ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 2, с. 303–311

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.5

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ[1)]

© 2021 г. А. Ю. Чеботарев

690041 Владивосток, ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН, Россия

e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 12.02.2019 г.
Переработанный вариант 20.08.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Рассматривается обратная задача для системы полулинейных эллиптических уравнений, моделирующих радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Задача состоит в отыскании правой части уравнения теплопроводности, являющейся линейной комбинацией данных функционалов, по заданным значениям этих функционалов на решении. Разрешимость обратной задачи доказана без ограничений малости. Представлено достаточное условие единственности решения. Библ. 41.

Ключевые слова: стационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, обратная задача, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466921020058

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи радиационно-кондуктивного (сложного) теплообмена представляют интерес в связи с инженерными и медицинскими приложениями (см. [1]–[5]). В [6]–[22] выполнен анализ краевых задач и задач оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с диффузионным P_1 приближением уравнения переноса излучения. Анализ различных краевых задач, связанных с радиационным теплообменом, представлен в [23]–[28].

В [21] представлены построение и анализ стационарной модели сложного теплообмена в рамках P_1 приближения для многокомпонентной трехмерной области с учетом эффектов отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Настоящая работа посвящена анализу обратной задачи для указанной нелинейной модели сложного теплообмена. Задача заключается в отыскании неизвестных интенсивностей тепловых источников (объемных или поверхностных), а также соответствующих полей температуры и теплового излучения, по заданным значениям некоторых функционалов на решении краевой задачи. Близкие обратные задачи для стационарных уравнений сложного теплообмена рассмотрены в [29] и для квазистационарных уравнений в [31], [41].

Задачи восстановления неизвестных функций источников в эллиптических и параболических уравнениях и системах с интегральными и точечными условиями переопределения рассматривались в работах С.Г. Пяткова и др. (см. [32]–[35]). Обратные задачи с конечномерным переопределением для уравнений Навье–Стокса, уравнений тепловой конвекции и других моделей сплошных сред представлены в [36]–[41].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 ставится прямая краевая задача с условиями сопряжения, определяются пространства и операторы, обратная задача формулируется в виде системы уравнений с операторными коэффициентами. Разрешимость обратной задачи доказана в разд. 3. Достаточное условие единственности решения получено в разд. 4, а в разд. 5 представлено доказательство вспомогательных результатов.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2019-1878).

2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Процесс сложного теплообмена рассматривается в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В области Ω содержится конечное число липшицевых подобластей Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, замыкания которых не пересекаются.

Подобласть

$$\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{p} \bar{\Omega}_j \right)$$

является внешней, при этом $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Процесс описывается следующими функциями: θ – нормализованная температура и φ – нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Указанные функции в каждой из областей Ω_j, $j = 0, 1, \ldots, p$, удовлетворяют уравнениям

$$-a\Delta\theta + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f_s, \quad -\alpha\Delta\varphi + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = 0. \tag{1}$$

Положительные физические параметры a, b, α и β, описывающие свойства среды, определяются стандартным образом (см. [21]). Отметим, что указанные параметры, так же как и коэффициент преломления $n > 0$, принимают постоянные значения в областях Ω_j, $j = 0, 1, \ldots, p$, и при этом, что важно, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{const} > 0$. Функция f_s моделирует тепловые источники.

На внешней границе $\Gamma = \partial\Omega$ заданы краевые условия

$$\{a\partial_\nu\theta + c(\theta - \theta_b)\}|_\Gamma = 0, \quad \{\alpha\partial_\nu\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\}|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где θ_b – заданная граничная температура, c – коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \le 1/2$ – параметр, зависящий от коэффициента излучения. Через ∂_ν обозначаем производную в направлении внешней нормали ν к границе.

Условия сопряжения для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ на внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, выведенные в [21], имеют следующий вид:

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_\nu\theta_0 = a_j\partial_\nu\theta_j, \tag{3}$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_\nu\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_\nu\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_\nu\varphi_0. \tag{4}$$

Здесь $\{a_j, \alpha_j, n_j\} = \{a, \alpha, n\}|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах (см. [21]).

