ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 2, с. 256–267

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.956.4

УГЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КУБИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

И. В. Денисов

300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия

e-mail: den@tspu@mail:ru

Поступила в редакцию 04.06.2000 г.
Переработанный вариант 23.07.2000 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon)$$

в прямоугольнике рассматривается задача с краевыми условиями I рода. Предполагается, что в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической. Строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon\to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 10.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466921020071

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается начально-краевая задача вида

$$\epsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,0,\epsilon)=\phi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t,\epsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\epsilon)=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T. \tag{0.3}$$

Через Ω обозначен прямоугольник $\{(x,t)|0<x<1, 0<t<T\}$.

Ранее в работах [1]– [5] проведены исследования в предположении, что в угловых точках прямоугольника $(0,0)$ и $(1,0)$ функция F является квадратичной относительно переменной u на промежутке от корня вырожденного уравнения до граничного значения. Построено полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon\to 0$ и обоснована равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

В работе [6] была предпринята попытка распространить полученные результаты на произвольную монотонную нелинейность. Для доказательства существования подходящих решений нелинейных задач использовался метод верхних и нижних решений. Однако выполнение необходимых неравенств в общем случае доказать не удалось и пришлось их выполнение постулировать. Кроме рассмотренных ранее квадратичных нелинейностей этим неравенствам удовлетворяли и некоторые другие нелинейные функции, что, несомненно, являлось продвижением в исследовании общей задачи. Однако класс подходящих нелинейных функций не был полностью изучен. В данной статье рассматриваются кубические нелинейности. Для предлагаемых барьерных функций необходимые неравенства доказываются. Строится полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon \to 0$ и обосновывается равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике с точностью любого порядка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть, как и в предыдущих работах, выполнены следующие условия.

Условие 1. Функции $F(u,x,t,\epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений:

$$\phi(0) = \psi_1(0), \quad \phi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x,t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0), \tag{1.1}$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0,1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0), \tag{1.2}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2) = (0,0)$ при $y \to \infty$ (здесь t – параметр, $k = 0$ или 1).

Условий 1–5 недостаточно, чтобы гарантировать существование решения задачи (0.1)–(0.3) для произвольной функции $F(u,x,t,\epsilon)$. Поэтому требуются дополнительные условия, гарантирующие возможность построения асимптотики решения. Эти условия будут заключаться в выборе определенного класса функций. Решение задачи (0.1)–(0.3) строится согласно методу угловых пограничных функций (см. [7]) в виде суммы

$$u(x,t,\epsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*), \tag{1.3}$$

где $\bar{u}$ обозначает функцию, называемую регулярной частью асимптотики. Эта функция представляет решение задачи во внутренней части прямоугольника Ω без учета граничных условий. Пограничные функции Π, Q и Q^* осуществляют гладкий переход от регулярной части к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω: $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Угловые пограничные функции P и P^* сглаживают невязки, вносимые пограничными функциями вблизи вершин прямоугольника Ω: $(0,0)$ и $(1,0)$ соответственно.

2. РЕГУЛЯРНАЯ И ПОГРАНСЛОЙНАЯ ЧАСТИ АСИМПТОТИКИ

Формальная процедура построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций хорошо отработана (см. [7]), однако, чтобы не обращаться к другим источникам, повторим ее схематично. В уравнении (0.1) функция F заменяется выражением, аналогичным (1.3):

$$F(u,x,t,\epsilon) = \bar{F} + (\Pi F + QF + Q^*F) + (PF + P^*F). \tag{2.1}$$

Выражения (1.3) и (2.1) подставляются в уравнение (0.1), которое разделяется на шесть частей: регулярную, три погранслойных и две угловых. Регулярная часть асимптотики $\bar{u}$ строится в виде ряда по степеням ϵ:

$$\bar{u}(x,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \bar{u}_k(x,t). \tag{2.2}$$

Коэффициент $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(x,t)$ выбирается в соответствии с условиями 2 и 3, а последующие функции $\bar{u}_k, k \geq 1$, строятся рекуррентно.

