ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 2, с. 206–216

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ДЕКОМПОЗИЦИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В КВАДРАТЕ; ОЦЕНКИ В ГЁЛЬДЕРОВЫХ НОРМАХ

В. Б. Андреев[1,*], И. Г. Белухина[1,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: andreev@cs.msu.su

**e-mail: belukh@cs.msu.su

Поступила в редакцию 12.05.2020 г.
Переработанный вариант 23.07.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

В единичном квадрате плоскости Oxy рассматривается первая краевая задача для линейного стационарного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии с переменными коэффициентами. Предполагается, что при заданном коэффициенте конвекции задача имеет один регулярный и два характеристических пограничных слоя, каждый из которых расположен в окрестности одной из сторон квадрата. В работе построена декомпозиция решения задачи, для регулярной составляющей которой получены априорные оценки в гёльдеровых нормах. Библ. 9.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение, конвекция-диффузия, переменные коэффициенты, двумерная задача, априорные оценки, пространства Гёльдера.

DOI: 10.31857/S0044466921020046

1. ВВЕДЕНИЕ

При анализе численных методов решения дифференциальных уравнений обычно необходима информация о величинах производных приближаемого решения. В сингулярно возмущенном случае максимумы модулей производных порядка k оценивается величиной $O(\varepsilon^{-\sigma k})$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Несмотря на то что эта оценка, как правило, является точной, она мало эффективна. Связано это с тем, что указанные значения производные принимают только в малой части области, называемой пограничным слоем. Вне же пограничного слоя производные решения, как правило, ограничены (до порядка, определяемого гладкостью входных данных). Поэтому до проведения оценок решение полезно представить в виде суммы регулярной и сингулярной составляющих. Такое представление называется *декомпозицией решения*. Разумеется, декомпозиция не определяется однозначно, и тот или иной выбор декомпозиции связан со способом ее дальнейшего анализа и, в первую очередь, со способом анализа ее регулярной составляющей. Известные декомпозиции [1] (см. также литературу, цитированную в [2]), обладая большой общностью и широтой охвата, имеют существенный недостаток – они предъявляют довольно жесткие требования к гладкости исследуемого решения, которые далеко не всегда могут быть удовлетворены. Чтобы иметь возможность снизить требования к гладкости решения, нужны новые декомпозиции и новые методы их анализа. Естественно предположить, что для получения более точных результатов придется сузить класс исследуемых задач. Так, например, в [3] построена декомпозиция при существенно ослабленных по сравнению с [1] предположениях о гладкости решения для двумерного уравнения с постоянными коэффициентами. Неулучшаемые оценки для уравнения с постоянными коэффициентами получены в [2], [4]. Одномерный вариант этих оценок для уравнения с переменными коэффициентами содержится в [5].

В данной работе рассмотрена задача Дирихле в ограниченной области (единичном квадрате) для уравнения с переменными коэффициентами и конвекцией, направленной ортогонально одной из сторон квадрата. Для регулярной составляющей решения этой задачи с использованием результатов [2], [4] получены априорные оценки в нормах гёльдеровых пространств через соответствующие нормы правой части уравнения и граничной функции.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим следующую задачу: в области $\Omega := (0,1)^2$ с границей $\partial\Omega = \bigcup_{\ell=1}^{4}\Gamma_\ell$ ищется решение задачи

$$Lu := -\varepsilon\Delta u + r(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,$$
$$u\big|_{\partial\Omega} = g(x,y), \quad (x,y)\in\partial\Omega, \tag{2.1}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\varepsilon\in(0,1]$ — малый параметр, а коэффициенты удовлетворяют условиям

$$r(x,y)\ge 2r_0 = \text{const} > 0, \quad q(x,y) > 0.$$

Будем, кроме того, предполагать, что

$$r(x,y), q(x,y), f(x,y), g(x,y)\in C^{k,\lambda}, \quad k = 0,1,\ldots, \quad 0<\lambda<1. \tag{2.2}$$

При сделанных предположениях поставленная задача имеет три пограничных слоя: регулярный пограничный слой в окрестности правой границы квадрата и два характеристических слоя в окрестностях верхней и нижней сторон.

Представим решение задачи в виде

$$u(x,y) = U(x,y) + V(x,y), \tag{2.3}$$

где U — регулярная, а V — сингулярная составляющие, причем для регулярной составляющей выполняются условия

$$LU = f, \quad (x,y)\in\Omega, \quad U(0,y) = g(y) := g(0,y), \tag{2.4}$$

а

$$LV = 0, \quad (x,y)\in\Omega,$$
$$V\big|_{\partial\Omega} = g(x,y) - U(x,y), \quad (x,y)\in\partial\Omega.$$

Основной результат работы содержит

Теорема 1. *Пусть* $r(x,y)$, $q(x,y)$ *и* $f(x,y)\in C^{k,\lambda}(\bar\Omega)$, $g(y)\in C^{k+2,\lambda}([0,1])$, $k = 0,1,\ldots$, $0<\lambda<1$. *Тогда существует такая функция* $U(x,y)$, *удовлетворяющая* (2.4), (*регулярная составляющая решения задачи* (2.1)), *для которой справедлива оценка*

$$\varepsilon|U|_{C^{k+2,\lambda}} + \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{k,\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{k,\lambda}} + \|U\|_{C^{k,\lambda}} \le c\left(\|f\|_{C^{k,\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{k+2,\lambda}} + \|g\|_{C^{k+1,\lambda}}\right). \tag{2.5}$$

Здесь c — положительная постоянная, не зависящая от U, ε и рядом стоящего сомножителя, $|\cdot|_{C^{k,\lambda}}$ — коэффициент Гёльдера (полунорма), а $\|\cdot\|_{C^{k,\lambda}}$ — норма в пространстве Гёльдера $C^{k,\lambda}$.