Для формализации краевой задачи будем использовать пространства Лебега L^s, $1 \le s \le \infty$, и пространства Соболева $H^s = W_2^s$. Обозначим $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ и

$$W = \{w \in H : w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j),\ j = 0, 1, \ldots, p\} \subset L^6(\Omega).$$

Отождествляя пространство H с сопряженным пространством H', получаем включения $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Здесь W', V' – пространства, сопряженные с W и V соответственно. Через (f, v) будем обозначать значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H, если $f, v \in H$. Кроме того,

$$\|v\|^2 = (v, v), (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j, (v, w)_W = \sum_{j=0}^{p} (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Далее будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют следующим условиям, естественным с физической точки зрения:

(i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \ge c_0 > 0$, $\gamma \ge \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \text{const}$;

(ii) $\{a, b, \alpha, \beta, n\}|_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\}$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{const} > 0$;

(iii) $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$; $f_s \in V'$.

Определим следующие операторы и функционалы $A_1 : V \to V'$, $A_2 : W \to W'$, $f \in V'$, $g \in W'$, используя равенства

$$(A_1\theta, \eta) = (a\nabla\theta, \nabla\eta) + \int_\Gamma c\theta\eta d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, w) = \sigma\sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2(\nabla\varphi, \nabla w)_j + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\varphi w d\Gamma + \sigma n_0^2\sum_{j=1}^p h_j\int_{\Gamma_j}(\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j)d\Gamma,$$

$$(f, \eta) = \int_\Gamma c\theta_b\eta d\Gamma, \quad (g, w) = \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\theta_b^4 w d\Gamma,$$

которые справедливы для всех $\theta, \eta \in V$ и $\varphi, w \in W$. Здесь $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$.

Отметим сразу, что билинейная форма (A_1u, v) определяет норму, эквивалентную стандартной норме пространства V, и поэтому в дальнейшем полагаем $\|v\|_V^2 = (A_1v, v)$. В дальнейшем будем использовать следующие неравенства непрерывности вложений $V \subset L^s(\Omega)$, $W \subset L^s(\Omega)$, $1 \le s \le 6$:

$$\|v\|_{L^s(\Omega)} \le K_1\|v\|_V, \quad v \in V, \quad \|w\|_{L^s(\Omega)} \le K_2\|w\|_W, \quad w \in W, \quad 1 \le s \le 6.$$

Пусть $[t]^q = |t|^q \operatorname{sign} t$, $q > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Указанная функция является монотонной и при этом $d[t]^q/dt = q|t|^{q-1}$.

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times W$ называется слабым решением задачи (1)–(4), если

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f + f_s, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g. \tag{5}$$

Указанная слабая формулировка выводится обычным образом. Достаточно умножить уравнения (1) на тестовые функции $\eta \in V$ и $\sigma n^2\psi \in W$ соответственно и проинтегрировать по частям по областям Ω_j, применяя краевые условия (2) и условия сопряжения (3), (4).

Для постановки обратной задачи рассмотрим линейно независимую систему функционалов $\{f_1, \ldots, f_m\}$ из V' и предположим, что $f_s \in V'$ в первом уравнении (5) имеет вид $f_s = \sum_1^m q_j f_j$. Интенсивности источников $q_j \in \mathbb{R}$ считаются неизвестными, но задаются значения указанных функционалов на решении $\theta \in V$. Таким образом, приходим к следующей постановке.

Задача (IP). Найти $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$, $\theta \in V$, $\varphi \in W$ такие, что

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f + \sum_1^m q_j f_j, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g, \quad (f_j, \theta) = r_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Здесь вектор $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$ является заданным.

Типичным примером обратной задачи, которая возникает при моделировании процессов лазерной абляции (см. [5]), является задача нахождения интенсивностей тепловых источников, локализованных в Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, по средним значениям температуры в этих подобластях. В этом случае $f_j(x) = 1$, если $x \in \Omega_j$, и $f_j(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus \Omega_j$, а условия переопределения имеют вид $\int_{\Omega_j} \theta dx = r_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Предварительно сформулируем следующие вспомогательные результаты, доказательство которых приводится в конце статьи.

Лемма 1. *Для каждого* $\eta \in W'$ *существует единственное решение* $\varphi \in W$ *уравнения*

$$A_2\varphi + b\varphi = \eta. \tag{7}$$

Лемма 2. *Матрица с элементами* $\sigma_{kj} = (f_j, A_1^{-1}f_k)$, $j, k = 1, 2, \ldots, m$, *является невырожденной*.