Пусть $\partial\Omega$ обозначает границу прямоугольника Ω без стороны $t = T$. Регулярная часть $\bar{u}(x,t,\epsilon)$ асимптотики дает решение задачи (0.1)–(0.3) внутри прямоугольника Ω, но на границе $\partial\Omega$ функция $\bar{u}(x,t,\epsilon)$, вообще говоря, не совпадает с начальным и граничными значениями. В связи с этим возникает так называемая "невязка".

Погранслойная часть асимптотики вводится для устранения невязок регулярной части с начальным и граничными условиями. Погранслойные функции Π, Q и Q^* определяются из уравнений, в которых переходят к растянутым переменным

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}.$$

Функции Π, Q и Q^* ищутся в виде рядов

$$\Pi(x,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \Pi_k(x,\tau), \tag{2.3}$$

$$Q(\xi,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k(\xi,t), \tag{2.4}$$

$$Q^*(\xi_*,t,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k Q_k^*(\xi_*,t). \tag{2.5}$$

На стороне $t = 0$ невязки в начальном условии (0.2) призвана устранить функция $\Pi = \Pi(x,\tau,\epsilon)$. При переходе от переменных (x,t) к переменным (x,τ) прямоугольник Ω при $\epsilon \to 0$ растягивается до полуполосы $0 \le x \le 1$, $0 \le \tau < \infty$.

Для $\Pi_0 = \Pi_0(x,\tau)$ получается задача

$$-\frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = F\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right), \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0). \tag{2.6}$$

Здесь x играет роль параметра. В силу условия 4 эта задача имеет решение, для которого в силу условия 3 справедлива экспоненциальная оценка убывания вида

$$\left|\Pi_0(x,\tau)\right| \le C\exp(-\kappa\tau), \tag{2.7}$$

где C и κ – некоторые положительные числа.

Задачи для определения функций $\Pi_k = \Pi_k(x,\tau)$, $k \ge 1$, получаются линейными:

$$-\frac{\partial \Pi_k}{\partial \tau} = F'_u\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0\right)\Pi_k + \tilde{\pi}_k, \quad \Pi_k(x,0) = -\bar{u}_k(x,0). \tag{2.8}$$

Функции $\tilde{\pi}_k$ рекуррентно выражаются через функции Π_j, $j < k$, и их производные. Поэтому, если для функций Π_j, $j < k$, справедливы оценки вида (2.7), то для функций $\tilde{\pi}_k$ справедливы оценки того же вида.

Если величина $\phi(x) - \bar{u}_0(x,0)$ не равна тождественно нулю, то решения задач (2.8) имеют вид

$$\Pi_k(x,\tau) = -U(x,\tau)\bar{u}_k(x,0) - U(x,\tau)\int_0^{\tau} \left(U(x,\sigma)\right)^{-1}\tilde{\pi}_k(x,\sigma)d\sigma,$$

где

$$U(x,\tau) = \exp\left(-\int_0^{\tau} F'_u\left(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0(x,\lambda), x, 0, 0\right)d\lambda\right)$$

есть фундаментальное решение ($U(x,0) = 1$) соответствующего однородного уравнения, и справедлива оценка вида

$$\left|U(x,\tau)\left(U(x,\sigma)\right)^{-1}\right| \le C\exp(-\kappa(\tau - \sigma)),$$

где переменные $0 \le x \le 1$, $0 \le \sigma \le \tau$, а постоянные C и κ – положительные числа. Эта оценка позволяет для функции $\Pi_k(x,\tau)$ получить оценку вида (2.7).

Если величина $\phi(x) - \bar{u}_0(x,0) \equiv 0$, то $\Pi_0(x,\tau) \equiv 0$. Коэффициенты при Π_k в задачах (2.8) оказываются постоянными и положительными, т.е. задачи упрощаются.

Таким образом определяются коэффициенты ряда (2.3), и функция $\Pi(x,\tau,\epsilon)$ устраняет невязки с начальным условием (0.2) на стороне $t = 0$.