Последующее изложение данной работы посвящено доказательству этой теоремы.

3. УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ. НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим следующую задачу: в правой полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ плоскости Oxy найти ограниченное решение задачи

$$-\varepsilon\Delta u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + qu = f(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.1}$$

$$u(0,y) = g(y), \quad -\infty<y<\infty, \tag{3.2}$$

где α и q — коэффициенты, которые предполагаются постоянными и положительными.

В [2] для решения этой задачи при $g(y) \equiv 0$ получена оценка

$$\varepsilon |u|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C^{\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}_y} + \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}_x} + \|u\|_{C^{\lambda}} \le c\|f\|_{C^{\lambda}}, \quad \lambda \in (0,1),$$

а в [4] при $f(x,y) \equiv 0$ получена оценка

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}} \le c\|g\|_{C^{k,\lambda}}, \quad k = 0,1,2, \quad \lambda \in (0,1).$$

В силу линейности задачи (3.1), (3.2) отсюда следует, что для решения $u(x,y)$ задачи (3.1), (3.2) справедлива априорная оценка

$$\varepsilon |u|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C^{\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}_y} + \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}_x} + \|u\|_{C^{\lambda}} \le c\left(\|f\|_{C^{\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{2,\lambda}} + \|g\|_{C^{1,\lambda}}\right), \quad \lambda \in (0,1). \tag{3.3}$$

Из (3.3) следуют оценки для любых $k = 0,1,\ldots$

$$\varepsilon |u|_{C^{k+2,\lambda}} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{C^{k,\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{k,\lambda}_y} + \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{C^{k,\lambda}_x} + \|u\|_{C^{k,\lambda}} \le c\left(\|f\|_{C^{k\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{k+2,\lambda}} + \|g\|_{C^{k+1,\lambda}}\right), \quad k = 0,1,\ldots. \tag{3.4}$$

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Построим теперь регулярную составляющую решения задачи (2.1) и установим оценку (2.5). Для этого сначала сделаем замену переменной $u(x,y) = e^{\beta x}v(x,y)$. При $\beta > 0$ для новой функции $v(x,y)$ получим задачу

$$\begin{gathered} -\varepsilon\Delta v + \hat{r}(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{q}(x,y)v = \hat{f}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \\ v\big|_{\partial\Omega} = \hat{g}(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{r}(x,y) = r(x,y) - 2\beta\varepsilon, \\ \hat{q}(x,y) = q(x,y) + \beta r(x,y) - \beta^2\varepsilon, \\ \hat{f}(x,y) = e^{-\beta x}f(x,y). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть

$$\varepsilon_1 = \frac{r_0}{2\beta}. \tag{4.3}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ для коэффициентов $\hat{r}(x,y)$, $\hat{q}(x,y)$ справедливы оценки

$$\hat{r}(x,y) \ge r_0 > 0, \quad \hat{q}(x,y) \ge \frac{3}{2}\beta r_0 > 0. \tag{4.4}$$

Продолжим $\hat{r}(x,y)$, $\hat{q}(x,y)$ и $\hat{f}(x,y)$ гладко с Ω на $\Omega^* = (0,3/2)\times(-1/2,3/2)$, ($\hat{g}(0,y) = g(y)$ с $(0,1)$ на $(-1/2,3/2)$), а затем на всю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ (всю ось Oy), с сохранением класса и нормы. Продолженные функции будем обозначать теми же буквами, но со звездочкой, т.е. для всех $\hat{\varphi}(x,y)$, где под $\hat{\varphi}(x,y)$ понимаются функции $(\hat{r}(x,y), \hat{q}(x,y), \hat{f}(x,y))$

$$\begin{gathered} \varphi^*(x,y) = \hat{\varphi}(x,y) \quad (x,y) \in \Omega, \\ \varphi^*(x,y) \in C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^2_+), \quad \|\varphi^*\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^2_+)} \le c\|\hat{\varphi}\|_{C^{k,\lambda}(\Omega)}, \end{gathered}$$

и аналогично для одномерной функции $g^*(y) = g(y)$ при $y \in [0,1]$. Будем также предполагать, что

$$r^*(x,y) \ge r_0/2 > 0, \quad q^*(x,y) \ge \beta r_0/2 > 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+,$$

и, более того, будем предполагать, что

$$r^*(x,y) = 2\alpha > 0, \quad q^*(x,y) = Q > 0, \quad f^*(x,y) = 0,$$
$$\{(x \ge 3/2) \cup (-\infty < y \le -1/2) \cup (3/2 \le y < \infty)\},$$
$$g^*(y) = 0 \quad (-\infty < y \le -1/2) \cup (3/2 \le y < \infty).$$

Применительно к несвязным областям существование таких продолжений функций с указанными свойствами в двумерном и одномерном случаях следует, например, из [7, Дополнение, с. 587–597].