Лемма 3. *Пусть для* $\zeta \in W$

$$E(\zeta) = \sigma \sum_{j=0}^{p} \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma \zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j=1}^{p} h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma.$$

Тогда величина $K = \inf\{E(\zeta) : \|\zeta\| = 1\}$ *строго положительна и справедливо неравенство*

$$K\|w\|^2 \le E(w) \quad \forall w \in W.$$

Сведем обратную задачу (IP) к операторному уравнению относительно неизвестной функции $\theta \in V$. Пусть $\{q, \theta, \varphi\} \in \mathbb{R}^m \times V \times W$ – решение задачи (IP). В силу леммы 1 заключаем, что $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g + b[\theta]^4)$. Далее, умножим скалярно уравнение для θ на $A_1^{-1} f_k$ и учтем, что $(A_1\theta, A_1^{-1} f_k) = (f_k, \theta) = r_k$. Поэтому интенсивности $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^m$ являются решением системы

$$\sum_1^m \sigma_{kj} q_j = r_k + (b([\theta]^4 - \varphi) - f, A_1^{-1} f_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad \sigma_{kj} = (f_j, A_1^{-1} f_k), \tag{8}$$

которая, в силу леммы 2, однозначно разрешима для заданных $\theta \in V$, $\varphi \in W$. Таким образом, функция $\theta \in V$ является решением операторного уравнения

$$A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f + \sum_1^m q_j f_j, \quad \text{где} \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g + b[\theta]^4), \tag{9}$$

а числа $q_1, \ldots, q_m$ являются решением системы (8). Очевидно, что задача (8), (9) эквивалентна задаче (IP).

Определим нелинейный оператор $F : V \to V$, используя равенство

$$(F(\theta), z)_V = \left(f + \sum_1^m q_j f_j - b([\theta]^4 - \varphi), z \right) \quad \forall z \in V, \tag{10}$$

где $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g + b[\theta]^4)$, $q_1, \ldots, q_m$, – решение системы (8). Учитывая определение скалярного произведения в пространстве V, $(u, v)_V = (A_1 u, v)$, заключаем, что задача (8), (9) сводится к уравнению $\theta = F(\theta)$.

Лемма 4. *Оператор* $F : V \to V$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть $\theta_{1,2} \in V$, $\|\theta_{1,2}\|_V \le \rho$, $\hat{\theta} = \theta_1 - \theta_2$. Из определения оператора F следует равенство

$$(F(\theta_1) - F(\theta_2), z)_V = \left(\sum_1^m \hat{q}_j f_j - b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) + b\hat{\varphi}, z \right) \quad \forall z \in V, \tag{11}$$

где $\hat{\varphi}$ и $\hat{q}_j$ таковы, что

$$A_2\hat{\varphi} + b\hat{\varphi} = b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), \quad \sum_1^m \sigma_{kj} \hat{q}_j = (b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) - b\hat{\varphi}, A_1^{-1} f_k), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

Для оценки правой части в (11) используем неравенства

$$\left|(b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), z)\right| \le 2 \max b \left(\|\theta_1\|^3_{L^6(\Omega)} + \|\theta_2\|^3_{L^6(\Omega)} \right) \|\hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|z\|_{L^4(\Omega)} \le C_1 \|\hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|z\|_{L^4(\Omega)}.$$

Здесь $C_1 = 4 \max b K_1^3 \rho^3$.

Первое уравнение в (12) умножим скалярно на $\hat{\varphi}$ и отбросим неотрицательные граничные интегралы в левой части. Тогда

$$\min\{\sigma\alpha n^2, b\} \|\hat{\varphi}\|_W^2 \le C_1 \|\hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|\hat{\varphi}\|_{L^4(\Omega)} \le C_1 K_2 \|\hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)} \|\hat{\varphi}\|_W.$$

Следовательно, $\|\hat{\varphi}\|_W \le C_2 \|\hat{\theta}\|_{L^4(\Omega)}$, где $C_2 = C_1 K_2 / \min\{\sigma\alpha n^2, b\}$.

Далее,

$$\left(\sum_1^m \hat{q}_j f_j, z\right) \le mK_3C_1 \max\left\|A_1^{-1} f_k\right\|_{L^4(\Omega)} \max\|f_j\|\left\|\hat{\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}\|z\| \le C_3\left\|\hat{\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}\|z\|_V .$$

Здесь $K_3 > 0$ — норма матрицы, обратной к (σ_{kj}).