Построенная регулярная часть асимптотики вносит невязки и в граничные условия. На стороне $x = 0$ невязки в граничных условиях призвана устранить функция $Q = Q(\xi,t,\epsilon)$, где $\xi = x/\epsilon$ – растянутая переменная. При переходе от переменных (x,t) к переменным (ξ,t) прямоугольник Ω при $\epsilon \to 0$ растягивается до полуполосы $0 \le \xi < \infty$, $0 \le t \le T$.

Задача для $Q_0 = Q_0(\xi,t)$ имеет вид

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_0}{\partial \xi^2} = F\left(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0\right), \quad Q_0(0,t) = \psi_1(t) - \bar{u}_0(0,t), \quad Q_0(\infty,t) = 0, \tag{2.9}$$

где t играет роль параметра. Уравнение (2.9) эквивалентно системе (1.2), в которой следует положить $z_1 = Q_0(\xi,t),\ k = 0,\ y = \xi$. Условия затухания выделяют решения уравнения (2.9), для которых справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$\left|Q_0(\xi,t)\right| \le C\exp(-\kappa\xi), \tag{2.10}$$

где C и κ – положительные числа. Так как возможен переход с сепаратрисы на сепаратрису, то решение задачи (2.9) не единственно. Однако такие случаи мы исключаем и рассматриваем только монотонные решения.

Задачи для определения функций $Q_k(\xi,t),\ k \ge 1$, линейны:

$$a^2 \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \xi^2} = F'_u(\bar{u}_0(0,t) + Q_0, 0, t, 0)Q_k + \tilde{q}_k, \quad Q_k(0,t) = -\bar{u}_k(0,t), \quad Q_k(\infty,t) = 0. \tag{2.11}$$

Функции $\tilde{q}_k$ рекуррентно выражаются через функции $Q_j,\ j < k$, и их производные. Поэтому, если для функций $Q_j,\ j < k$, справедливы экспоненциальные оценки вида (2.10), то для функций $\tilde{q}_k$ справедливы оценки того же вида.

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0,t)$ не равна тождественно нулю, то решение задачи (2.11) имеет вид

$$Q_k(\xi,t) = -\frac{\Phi(\xi,t)}{\Phi(0,t)}\bar{u}_k(0,t) - \frac{\Phi(\xi,t)}{a(0,t)}\int_0^{\xi}\frac{d\lambda}{\Phi^2(\lambda,t)}\int_{\lambda}^{\infty}\Phi(\sigma,t)\tilde{q}_k(\sigma,t)d\sigma, \quad \Phi(\xi,t) = \frac{\partial Q_0(\xi,t)}{\partial \xi},$$

и для него справедлива оценка вида (2.10).

Если величина $\psi_1(t) - \bar{u}_0(0,t) \equiv 0$, то $Q_0(\xi,t) \equiv 0$, а коэффициент при Q_k в уравнениях (2.11) оказывается постоянным и положительным, т.е. задача упрощается.

Таким образом определяются коэффициенты ряда (2.4), и функция $Q(\xi,t,\epsilon)$ устраняет невязки в граничном условии на стороне $x = 0$.

Регулярная часть асимптотики вносит невязки в граничные условия и на стороне $x = 1$. Эти невязки устраняет функция $Q^* = Q^*(\xi_*,t,\epsilon)$, $\xi_* = (1-x)/\epsilon$, которая строится в виде ряда (2.5). Коэффициенты этого ряда Q_k^* определяются аналогично коэффициентам ряда (2.4) и для них справедливы экспоненциальные оценки убывания вида

$$|Q_k^*(\xi_*,t)| \le C\exp(-\kappa\xi_*),$$

где C и κ – положительные числа.