Теперь в правой полуплоскости $x \ge 0$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} L^*U^*(x,y) = -\varepsilon\Delta U^* + r^*(x,y)\frac{\partial U^*}{\partial x} + q^*(x,y)U^* = f^*(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2_+, \\ U^*\big|_{x=0} = g^*(y), \quad -\infty < y < \infty, \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} U^*(x,y) = 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Из связи функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ и $U^*(x,y)$, описанной ранее в этом разделе, очевидно, что сужение функции $U^*e^{\beta x}$ на Ω можно рассматривать как регулярную составляющую U декомпозиции (2.3).

Для доказательства теоремы 1 аналогично [6, гл. III, § 2] будем пользоваться методом разбиения единицы и техникой явного применения такого метода в одномерном случае в [5]. Для начала построим разбиение единицы для полуплоскости. Напомним, что разбиение единицы на полуоси Ox в [5] задается при помощи бесконечно дифференцируемой функции

$$\omega(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le 1/4, \\ \dfrac{1}{2}\left[1 - \operatorname{th}\dfrac{|\xi| - 1/2}{(|\xi| - 1/4)(3/4 - |\xi|)}\right], & \dfrac{1}{4} \le |\xi| \le \dfrac{3}{4}, \\ 0, & |\xi| \ge \dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

с носителем $[-3/4, 3/4]$ следующим образом:

$$\sum_{m=0}^{2N-1} \xi_m(x) + \xi^+(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in [0,\infty), \tag{4.6}$$

где

$$\xi_m(x) := \omega(xN - m), \quad \operatorname{supp}\xi_m(x) = \left[\frac{m-3/4}{N}, \frac{m+3/4}{N}\right] =: \Delta_m, \quad \operatorname{mes}\Delta_m = \frac{3}{2N} =: \delta,$$

а

$$\xi^+(x) = \begin{cases} \xi_{2N}(x), & 0 \le x \le 2, \\ 1, & 2 \le x < \infty. \end{cases}$$

Аналогично построим разбиение единицы на оси Oy.

Очевидно, что искомое разбиение есть

$$\sum_{n=-N+1}^{2N-1} \eta_n(y) + \eta^+(y) + \eta^-(y) = 1 \quad \text{при} \quad y \in (-\infty,\infty), \tag{4.7}$$

если

$$\eta_n(y) := \omega(yN - n), \quad \operatorname{supp}\eta_n(y) = \left[\frac{n-3/4}{N}, \frac{n+3/4}{N}\right] =: \Delta_n, \quad \operatorname{mes}\Delta_n = \frac{3}{2N} = \delta,$$

а

$$\eta^-(y) = \begin{cases} \eta_{-N}(y), & -1 \le y < \infty, \\ 1, & -\infty < y \le -1, \end{cases} \qquad \eta^+(y) = \begin{cases} \eta_{2N}(y), & -\infty < y \le 2, \\ 1, & 2 \le y < \infty. \end{cases}$$

Теперь разбиение единицы $\zeta_{m,n}$ на всей полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$ зададим как тензорное произведение построенных одномерных разбиений (4.6), (4.7):

$$\sum_{m=0}^{2N}\sum_{n=-N}^{2N}\zeta_{m,n} = 1, \quad \zeta_{m,n}(x,y) = \xi_m(x)\eta_n(y).$$

В соответствии с этим разбиением представим функцию $U^*(x,y)$ в виде

$$U^*(x,y) = \sum_{m=0}^{2N}\sum_{n=-N}^{2N} u_{m,n}(x,y), \quad \text{где} \quad u_{m,n}(x,y) = U^*(x,y)\zeta_{m,n}(x,y). \tag{4.8}$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Умножим уравнение (4.5) для $U^*(x,y)$ на соответствующие функции $\zeta_{m,n}(x,y)$ и, поступая аналогично одномерному случаю [5], получим для функций $u_{m,n}(x,y)$ задачи с постоянными коэффициентами в полуплоскости типа (3.1), (3.2). Затем воспользуемся оценкой (3.3) для решений каждой из этих задач, и, наконец, получим для $U^*(x,y)$, как для суммы решений $u_{m,n}(x,y)$, сначала оценку (3.3), а затем оценку (2.5) при $k = 0$, и, наконец, для любых $k = 0,1,\ldots$.

Опишем этот процесс более подробно. Умножим уравнение (4.5) на $\zeta_{m,n}(x,y)$. Будем иметь

$$-\varepsilon\zeta_{m,n}\Delta U^* + r^*\zeta_{m,n}\frac{\partial U^*}{\partial x} + q^*\zeta_{m,n}U^* = f^*\zeta_{m,n}. \tag{5.1}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}(\zeta_{m,n}U^*) = \zeta_{m,n}\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*,\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\zeta_{m,n}U^*) = \zeta_{m,n}\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\frac{\partial U^*}{\partial x} + \frac{\partial^2\zeta_{m,n}}{\partial x^2}U^*,\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\zeta_{m,n}U^*) = \zeta_{m,n}\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} + 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial y}\frac{\partial U^*}{\partial y} + \frac{\partial^2\zeta_{m,n}}{\partial y^2}U^*.
\end{gathered}$$