Полученные неравенства позволяют оценить правую часть (11):

$$(F(\theta_1) - F(\theta_2), z)_V \le (C_3 + C_1K_2 + \max bK_1K_2C_2)\left\|\hat{\theta}\right\|_{L^4(\Omega)}\|z\|_V .$$

Полагая в последнем неравенстве $z = F(\theta_1) - F(\theta_2)$, получаем оценку

$$\|F(\theta_1) - F(\theta_2)\|_V \le (C_3 + C_1K_2 + \max bK_1K_2C_2)\|\theta_1 - \theta_2\|_{L^4(\Omega)} .$$

Поскольку вложение $V \subset L^4(\Omega)$ непрерывно и компактно, из полученной оценки следует, что оператор F вполне непрерывен.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Тогда существует решение задачи* (IP).

Доказательство. Для доказательства существования неподвижной точки вполне непрерывного оператора F достаточно, на основании принципа Лере–Шаудера, показать равномерную по $\lambda \in (0, 1]$ ограниченность в пространстве V множества решений операторного уравнения $\theta = \lambda F(\theta)$. Из определения оператора F следуют равенства

$$\frac{1}{\lambda}A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f + \sum_1^m q_j f_j, A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g, \tag{13}$$

где q_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, — решение системы (8). Заметим сразу, что из (13) следует равенство $(f_k, \theta) = \lambda r_k$.

Выберем $r \in V$ так, что $(f_k, r) = r_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Поскольку $C^\infty(\bar{\Omega})$ плотно в пространстве $H^1(\Omega) = V$, в дальнейшем считаем, что $r \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Умножим скалярно первое уравнение в (13) на $(\theta - \lambda r)$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda}(A_1\theta, \theta - \lambda r) + (b([\theta]^4 - \varphi), \theta - \lambda r) = (f, \theta - \lambda r).$$

Поскольку $\frac{1}{\lambda}(A_1\theta, \theta - \lambda r) \ge \frac{1}{\lambda}(A_1\theta, \theta) - \frac{1}{2}(A_1\theta, \theta) - \frac{1}{2}(A_1 r, r) \ge \frac{1}{2}(A_1\theta, \theta) - \frac{1}{2}(A_1 r, r)$, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}(A_1\theta, \theta) + (b([\theta]^4 - \varphi), \theta - \lambda r) \le (f, \theta - \lambda r) + \frac{1}{2}(A_1 r, r). \tag{14}$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$,

$$\mu_\varepsilon(t) = \begin{cases} t - \varepsilon, & t > \varepsilon, \\ 0, & |t| \le \varepsilon, \\ t + \varepsilon, & t < -\varepsilon; \end{cases} \qquad \psi_\varepsilon = \mu_\varepsilon([\varphi]^{1/4}) \in W.$$

Умножая скалярно второе уравнение в (13) на $(\psi_\varepsilon - \lambda r)$, получаем равенство

$$(A_2\varphi, \psi_\varepsilon - \lambda r) + (b(\varphi - [\theta]^4), \psi_\varepsilon - \lambda r) = (g, \psi_\varepsilon - \lambda r).$$

В полученном равенстве перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$. Тогда аналогично [29, теорема 1] заключаем, что $\zeta = [\varphi]^{5/8} \in W$ и справедливо равенство

$$\begin{gathered} \frac{16\sigma}{25}\sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla\zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma\zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma + \\ + (b(\varphi - [\theta]^4), [\varphi]^{1/4} - \lambda r) = \lambda\sigma \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \int_{\Omega_j} \nabla[\zeta]^{8/5} \nabla r dx + \lambda\sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma[\zeta]^{8/5} r d\Gamma + \sigma n_0^2 \int_\Gamma \gamma\theta_b^4([\zeta]^{2/5} - \lambda r) d\Gamma. \end{gathered} \tag{15}$$

Из равенства (15), учитывая определение функционала E (лемма 3), выводим неравенство

$$\frac{3}{5}E(\zeta)+\frac{\sigma}{25}\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2\|\nabla\zeta\|_j+\frac{2}{5}\sigma n_0^2\int_\Gamma\gamma\zeta^2d\Gamma+(b(\varphi-[\theta]^4),[\varphi]^{1/4}-\lambda r)\le$$
$$\le\frac{8}{5}\sigma\sum_{j=0}^{p}\alpha_j n_j^2\int_{\Omega_j}|\zeta|^{3/5}|\nabla\zeta||\nabla r|\,dx+\sigma n_0^2\int_\Gamma\gamma|\zeta|^{8/5}|r|\,d\Gamma+\sigma n_0^2\int_\Gamma\gamma\theta_b^4(|\zeta|^{2/5}+|r|)d\Gamma. \tag{16}$$