Таким образом, погранслойная часть асимптотики определяется полностью. Однако каждая в отдельности погранслойная функция, устраняя невязки на соответствующей стороне, в свою очередь вносит невязки на примыкающие стороны прямоугольника. Так, погранслойные функции $\Pi_k(x,\tau)$, устраняя невязки в начальном условии на стороне $t = 0$, вносят дополнительные невязки в граничные условия на сторонах $x = 0$ и $x = 1$. Эти невязки существенны только вблизи угловых точек (0,0) и (1,0), а далее, с ростом t, они экспоненциально затухают. Аналогичное влияние функции $Q_k(\xi,t)$ и $Q_k^*(\xi_*,t)$ оказывают на начальное условие на стороне $x = 0$.

3. УГЛОВАЯ ЧАСТЬ АСИМПТОТИКИ. ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

С целью устранения невязок с начальным и граничными условиями вблизи угловых точек $(0,0)$ и $(1,0)$ прямоугольника Ω вводятся угловые пограничные функции $P(\xi,\tau,\epsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\epsilon)$. Ввиду того, что не существует универсального метода их нахождения, задачи для определения функций $P(\xi,\tau,\epsilon)$ и $P^*(\xi_*,\tau,\epsilon)$ доставляют основные трудности. Практически каждая такая задача требует разработки новых методов решения.

Угловые пограничные функции будем искать в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k(\xi,\tau), \qquad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau).$$

Рассмотрим угловую точку (0,0). В окрестности этой точки невязки в условия (0.2), (0.3) вносят функции $\Pi(x,\tau,\epsilon)$ и $Q(\xi,t,\epsilon)$. Для устранения этих невязок служит функция $P(\xi,\tau,\epsilon)$, которая определяется из уравнения

$$\epsilon^2 \left(a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial t} \right)\Bigg|_{\substack{x=\varepsilon\xi \\ t=\varepsilon^2\tau}} = PF.$$

Задача для определения $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(\xi,\tau) | \xi > 0,\ \tau > 0\}$$

плоскости переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$\begin{gathered} a^2 \frac{\partial^2 P_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_0}{\partial \tau} = F\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau),0,0,0\right) - \\ - F\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau),0,0,0\right) - F\left(\bar{u}_0(0,0) + Q_0(\xi,0),0,0,0\right), \quad \xi > 0, \quad \tau > 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$P_0(0,\tau) = -\Pi_0(0,\tau), \quad P_0(\xi,0) = -Q_0(\xi,0), \quad P_0(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{3.2}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau)$, $k \ge 1$, в области $\mathbb{R}_+^2$ получаются линейные задачи

$$a^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P_k}{\partial \tau} = F_u'\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau),0,0,0\right) P_k + h_k, \tag{3.3}$$

$$P_k(0,\tau) = -\Pi_k(0,\tau), \quad P_k(\xi,0) = -Q_k(\xi,0), \quad P_k(\xi,\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty, \tag{3.4}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)| \le C \exp(-\kappa(\xi + \tau)), \tag{3.5}$$

если такого же вида оценкам удовлетворяют функции $P_0,\dots,P_{k-1}$. Здесь C и κ — некоторые положительные числа.

Если число $\phi(0,0) - \bar{u}_0(0,0) = 0$, то решением задачи (2.6) при $x = 0$ будет функция $\Pi_0(0,\tau) \equiv 0$, решением задачи (2.8) при $t = 0$ будет функция $Q_0(\xi,0) \equiv 0$. Решением задачи (3.1), (3.2) будет функция $P_0(\xi,\tau) \equiv 0$, а коэффициент в задачах (3.3), (3.4) будет постоянным и положительным:

$$F_u'\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau),0,0,0\right) = F_u'\left(\bar{u}_0(0,0),0,0,0\right) > 0.$$

В этом случае решения задач (3.3), (3.4) выписываются в явном виде и для них получаются экспоненциальные оценки вида (3.5).