С учетом того, что $\zeta_{m,n}U^* = u_{m,n}$ (см. (4.8)), отсюда следует, что

$$\begin{gathered}
\zeta_{m,n}\frac{\partial U^*}{\partial x} = \frac{\partial u_{m,n}}{\partial x} - \frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*,\\
\zeta_{m,n}\frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\frac{\partial U^*}{\partial x} - \frac{\partial^2\zeta_{m,n}}{\partial x^2}U^*,\\
\zeta_{m,n}\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial y}\frac{\partial U^*}{\partial y} - \frac{\partial^2\zeta_{m,n}}{\partial y^2}U^*.
\end{gathered}$$

Теперь (5.1) можно записать в виде

$$-\varepsilon\Delta u_{m,n} + r^*\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x} + q^*u_{m,n} = f_{m,n} - \varepsilon\left[2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\frac{\partial U^*}{\partial x} + 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial y}\frac{\partial U^*}{\partial y} + \Delta\zeta_{m,n}U^*\right] + r^*\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*.$$

Далее преобразуем полученное уравнение для $u_{m,n}$ аналогично тому, как это было сделано в [5] для одномерного случая. Будем иметь

$$\begin{gathered}
-\varepsilon\Delta u_{m,n}(x,y) + 2\alpha_{m,n}\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}(x,y) + q_{m,n}u_{m,n}(x,y) = f_{m,n}(x,y) + [2\alpha_{m,n} - r^*(x,y)]\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}(x,y) +\\
+ [q_{m,n} - q^*(x,y)]u_{m,n}(x,y) - \varepsilon\left[2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\frac{\partial U^*}{\partial x} + 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial y}\frac{\partial U^*}{\partial y} + \Delta\zeta_{m,n}U^*\right] + r^*\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*,\\
m = 0,\ldots,2N, \quad n = -N,\ldots,2N,
\end{gathered}$$

где $\alpha_{m,n}$ и $q_{m,n}$ – некоторые положительные постоянные, которые будут выбраны в дальнейшем. Для указанных значений m, n носители $\Delta_{m,n} = \Delta_m(x)\times\Delta_n(y)$ функции $\zeta_{m,n}(x,y)$ принадлежат $\mathbb{R}^2_+$, поэтому функции $u_{m,n}(x,y)$ можно рассматривать как решения задачи (3.1), (3.2) с соответствующими коэффициентами и правыми частями и граничными условиями

$$g_n(y) = g^*(y)\zeta_{0,n}(0,y), \quad m = 0 \quad \text{и} \quad g_n = 0, \quad m \neq 0.$$

Применим к каждому такому решению $u_{m,n}$ оценку (3.3). Получим

$$\varepsilon|u_{m,n}|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y}\right|_{C^\lambda_y} + \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y}\right|_{C^\lambda_x} + \|u_{m,n}\|_{C^\lambda} \le c_{m,n}\left\{\|f^*\zeta_{m,n}\|_{C^\lambda} + \right.$$
$$+ \left\|(2\alpha_{m,n} - r^*(x,y))\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_{C_\lambda} + \|(q_{m,n} - q^*(x,y))u_{m,n}\|_{C_\lambda} + \varepsilon\left\|2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\frac{\partial U^*}{\partial x} + 2\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial y}\frac{\partial U^*}{\partial y} + \Delta\zeta_{m,n}U^*\right\|_{C^\lambda} + \quad (5.2)$$
$$\left. + \left\|r^*(x,y)\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*\right\|_{C^\lambda} + \varepsilon|g_n|_{C^{2,\lambda}} + \|g_n\|_{C^{1,\lambda}}\right\}, \quad \lambda\in(0,1).$$

В правой части полученного неравенства присутствуют слагаемые, зависящие от $u_{m,n}$, аналогичные тем, которые имеются и в левой части, и слагаемые, зависящие от U^*. Проведем сначала оценку величин, связанных с $u_{m,n}$. Начнем со второго слагаемого правой части. На основании определения нормы в C_λ и, принимая во внимание правила вычисления постоянной Гёльдера для произведения двух функций, найдем, что

$$\left\|(2\alpha_{m,n} - r^*(x,y))\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_{C_\lambda} = \left\|(2\alpha_{m,n} - r^*(x,y))\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_{C_\lambda(\Delta_{m,n})} \le$$
$$\le \sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}}|2\alpha_{m,n} - r^*(x,y)|\left(\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \left\|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_C\right) + |r^*|_{C^\lambda}\left\|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_C. \quad (5.3)$$

Используя интерполяционное неравенство (см., например, [2], [5])

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_C \le \frac{t^\lambda}{1+\lambda}\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{C^\lambda_x} + \frac{2}{t}\|v\|_C, \quad t\in(0,\infty) - \text{любое}, \quad (5.4)$$

получим из (5.2), (5.3) оценку

$$c_{m,n}\left\|(2\alpha_{m,n} - r^*(x,y))\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right\|_{C_\lambda} \le c_{m,n}\left[c_{1,m,n}\sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}}|2\alpha_{m,n} - r^*(x,y)|\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda(\Delta_{m,n})} + \right.$$
$$\left. + c_{2,m,n}t^\lambda\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda_x(\Delta_{m,n})} + c_{3,m,n}\|u_{m,n}\|_C\right].$$

Выберем теперь $\alpha_{m,n}$ из условия

$$2\alpha_{m,n} = \left[\sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}} r^*(x,y) + \inf_{(x,y)\in\Delta_{m,n}} r^*(x,y)\right]/2 = r^*(x_m,y_n), \quad (x_m,y_n)\in\Delta_{m,n}.$$