Учтем, что в силу леммы 3, справедливо неравенство $K\|\zeta\|^2\le E(\zeta)$, а подынтегральные выражения в правой части (16) оценим, используя следующие неравенства Юнга с параметром $\delta>0$:

$$|\zeta|^{3/5}|\nabla\zeta||\nabla r|\le\frac{\delta^2}{2}|\nabla\zeta|^2+\frac{3}{10}\delta^{10/3}\zeta^2+\frac{1}{5}\delta^{-10}|\nabla r|^5,$$
$$|\zeta|^{8/5}|r|\le\frac{4}{5}\delta^{5/4}\zeta^2+\frac{1}{5}\delta^{-5}|r|^5,\quad \theta_b^4|\zeta|^{2/5}\le\frac{1}{5}\delta^5\zeta^2+\frac{4}{5}\delta^{-5/4}\theta_b^5.$$

Выбрав параметр $\delta=\delta(K,\alpha,n)$ достаточно малым, выводим из (16) неравенство

$$(b(\varphi-[\theta]^4),[\varphi]^{1/4}-\lambda r)\le C_0.$$

Здесь постоянная C_0 зависит только от величин K, α, n и функций θ_b, r и, что важно, не зависит от $\lambda\in(0,1]$. Сложив полученное неравенство с (14), получаем

$$\frac{1}{2}(A_1\theta,\theta)+(b([\theta]^4-\varphi),\theta-[\varphi]^{1/4})\le C_0+(f,\theta-\lambda r)+\frac{1}{2}(A_1r,r).$$

В последней оценке можно опустить второе слагаемое в левой части, поскольку оно неотрицательно. Далее, используя неравенство $(f,\theta)\le\|f\|_{V'}^2+(1/4)\|\theta\|_V^2$, получаем оценку равномерной по λ ограниченности множества решений операторного уравнения $\theta=\lambda F(\theta)$:

$$\|\theta\|_V^2=(A_1\theta,\theta)\le 4C_0+4\|f\|_{V'}^2+4|(f,r)|+2\|r\|_V^2. \tag{17}$$

Из оценки (17) следует разрешимость обратной задачи (IP).

4. УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обозначим через $\mathcal{R}\subset\mathcal{V}$ множество решений задачи (9), т.е. множество θ-компонент решений задачи (IP). Из доказательства теоремы 1 следует, что при выполнении условий (i)–(iii), указанное множество ограничено в V и в пространстве $L^6(\Omega)$. Оценим разность двух функций из множества $\mathcal{R}$.

Пусть $\theta_{1,2}\in\mathcal{R}$, $\theta=\theta_1-\theta_2$, $\xi=([\theta_1]^4-[\theta_2]^4)/(\theta_1-\theta_2)$. Заметим, что, в силу неравенства

$$0\le\xi\le 2(|\theta_1|^3+|\theta_2|^3),$$

функция $\xi\in L^2(\Omega)$ и $M=\sup\{\|\xi\|,\theta_{1,2}\in\mathcal{R}\}<+\infty$.

Из уравнения (9) для θ_1 вычтем аналогичное уравнение для θ_2 и умножим первое уравнение скалярно на θ, учитывая, что $(f_k,\theta)=0$, $k=1,2,\ldots,m$. Тогда

$$(A_1\theta+b(\xi\theta-\varphi),\theta)=0,\quad\text{где}\quad\varphi=(A_2+bI)^{-1}(b\xi\theta). \tag{18}$$

Заметим, что

$$(b\varphi,\theta)=((A_2+bI)^{-1}(b\xi\theta),b\theta)=(b\xi\theta,\psi)\le(b\xi\theta,\theta)+\frac{1}{4}(b\xi\psi,\psi),$$

где

$$A_2\psi+b\psi=b\theta. \tag{19}$$

Тогда из (18) следует неравенство

$$\|\theta\|_V^2 = (A_1\theta,\theta) \le \frac{1}{4}(b\xi\psi,\psi) \le \frac{1}{4}\|b^{1/2}\xi\|\|b^{1/4}\psi\|^2_{L^4(\Omega)} \le \frac{M\max b^{1/2}}{4}\|b^{1/4}\psi\|^2_{L^4(\Omega)}. \quad (20)$$