Если число $\varphi(0,0) - \bar{u}_0(0,0) \ne 0$, то, вообще говоря, неизвестно, имеет или нет задача (3.1), (3.2) решение и удовлетворяет ли решение в случае существования экспоненциальной оценке вида (3.5). Кроме этого, в задачах (3.3), (3.4) коэффициент

$$F_u' := F_u'\left(\bar{u}_0(0,0) + \Pi_0(0,\tau) + Q_0(\xi,0) + P_0(\xi,\tau),0,0,0\right)$$

может в зависимости от вида функции F и величины $\phi(0,0)$ принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Даже в случае разрешимости задач (3.1)–(3.4) доказательство того, что задача (0.1)–(0.3) имеет решение, все равно остается проблемой. Это связано с тем, что, не зная явного вида функции $P_0(\xi,\tau)$, мы не можем знать явного вида коэффициента F'_u, который может оказаться как положительным, так и отрицательным. Если не накладывать дополнительных условий, то это обстоятельство, вообще говоря, не позволит обосновать построенную асимптотику решения.

Таким образом, в результате реализации метода угловых пограничных функций для исследования задачи (0.1)–(0.3) мы перешли к задачам (3.1)–(3.4). Дальнейшие исследования предполагают разрешение, по крайней мере, трех основных проблем.

1. Имеет ли задача (3.1), (3.2) решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида (3.5)?

2. Если задача (3.1), (3.2) имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке вида (3.5), то имеют ли задачи (3.3), (3.4) решения, удовлетворяющие подобным оценкам?

3. Если задачи (3.1)–(3.4) разрешимы, т.е. если ряд (1.3) может быть построен, то имеет ли задача (0.1)–(0.3) решение, для которого этот ряд будет асимптотическим представлением при $\epsilon \to 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$?

Задачи для угловых пограничных функций $P_k^*(\xi_*, \tau)$, ставятся аналогично.

4. КУБИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Будем рассматривать угловую точку $(0, 0)$ прямоугольника Ω и определим оператор L:

$$L(P) := a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \frac{\partial P}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0),$$

где

$$P = P(\xi, \tau), \quad F(u) = F(u, 0, 0, 0), \quad \bar{u}_0 = \bar{u}_0(0, 0), \quad \Pi_0 = \Pi_0(0, \tau), \quad Q_0 = Q_0(\xi, 0).$$

Задачу (3.1), (3.2) можно переписать в операторной форме:

$$L(P_0) = 0 \quad \text{в области} \quad \mathbb{R}_+^2, \tag{4.1}$$

$$P_0(0, \tau) = -\Pi_0(0, \tau), \quad P_0(\xi, 0) = -Q_0(\xi, 0), \quad P_0(\xi, \tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi + \tau \to \infty. \tag{4.2}$$

Для доказательства существования решения задачи (4.1), (4.2) используется метод верхних и нижних решений (см. [8]– [10]), который заключается в том, что задача

$$L(Z) = 0 \quad \text{в области} \quad \Omega, \quad Z = h \quad \text{на границе} \quad \partial\Omega$$

имеет решение Z в промежутке между барьерными функциями $Z_- \le Z \le Z_+$, если в области Ω выполняются неравенства

$$L(Z_+) \le 0, \quad L(Z_-) \ge 0, \quad Z_- \le Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_- \le h \le Z_+.$$

Барьерные функции для задачи (4.1), (4.2) желательно строить с расчетом, чтобы коэффициент F'_u в задачах (3.3), (3.4) был положительным. Это обеспечит существование решений $P_k(\xi, \tau)$ с оценками вида (3.5). В качестве возможного верхнего решения задачи (4.1), (4.2) рассмотрим функцию

$$Z_+(\xi, \tau) = 0.$$

Для определенности будем считать, что $\phi(0, 0) > \bar{u}_0(0, 0)$, т.е. граничное значение в точке $(0, 0)$ лежит правее корня вырожденного уравнения. Тогда значения Π_0 и Q_0 принадлежат промежутку $(0, \phi - \bar{u}_0]$, где $\phi - \bar{u}_0 > 0$, и на границе области $\mathbb{R}_+^2$ выполняются необходимые для верхнего решения неравенства:

$$Z_+(0, \tau) = 0 \ge -\Pi_0, \quad Z_+(\xi, 0) = 0 \ge -Q_0.$$

Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ нужно доказать неравенство

$$L(Z_+) = -F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \le 0. \tag{4.3}$$