Будем считать, что размеры $\Delta_{m,n}$ – носителя $\zeta_{m,n}(x,y)$, т.е. длина δ отрезка Δ_m – носителя $\xi_m(x)$ (и Δ_n – носителя $\zeta_n(y)$) столь малы (за счет величины N), что

$$c_{m,n}c_{1,m,n}\sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}}|r^*(x_m,y_n) - r^*(x,y)| \le \frac{1}{4},$$

и выберем t так, чтобы

$$c_{m,n}c_{2,m,n}t^\lambda = 1/4.$$

При оценке третьего слагаемого в правой части (5.2) поступим аналогично, т.е. в выражении

$$\|(q_{m,n} - q^*(x,y))u_{m,n}\|_{C_\lambda} = \|(q_{m,n} - q^*(x,y))\|_C\left[|u_{m,n}|_{C^\lambda_x} + |u_{m,n}|_{C^\lambda_y} + \|u_{m,n}\|_C\right] + |q^*|_{C^\lambda}\|u_{m,n}\|_C$$

выберем

$$q_{m,n} = \left[\sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}} q^*(x,y) + \inf_{(x,y)\in\Delta_{m,n}} q^*(x,y)\right]/2 = q^*(x_m, y_n), \quad (x_m, y_n) \in \Delta_{m,n}.$$

Снова за счет малости $\Delta_{m,n}$ получим оценку

$$c_{m,n} \sup_{(x,y)\in\Delta_{m,n}} \left|q^*(x_m, y_n) - q^*(x,y)\right| \le \frac{1}{2}.$$

Теперь, принимая во внимание вышесказанное, а также используя следующую оценку для пятого слагаемого из правой части (5.2) на $\Delta_{m,n}$

$$\left\|r^*(x,y)\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}U^*\right\|_{C^\lambda} \le \left\|r^*(x,y)\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\right\|_C \left\|U^*\right\|_C + \left\|r^*(x,y)\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\right\|_C \left|U^*\right|_{C^\lambda} + \left|r^*\frac{\partial\zeta_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda} \left\|U^*\right\|_C,$$

и очевидные оценки других слагаемых там же, будем иметь

$$\begin{gathered}\varepsilon\left|u_{m,n}\right|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + D(u_{m,n}) + \left\|u_{m,n}\right\|_{C^\lambda} \le \bar{c}_{mn}\left\{\left\|f^*\right\|_{C^\lambda} + \varepsilon\left[\left|\frac{\partial U^*(x,y)}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \left|\frac{\partial U^*(x,y)}{\partial y}\right|_{C^\lambda} + \left|U^*(x,y)\right|_{C^\lambda}\right] + \right.\\ \left. + \left|U^*\right|_{C_x^\lambda} + \left|U^*\right|_{C_y^\lambda} + \left\|U^*\right\|_C + \varepsilon\left|g_n\right|_{C^{2,\lambda}} + \left\|g_n\right\|_{C^{1,\lambda}}\right\},\end{gathered} \tag{5.5}$$

где

$$D(u_{m,n}) = \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y}\right|_{C_y^\lambda} + \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}\left|\frac{\partial u_{m,n}}{\partial y}\right|_{C_x^\lambda}.$$

Заметим еще, что, исходя из определения функций g_n, имеем следующие оценки для последних слагаемых в правой части (5.5):

$$\left|g_n\right|_{C^{2,\lambda}} \le c_{3,m,n}\left[\left|g^*\right|_{C^{2,\lambda}} + \left\|g^*\right\|_{C^{1,\lambda}}\right],$$
$$\left\|g_n\right\|_{C^{1,\lambda}} \le c_{4,m,n}\left\|g^*\right\|_{C^{1,\lambda}}.$$

Суммируя полученные для $u_{m,n}$ оценки (5.5), для

$$U^* = \sum_{m=0}^{2N}\sum_{n=-N}^{2N} u_{m,n}$$

получаем оценку

$$\begin{gathered}\varepsilon\left|U^*\right|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + D(U^*) + \left\|U^*\right\|_{C^\lambda} \le c\left\{\left\|f^*\right\|_{C^\lambda} + \varepsilon\left[\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{C_x^\lambda} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{C_y^\lambda} + \left\|U^*\right\|_{C^\lambda}\right] + \right.\\ \left. + \left|U^*\right|_{C_x^\lambda} + \left|U^*\right|_{C_y^\lambda} + \left\|U^*\right\|_C + \varepsilon\left|g^*\right|_{C^{2,\lambda}} + \left\|g^*\right\|_{C^{1,\lambda}}\right\}.\end{gathered} \tag{5.6}$$

Пусть $\varepsilon_2 > 0$ таково, что при $\varepsilon \le \varepsilon_2 < 1$ выполняется (так как $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1-\lambda}{2}}$ при $\varepsilon < 1$)

$$\varepsilon\left[\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{C_x^\lambda} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{C_y^\lambda} + \left\|U^*\right\|_{C^\lambda}\right] \le \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + D(U^*) + \left\|U^*\right\|_{C^\lambda}\right].$$

Далее для оценки $\left|U^*\right|_{C_x^\lambda}$ воспользуемся неравенством Юнга (см., например, [9, гл. I, § 15])

$$ab \le \frac{1}{p}(\mu a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\mu}\right)^{1/p'}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \mu > 0 \text{ – любое},$$

и интерполяционными неравенствами

$$|u|_{C_x^\lambda} \le 2^{1-\lambda} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_C^\lambda \|u\|_C^{1-\lambda}$$