Умножим уравнение (19) скалярно на ψ^3 и отбросим неотрицательное слагаемое $(A_2\psi,\psi^3)$. Используя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$$\|b^{1/4}\psi\|^4_{L^4(\Omega)} \le (b\theta,\psi^3) \le \|b^{1/4}\theta\|_{L^4(\Omega)}\|b^{1/4}\psi\|^3_{L^4(\Omega)}, \quad \|b^{1/4}\psi\|_{L^4(\Omega)} \le \|b^{1/4}\theta\|_{L^4(\Omega)}.$$

Справедливы также мультипликативное неравенство для нормы в $L^4(\Omega)$ и неравенство вложения V в $L^4(\Omega)$:

$$\|\theta\|^2_{L^4(\Omega)} \le \|\theta\|^{1/2}\|\theta\|^{3/2}_{L^6(\Omega)}, \quad \|\theta\|_{L^6(\Omega)} \le K_1\|\theta\|_V.$$

Таким образом, из (20) следует неравенство

$$\|\theta\|_V^2 \le K_1^6\left(\frac{M\max b}{4}\right)^4\|\theta\|^2. \quad (21)$$

В силу теоремы Гильберта–Шмидта, собственные функции $\{w_j\}$ оператора A_1, определяемые из условий $A_1w_j = \lambda_jw_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $(w_i,w_j) = \delta_{ij}$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$, образуют базис пространств H и V, причем $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Поскольку $\lambda_1\|\theta\|^2 \le (A_1\theta,\theta)$, то из оценки (21) следует единственность решения задачи (IP), если выполняется условие

$$\lambda_1 > K_1^6\left(\frac{M\max b}{4}\right)^4. \quad (22)$$

В общем случае из оценки (21), аналогично [29], в силу компактности вложения пространства V в H, следует конечномерная структура множества $\mathcal{R}$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (*i*). *Тогда множество решений задачи* (IP) *непусто и гомеоморфно компакту, лежащему в конечномерном пространстве, а если выполняется условие* (22), *то решение единственно.*

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 1–3

Лемма 1. *Для каждого* $\eta \in W'$ *существует единственное решение* $\varphi \in W$ *уравнения*

$$A_2\varphi + b\varphi = \eta. \quad (23)$$

Доказательство. Утверждение следует из леммы Лакса–Мильграма, поскольку билинейная форма $a(\varphi,\psi) = (A_2\varphi + b\varphi,\psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно-определенной в пространстве W.

Лемма 2. *Матрица с элементами* $\sigma_{kj} = (f_j, A_1^{-1}f_k)$, $j,k = 1, 2, \ldots, m$, *является невырожденной.*

Доказательство. Достаточно проверить, что следующая однородная линейная система

$$\sum_{j=1}^m (f_j, A_1^{-1}f_k)c_j = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет только тривиальное решение. Умножим k-е уравнение системы на c_k и просуммируем. Тогда для $z = \sum_1^m c_jf_j$ получим $(z, A_1^{-1}z) = 0$. Следовательно, $z = 0$ и в силу линейной независимости функционалов $f_1, \ldots, f_m$ получаем $c_1 = \ldots = c_m = 0$.

Лемма 3. *Пусть для* $\zeta \in W$

$$E(\zeta) = \sigma\sum_{j=0}^p \alpha_jn_j^2\|\nabla\zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2\int_\Gamma \gamma\zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2\sum_{j=1}^p h_j\int_{\Gamma_j}([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5})d\Gamma.$$

Тогда величина $K = \inf\{E(\zeta) : \|\zeta\| = 1\}$ *строго положительна и справедливо неравенство*

$$K\|w\|^2 \leq E(w) \quad \forall w \in W.$$

Доказательство. Пусть $K = 0$. Тогда имеется минимизирующая последовательность $\zeta^{(k)} \in W$, $\|\zeta^{(k)}\| = 1$, $E(\zeta^{(k)}) \to 0$. Из определения функционала E вытекает, что

$$\|\nabla\zeta^{(k)}\|_{L^2(\Omega_j)} \to 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p, \quad \int_\Gamma \gamma(\zeta^{(k)})^2 d\Gamma \to 0.$$