Для краткости обозначим $\Pi_0 = y$, $Q_0 = z$, $L(Z_+) = L$, где $L = L(y,z)$. Тогда неравенство (4.3) примет вид

$$L = -F(\bar{u}_0 + y + z) + F(\bar{u}_0 + y) + F(\bar{u}_0 + z) \leq 0, \quad y, z \in (0, \phi - \bar{u}_0].$$

Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -F'(\bar{u}_0 + y + z) + F'(\bar{u}_0 + y) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -F'(\bar{u}_0 + y + z) + F'(\bar{u}_0 + z) = 0,$$

приводят к равенствам

$$F'(\bar{u}_0 + y + z) = F'(\bar{u}_0 + y) = F'(\bar{u}_0 + z). \tag{4.4}$$

На границе области из-за симметрии функции $L(y,z)$ можно рассмотреть только две из четырех сторон квадрата $(0, \phi - \bar{u}_0] \times (0, \phi - \bar{u}_0]$.

1. При $y = 0$ значения

$$L(0,z) = -F(\bar{u}_0 + z) + F(\bar{u}_0) + F(\bar{u}_0 + z) = 0.$$

2. При $y = \phi - \bar{u}_0$ значения

$$L(\phi - \bar{u}_0, z) = -F(\phi + z) + F(\phi) + F(\bar{u}_0 + z).$$

Необходимое неравенство $L(\phi - \bar{u}_0, z) \leq 0$ выполняется, если

$$F(\bar{u}_0 + u) + F(\phi) \leq F(\phi + u), \quad u \in (0, \phi - \bar{u}_0]. \tag{4.5}$$

Для проверки условия (4.5) нужно рассмотреть два куска графика функции $F(u)$: один – при $u \in (\bar{u}_0, \phi]$, а другой – при $u \in (\phi, \phi + \phi - \bar{u}_0]$. Первый кусок нужно сдвинуть параллельно вертикальной оси на величину $F(\phi)$, в связи с чем появляется функция

$$F_1(u) = F(\bar{u}_0 + u) + F(\phi), \quad u \in (0, \phi - \bar{u}_0].$$

Второй кусок нужно сдвинуть влево на величину $\phi - \bar{u}_0$, в связи с чем появляется функция

$$F_2(u) = F(\phi + u), \quad u \in (0, \phi - \bar{u}_0].$$

Графики обеих функций выходят из точки $(0, F(\phi))$. Условие (4.5) оказывается эквивалентным простому условию

$$F_1(u) \leq F_2(u), \quad u \in (0, \phi - \bar{u}_0].$$

В качестве возможного нижнего решения задачи (4.1), (4.2) рассмотрим функцию

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}.$$

Так как значения Π_0 и Q_0 принадлежат промежутку $(0, \phi - \bar{u}_0]$, то необходимые для нижнего решения неравенства выполняются на границе области $\mathbb{R}_+^2$:

$$Z_-(0,\tau) = -2\sqrt{(\phi - \bar{u}_0)\Pi_0} \leq -\Pi_0, \quad Z_-(\xi, 0) = -2\sqrt{(\phi - \bar{u}_0) Q_0} \leq -Q_0.$$

Внутри области $\mathbb{R}_+^2$ нужно доказать неравенство $L(Z_-) \geq 0$. Имеем

$$L(Z_-) = a^2 \frac{\partial^2 Z_-}{\partial \xi^2} - \frac{\partial Z_-}{\partial \tau} - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0).$$

Производная

$$\frac{\partial^2 Z_-}{\partial \xi^2} = -2\sqrt{\Pi_0} \frac{d^2 \sqrt{Q_0}}{d\xi^2} = -2\sqrt{\Pi_0} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{dQ_0}{d\xi}\right) = -2\sqrt{\Pi_0}\left(-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}}\left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2}\right).$$