(см., например, [5]) и (5.4). Будем иметь

$$|U^*|_{C_x^\lambda} \le 2^{1-\lambda} \left[\lambda \left\| \frac{\partial U^*}{\partial x} \right\|_C + (1-\lambda)\|U^*\|_C \right] \le 2^{1-\lambda} \left\{ \lambda \left[\frac{s^\lambda}{1+\lambda} \left| \frac{\partial U^*}{\partial x} \right|_{C_x^\lambda} + 2s^{-1}\|U^*\|_C \right] + (1-\lambda)\|U^*\|_C \right\}.$$

Выберем параметр s так, чтобы выполнялось (c — постоянная из (5.6))

$$c2^{1-\lambda} \frac{\lambda s^\lambda}{1+\lambda} \le \frac{1}{4}.$$

С учетом этого придем к оценке

$$\varepsilon|U^*|_{C^{2,\lambda}} + \left| \frac{\partial U^*}{\partial x} \right|_{C^\lambda} + D(U^*) + \|U^*\|_{C^\lambda} \le c\left\{ \|f^*\|_{C^\lambda} + |U^*|_{C_y^\lambda} + \|U^*\|_C + \varepsilon|g^*|_{C^{2,\lambda}} + \|g^*\|_{C^{1,\lambda}} \right\}. \tag{5.7}$$

Замечание 1. Оценка (5.7) справедлива и при $\beta = 0$, однако оценить оставшиеся в правой части (5.7) величины $c\|U^*\|_C$ и $c|U^*|_{C_y^\lambda}$ так, чтобы их можно было исключить за счет присутствующих в левой части соответствующих величин, при $\beta = 0$ не удается, так как стоящий перед ними множитель невозможно сделать малым независимо от ε.

Оценим теперь величины $\|U^*\|_C$ и $|U^*|_{C_y^\lambda}$ в полуплоскости. Напомним, что $U^*(x, y)$ является решением задачи (4.5). Так как решение U^* на бесконечности стремится к нулю, то максимальное значение эта функция принимает в конечной (ограниченной) области, и на основании принципа сравнения (см. [8, Ch. 2, § 6])

$$\|U^*\|_C \le \frac{\|f^*\|_C}{\inf q^*} + \|g^*\|_C. \tag{5.8}$$

Для оценки $|U^*|_{C_y^\lambda}$ преобразуем задачу для U^* из (4.5) к виду

$$-\varepsilon\Delta U^* + 2\alpha\frac{\partial U^*}{\partial x} + QU^* = f^* + (2\alpha - r^*)\frac{\partial U^*}{\partial x} + (Q - q^*)U^* := F^*, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2,$$
$$U^*|_{x=0} = g^*(y), \quad -\infty < y < \infty, \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} U^*(x, y) = 0,$$

где α и Q – некоторые постоянные, подлежащие выбору в дальнейшем. Теперь для оценки величины $|U^*|_{C_y^\lambda}$ воспользуемся результатами [2, лемма 5.1] и [4]. Согласно указанной лемме, при нулевой граничной функции оценка решения уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$|U^*|_{C_y^\lambda} \le \frac{1}{Q}\left[1 + \frac{\varepsilon Q}{4\alpha^2}\right]|F^*|_{C_y^\lambda},$$

а с учетом оценки решения с нулевой правой частью и ненулевой граничной функцией, из [2], [4] следует

$$|U^*|_{C_y^\lambda} \le \frac{1}{Q}\left[1 + \frac{\varepsilon Q}{4\alpha^2}\right]|F^*|_{C_y^\lambda} + c_5\|g^*\|_{C^\lambda}.$$

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$|U^*|_{C_y^\lambda} \le \frac{1}{Q}\left[1 + \frac{\varepsilon Q}{4\alpha^2}\right]\left\{ |f^*|_{C_y^\lambda} + \max|2\alpha - r^*|\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C_y^\lambda} + \max|Q - q^*||U^*|_{C_y^\lambda} + \right.$$
$$\left. + |r^*|_{C_y^\lambda}\left\|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right\|_C + |q^*|_{C_y^\lambda}\|U^*\|_C \right\} + c_6\|g^*\|_{C^\lambda}.$$

Пусть

$$Q = q^*_{\max}, \quad 2\alpha = \frac{r^*_{\max} + r^*_{\min}}{2}.$$

Тогда $(Q - q^*) > 0$. Рассмотрим коэффициент при $|U^*|_{C^\lambda_y}$. Заметим, что при

$$\varepsilon \le \frac{2\alpha^2 q^*_{\min}}{Q(Q - q^*_{\min})} = \varepsilon_3 = \frac{(r^*_{\max} + r^*_{\min})^2 q^*_{\min}}{8q^*_{\max}(q^*_{\max} - q^*_{\min})} \tag{5.9}$$

выполняется неравенство

$$\left[1 - \frac{Q - q^*_{\min}}{Q}\left(1 + \frac{\varepsilon Q}{4\alpha^2}\right)\right] \ge \frac{q^*_{\min}}{2Q},$$

