А. Оптимизационный метод в задачах дизайна сферических слоистых тепловых оболочек // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 5. С. 512–517.

17. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Оптимизационный метод в осесимметричных задачах электрической маскировки материальных тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 217–234.
18. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat Mass Transf. 2019. V. 135. P. 1269–1277.
19. *Lobanov A.V., Spivak Yu.E.* Numerical analysis of problem of designing magnetic bilayer cloak // Progress In Electromagnetics Research Symposium – Spring (PIERS). 2017. P. 1362–1366.
20. *Alekseev G.V., Tereshko D.A., Shestopalov Yu.V.* Optimization approach for axisymmetric electric field cloaking and shielding // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28. P. 1–16. Published online: 02.06.2020
21. *Алексеев Г.В.* Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 1863–1878.
22. *Алексеев Г.В.* Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 3. С. 366–377.
23. *Алексеев Г.В., Спивак Ю.Э.* Теоретический анализ задачи магнитной маскировки на основе оптимизационного метода // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 9. С. 1155–1166.
24. *Спивак Ю.Э.* Оптимизационный метод в двумерных задачах магнитной маскировки // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 812–825.
25. *Poli R., Kennedy J., Blackwell T.* Particle swarm optimization: an overview // Swarm Intel. 2007. V. 1. P. 33–57.
26. *Алексеев Г.В.* Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016. 224 с.
27. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle swarm optimization // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. IV. 1995. P. 1942–1948.
28. *Chiang A.C.* Elements of Dynamic Optimization. New York: McGraw-Hill, 1992. 327 p.
29. *Solovyov M., Gomory F., Souc J., Mikulasova E., Usakova M., Usak E.* Force acting on a magnetic cloak placed in magnetic field // The 13th biennial European Conference on Applied Superconductivity. 2017. Poster № 3LP4-03.
30. SuperPower Inc., <http://www.superpower-inc.com/>