Задача для определения функции $Q_0 = Q_0(\xi, 0)$ получается из (2.9) при $t = 0$:

$$a^2 \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad Q_0(0,0) = \phi - \bar{u}_0, \quad Q_0(\infty, 0) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad \left(\frac{dQ_0}{d\xi}\right)^2 = \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du.$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2 Z_-}{\partial \xi^2} = -2\sqrt{\Pi_0} \left[-\frac{1}{4Q_0\sqrt{Q_0}} \frac{2}{a^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du + \frac{1}{2\sqrt{Q_0}} \frac{1}{a^2} F(\bar{u}_0 + Q_0) \right] =$$
$$= \frac{1}{a^2} \sqrt{\Pi_0 Q_0} \left(\frac{1}{Q_0^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{1}{Q_0} F(\bar{u}_0 + Q_0) \right).$$

Производная

$$\frac{\partial Z_-}{\partial \tau} = -2\sqrt{Q_0} \frac{d\sqrt{\Pi_0}}{d\tau} = -\frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} \frac{d\Pi_0}{d\tau}.$$

Задача для определения функции $\Pi_0 = \Pi_0(0, \tau)$ получается из (2.6) при $y = 0$:

$$-\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0), \quad \Pi_0(0,0) = \phi - \bar{u}_0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial Z_-}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{Q_0}}{\sqrt{\Pi_0}} F(\bar{u}_0 + \Pi_0) = \sqrt{\Pi_0 Q_0} \frac{1}{\Pi_0} F(\bar{u}_0 + \Pi_0).$$

В результате для $L(Z_-)$ получается выражение

$$\begin{gathered} L(Z_-) = \sqrt{\Pi_0 Q_0} \left(\frac{1}{Q_0^2} \int_0^{Q_0} F(\bar{u}_0 + u) du - \frac{1}{Q_0} F(\bar{u}_0 + Q_0) - \frac{1}{\Pi_0} F(\bar{u}_0 + \Pi_0) \right) - \\ - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. *Пусть функция $F(u)$ имеет вид $F(u) = u^3 - b^3$, где $b > 0$, и граничное значение $\varphi(0,0) > \bar{u}_0(0,0)$. Тогда задача* (4.1), (4.2) *имеет решение $P_0(\xi, \tau)$, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (3.5).

Доказательство. Считаем, что $\bar{u}_0 = b$. С помощью метода верхних и нижних решений покажем, что существует решение задачи (4.1), (4.2), заключенное между барьерными функциями следующего вида:

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0} \le P_0(\xi, \tau) \le 0 = Z_+(\xi, \tau).$$

Для доказательства того, что функция $Z_+(\xi, \tau) = 0$ является верхним решением задачи, нужно проверить выполнение условия (4.4), которое для рассматриваемой функции имеет вид

$$(b + y + z)^2 = (b + y)^2 = (b + z)^2,$$

так как $\bar{u}_0(0,0) = b$. Это условие выполняется в единственной точке $y = z = 0$, которая не является внутренней для области. Поэтому точек экстремума нет. Условие (4.5), очевидно, выполняется. Таким образом, функция $Z_+(\xi, \tau) = 0$ является верхним решением задачи.

Для доказательства того, что функция $Z_-(\xi,\tau) = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$ является нижним решением задачи, нужно проверить выполнение неравенства $L(Z_-) \geq 0$. С этой целью запишем (4.6) с учетом замены $\bar{u}_0 \to b$, $\Pi_0 \to y$, $Q_0 \to z$, $L(Z_+) \to L$ в виде

$$L = \sqrt{yz}\left(\frac{1}{z^2}\int_0^z F(b+u)du - \frac{1}{z}F(b+z) - \frac{1}{y}F(b+y)\right) - F(b+y+z-2\sqrt{yz}) + F(b+y) + F(b+z). \quad (4.7)$$

Доказательство неравенства $L \geq 0$ значительно упрощается, если отбросить первое слагаемое и рассмотреть более сильное неравенство

$$-\sqrt{yz}\left(\frac{1}{z}F(b+z) + \frac{1}{y}F(b+y)\right) - F(b+y+z-2\sqrt{yz}) + F(b+y) + F(b+z) \geq 0. \quad (4.8)$$