а после применения интерполяционного неравенства (5.4) при $\varepsilon \le \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1\}$ (см. (4.3), (5.9)) получим оценку $|U^*|_{C^\lambda_y}$:

$$\begin{aligned} |U^*|_{C^\lambda_y} \le \frac{2}{q^*_{\min}}\left[1 + \frac{\varepsilon q^*_{\max}}{4\alpha^2}\right]\Bigg\{|f^*|_{C^\lambda_y} + \frac{(r^*_{\max} - r^*_{\min})}{2}\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda_y} + \\ + \frac{|r^*|_{C^\lambda_y} t^\lambda}{1+\lambda}\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda_x} + \left[\frac{2|r^*|_{C^\lambda_y}}{t} + |q^*|_{C^\lambda_y}\right]\|U^*\|_C + c_7\|g^*\|_{C^\lambda}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Выразим входящие в (5.10) величины, зависящие от коэффициентов уравнения (4.5), с учетом (4.2), (4.3) и будем считать, что $\varepsilon \le \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1\}$. Тогда (5.10) будет иметь вид

$$\begin{aligned} |U^*|_{C^\lambda_y} \le \frac{c_8}{\beta}\Bigg\{|f^*|_{C^\lambda_y} + \frac{(r^*_{\max} - r^*_{\min})}{2}\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda_y} + \\ + \frac{|r^*|_{C^\lambda_y} t^\lambda}{1+\lambda}\left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda_x} + \left[\frac{2|r^*|_{C^\lambda_y}}{t} + |q^*|_{C^\lambda_y}\right]\|U^*\|_C + c_7\|g^*\|_{C^\lambda}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Выберем теперь β, а затем t так, чтобы

$$\frac{c_8}{\beta}\frac{(r^*_{\max} - r^*_{\min})}{2} \le \frac{1}{4}, \quad \frac{c_8}{\beta}|r^*|_{C^\lambda_y}\frac{t^\lambda}{1+\lambda} \le \frac{1}{4}.$$

Тогда после подстановки последней оценки в (5.7) получим оценку (3.3) для решения задачи (4.5) в полуплоскости. Из (3.3) очевидным образом следует оценка (2.5) при $k = 0$, так как $\varepsilon^{(1-\lambda)/2} > \sqrt{\varepsilon}$ при $0 < \lambda < 1$ и $0 < \varepsilon < 1$.

Теперь рассмотрим функцию $U(x, y)$, являющуюся сужением $U^*(x, y)e^{\beta x}$ на область $0 \le x \le 3/2$ и докажем для нее оценку (2.5). Тогда сужение $U(x, y)$ на Ω и будет искомой регулярной составляющей решения задачи (2.1).

Оценку (2.5) для $U(x, y)$ при $0 \le x \le 3/2$ докажем, подставив в левую часть (2.5) при $k = 0$ функцию $U(x, y) = U^* e^{\beta x}$. Далее, принимая во внимание оценки

$$|a(x,y)b(x,y)|_{C^\lambda} \le \|a(x,y)\|_C\,|b(x,y)|_{C^\lambda} + \|b(x,y)\|_C\,|a(x,y)|_{C^\lambda},$$
$$|e^{\beta x}|_{C^\lambda_x} \le \frac{\beta e^{3\beta}}{\lambda}, \quad |e^{-\beta x}|_{C^\lambda_x} \le \frac{\beta^\lambda}{\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{e}\right)^{1-\lambda},$$

а также используя интерполяционное неравенство (5.4) в нужных местах, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon|U|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^\lambda} + \|U\|_{C^\lambda} \le c_9\left\{\varepsilon|U^*|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial U^*}{\partial x}\right|_{C^\lambda} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial U^*}{\partial y}\right|_{C^\lambda} + \|U^*\|_{C^\lambda}\right\} \le \\ \le c\left(\|f\|_{C^\lambda} + \varepsilon|g|_{C^{2,\lambda}} + \|g\|_{C^{1,\lambda}}\right). \end{aligned}$$

Чтобы доказать оценку (2.5) при любом k, достаточно для решения U получить соответствующую оценку при $k = 1$. Для этого продифференцируем уравнение (2.4) для U по y и это же уравнение по x. Заметим, что полученные уравнения для новых функций $\overline{u}(x,y) = \partial U/\partial y$ и $\hat{u}(x,y) = \partial U/\partial x$ с граничными условиями $\overline{u}(0,y) = g'(y)$ и $\hat{u}(0,y) = (\partial U/\partial x)(0,y)$, соответственно, являются уже рассмотренными задачами (но с другими правыми частями и граничными условиями), и потому, воспользовавшись полученными ранее оценками для каждой из них и, где необходимо, интерполяционным неравенством (5.4), после сложения результатов, придем к оценке (2.5) при $k = 1$. Продолжая этот процесс далее, приходим к доказательству теоремы 1.

Изложим вышесказанное более подробно.

1. Задачу для производной функции U по y можно записать в виде

$$L\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}U, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{x=0} = g', \tag{5.11}$$

где оператор L определен в (2.1).