Следовательно, найдется $\zeta \in W$ такая, что $\zeta^{(k)} \to \zeta$ сильно в H, $\zeta^{(k)}\big|_{\Omega_j} \to \zeta\big|_{\Omega_j}$ сильно в $H^1(\Omega_j)$ и, кроме того,

$$\zeta\big|_{\Omega_j} = c_j = \mathrm{const}_j, \quad \|\zeta\| = 1, \quad \int_\Gamma \gamma\zeta^2 d\Gamma = 0.$$

Поэтому $\zeta_0 = \zeta\big|_{\Omega_0} = c_0 = 0$. Далее, поскольку для $j = 1, 2, \ldots, p$

$$\int_{\Gamma_j} ([\zeta_0^{(k)}]^{8/5} - [\zeta_j^{(k)}]^{8/5})([\zeta_0^{(k)}]^{2/5} - [\zeta_j^{(k)}]^{2/5}) d\Gamma \to 0,$$

получаем в пределе, что $\int_{\Gamma_j} \zeta^2 d\Gamma = 0$. Таким образом, $c_1 = \ldots = c_p = 0$ и $\zeta = 0$, что противоречит равенству $\|\zeta\| = 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Larsen E.W., Thömmes G., Klar A., Seaïd M., Götz M.* Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // J. Comput. Phys. 2002. V. 183. № 2. P. 652–675.
2. *Modest M.F.* Radiative Heat Transfer. New York: Academic Press, 2003.
3. *Thömmes G., Pinnau R., Seaïd M., Götz M., Klar A.* Numerical methods and optimal control for glass cooling processes // Transport Theory Statistic. Phys. 2002. V. 31. № 4–6. P. 513–529.
4. *Tse O., Pinnau R.* Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Commun. Math. Sci. 2013. V. 11. № 3. P. 679–707.
5. *Ковтанюк А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. 2. С. 194–199.
6. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1-system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
7. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 562–576.
9. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 275–282.
10. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
11. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu.* An iterative method for solving a complex heat transfer problem // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219. № 17. P. 9356–9362.
12. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 409. № 2. P. 808–815.
13. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
14. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1590–1597.
15. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
16. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.

17. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. № 2. P. 678–689.

18. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.

19. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Нелокальная однозначная разрешимость стационарной задачи сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 5. С. 816–823.

20. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.

21. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communicat. Nonlin. Sci. Numeric. Simulat. 2018. V. 57. P. 290–298.

22. *Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D.* Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Communicat. Nonlin. Sci. Numeric. Simulat. 2019. V. 75. P. 262–269.

23. *Амосов А.А.* Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением // Дифференц. ур-ния. Т. 41. № 1. 2005. С. 93–104.

24. *Amosov A.A.* Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency // J. Math. Sci. 2010. V. 164. № 3. P. 309–344.

25. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative-Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Rus. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.

26. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. Math. Sci. (United States). 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.

27. *Amosov A.A.* Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions // J. Math. Sci. 2020. V. 244. P. 541–575.

28. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. Math. Sci. (United States). 2020. V. 244. P. 357–377.

29. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.

30. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.

31. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1420–1430.

32. *Пятков С.Г., Сафонов Е.И.* О некоторых классах линейных обратных задач для параболических систем уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 777–799.

33. *Пятков С.Г., Уварова М.В.* Об определении функции источника в задачах тепломассопереноса по интегральным условиям переопределения // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 4. С. 93–100.

34. *Пятков С.Г.* О некоторых классах обратных задач об определении функции источника в системах конвекции–диффузии // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 10. С. 1385.

35. *Пятков С.Г., Ротко В.В.* Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения // Матем. тр. 2019. Т. 22. № 1. С. 178–204.

36. *Chebotarev A.Yu.* Subdifferential inverse problems for stationary systems of Navier–Stokes type // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3. № 4. P. 268–277.

37. *Чеботарев А.Ю.* Определение правой части системы Навье–Стокса и обратные задачи для уравнений тепловой конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 12. С. 2279–2287.

38. *Чеботарев А.Ю.* Стабилизация сторонними токами равновесных МГД конфигураций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2238–2246.

39. *Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для систем Навье–Стокса с конечномерным переопределением // Дифференц. ур-ния. 2012. Т. 48. № 8. С. 1166.

40. *Чеботарев А.Ю.* Обратные задачи для стационарных систем Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 519–528.

41. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Y., Botkin N.D., Turova V.L., Sidorenko I.N., Lampe R.* Continuum model of oxygen transport in brain // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 474. P. 1352–1363.