Применим к решению этой задачи доказанную для $k = 0$ оценку (2.5). Будем иметь

$$\begin{gathered}\varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}} + \left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{C^{\lambda}} \le \\ \le c\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{C^{\lambda}} + \varepsilon|g'|_{C^{2,\lambda}} + \|g'\|_{C^{1,\lambda}} + \left\|\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} + \left\|\frac{\partial q}{\partial y}U\right\|_{C^{\lambda}}\right), \quad \lambda \in (0,1).\end{gathered} \tag{5.12}$$

Рассмотрим два последних слагаемых в правой части оценки (5.12). Так как по определению нормы в C^{λ}

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} = \left|\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{\lambda}} + \left\|\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C} \le \left\|\frac{\partial r}{\partial y}\right\|_{C}\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{\lambda}} + \left|\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{C^{\lambda}}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C} + \left\|\frac{\partial r}{\partial y}\right\|_{C}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C},$$

и $\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C}$ оценивается при помощи интерполяционного неравенства (5.4) через $\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C_x^{\lambda}}$ и $\|U\|_C$, причем эти величины уже были оценены в (2.5) при $k = 0$ через

$$c\{\|f\|_{C^{\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{2,\lambda}} + \|g\|_{C^{1,\lambda}}\},$$

а последнее слагаемое из (5.12) оценивается аналогично, то правая часть неравенства (5.12) оценивается величиной

$$c\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{C^{\lambda}} + \|f\|_{C^{\lambda}} + \varepsilon|g'|_{C^{2,\lambda}} + \|g'\|_{C^{1,\lambda}} + \varepsilon|g|_{C^{2,\lambda}} + \|g\|_{C^{1,\lambda}}\right). \tag{5.13}$$

2. Теперь продифференцируем (2.4) по x. Для функции $\frac{\partial U}{\partial x}$ получим задачу, аналогичную (5.11):

$$L\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}U, \quad \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x}(0,y). \tag{5.14}$$

Функция $\frac{\partial U}{\partial x}$, как решение этой задачи, также оценивается при помощи (2.5), именно

$$\begin{gathered}\varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{2,\lambda}} + \left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} + \sqrt{\varepsilon}\left|\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{C^{\lambda}} + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} \le \\ \le c\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} + \varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial x}(0,y)\right|_{C^{2,\lambda}} + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}(0,y)\right\|_{C^{1,\lambda}} + \left\|\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^{\lambda}} + \left\|\frac{\partial q}{\partial x}U\right\|_{C^{\lambda}}\right), \quad \lambda \in (0,1).\end{gathered} \tag{5.15}$$

Заметим, что

$$\varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial x}(0,y)\right|_{C^{2,\lambda}} = \varepsilon\left|\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}(0,y)\right|_{C^{\lambda}} \le \varepsilon\left|\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}\right|_{C^{\lambda}},$$

а

$$\varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{C^{2,\lambda}} = \varepsilon\left[\left|\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\right|_{C^\lambda} + \left|\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial y^2}\right|_{C^\lambda} + \left|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial y}\right|_{C^\lambda}\right],$$

и потому из (5.12), (5.13) следует оценка

$$\varepsilon\left|\frac{\partial U}{\partial x}(0,y)\right|_{C^{2,\lambda}} \le c\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{C^\lambda} + \varepsilon|g'|_{C^{2,\lambda}} + \|g'\|_{C^{1,\lambda}} + \|f\|_{C^\lambda} + \varepsilon|g|_{C^{2,\lambda}} + \|g\|_{C^{1,\lambda}}\right\}.$$

Заметим также, что

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x}(0,y)\right\|_{C^{1,\lambda}} = \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}(0,y)\right\|_{C^\lambda} \le \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right|_{C^\lambda} + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right\|_{C},$$

а на основании интерполяционного неравенства (5.4) имеем

$$\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right\|_{C} \le \frac{t^\lambda}{1+\lambda}\left|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right|_{C_x^\lambda} + \frac{2}{t}\left\|\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{C}, \quad t\in n(0,\infty).$$

Входящие же в правые части двух последних неравенств величины оцениваются правой частью (5.12), т.е. величиной (5.13). Осталось оценить два последних слагаемых в правой части (5.15), а именно,

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}\right\|_{C^\lambda}, \quad \left\|\frac{\partial q}{\partial x}U\right\|_{C^\lambda}.$$

Снова используя правило вычисления коэффициента Гёльдера от произведения функций и интерполяционное неравенство (5.4), на основании доказанной для U оценки (2.5) при $k=0$, оценим сумму указанных последних слагаемых. Складывая теперь оценки (5.12) и (5.15), с учетом (5.13) и очевидных неравенств, выражающих связь между младшими и старшими коэффициентами Гёльдера, получаем оценку (2.5) при $k=1$. Продолжая этот процесс, т.е. дифференцируя каждое из уравнений для $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ снова по x и эти же уравнения по y, после аналогичных рассуждений докажем оценку (2.5) для следующего k. И так далее. Тем самым, придем к установлению указанной оценки для U при всех k. Следовательно, оценка (2.5) установлена при $0\le x\le 3/2$, а значит, и для $(x,y)\in\Omega$. Тем самым, теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
2. *Андреев В.Б.* Оценки в классах Гёльдера регулярной составляющей решения сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 12. С. 1983–2020.
3. *Kellogg R.B., Stynes M.* Corner singularities and boundary layers in a simple convection-diffusion problem // J. Differ. Equat. 2005. V. 213. P. 81–120.
4. *Андреев В.Б., Белухина И.Г.* Оценки в классах Гёльдера решения неоднородной задачи Дирихле для сингулярно возмущенного однородного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 264–276.
5. *Андреев В.Б.* К оценке гладкости регулярной составляющей решения одномерного сингулярно возмущенного уравнения конвекции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 1. С. 22–33.
6. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1971.
7. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1962.
8. *Protter M.H., Weinberger H.F.* Maximum principles in differential equations. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984.
9. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.