В отличие от L левая часть (4.8) является функцией, симметричной относительно y и z. Ее можно привести к зависимости от переменных

$$s = \sqrt{yz} \in (0, \phi - b], \quad t = \frac{y+z}{2} \in (0, \phi - b]. \quad (4.9)$$

Имеем

$$F(b+u) = (b+u)^3 - b^3 = u[(b+u)^2 + b(b+u) + b^2] = u(u^2 + 3bu + 3b^2),$$

$$F(b+y) + F(b+z) = (y^3 + 3by^2 + 3b^2y) + (z^3 + 3bz^2 + 3b^2z) = (y+z)^3 -$$

$$- 3yz(y+z) + 3b(y+z)^2 - 6byz + 3b^2(y+z) = 8t^3 - 6s^2t + 12bt^2 - 6bs^2 + 6b^2t,$$

$$\frac{1}{z}F(b+z) + \frac{1}{y}F(b+y) = (z^2 + 3bz + 3b^2) + (y^2 + 3by + 3b^2) =$$

$$= (y+z)^2 - 2yz + 3b(y+z) + 6b^2 = 4t^2 - 2s^2 + 6bt + 6b^2,$$

$$F(b+y+z-2\sqrt{yz}) = F(b+2t-2s).$$

В результате замены (4.9) неравенство (4.8) примет вид

$$-s(4t^2 - 2s^2 + 6bt + 6b^2) - F(b+2t-2s) + 8t^3 - 6s^2t + 12bt^2 - 6bs^2 + 6b^2t \geq 0,$$

или

$$H := 8t^3 - 6s^2t + 12bt^2 - 6bs^2 + 6b^2t - 4st^2 + 2s^3 - 6bst - 6b^2s - F(b+2t-2s) \geq 0. \quad (4.10)$$

Найдем образ квадрата $G : (0, \phi - b] \times (0, \phi - b]$ при отображении

$$(y, z) \to \left(\sqrt{yz}, \frac{y+z}{2}\right).$$

Так как

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz},$$

то оба треугольника $y < z$ и $z < y$, составляющие квадрат G, отображаются в угол $t > s$. Две стороны квадрата G:

$$y = 0, \quad z \in (0, \phi - b] \quad \text{и} \quad z = 0, \quad y \in (0, \phi - b],$$

переходят в один и тот же отрезок

$$s = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\phi - b}{2}\right]. \quad (4.11)$$

Диагональ квадрата G: $z = y$, $y \in (0, \phi - b]$, переходит в отрезок биссектрисы

$$t = s, \quad s \in (0, \phi - b]. \quad (4.12)$$

И, наконец, оставшиеся две стороны квадрата G:

$$y = \phi - b, \quad z \in (0, \phi - b] \quad \text{и} \quad z = \phi - b, \quad y \in (0, \phi - b],$$

переходят в один и тот же кусок параболы

$$t = \frac{s^2}{2(\phi - b)} + \frac{\phi - b}{2}, \quad s \in \left(0, \frac{\phi - b}{2}\right]. \tag{4.13}$$

Итак, образом квадрата G является криволинейный треугольник Г, ограниченный линиями (4.11)–(4.13) и накрываемый дважды.

Исследуем функцию H, определяемую в (4.10), на экстремумы в треугольнике Г. Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -12st - 12bs - 4t^2 + 6s^2 - 6bt - 6b^2 + 2F'(b + 2t - 2s) = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 24t^2 - 6s^2 + 24bt + 6b^2 - 8st - 6bs - 2F'(b + 2t - 2s) = 0$$

приводят к соотношениям

$$F'(b + 2t - 2s) = 6st + 6bs + 2t^2 - 3s^2 + 3bt + 3b^2 = 12t^2 - 3s^2 + 12bt + 3b^2 - 4st - 3bs,$$

которые выполняются только при $t = s$. Поэтому внутри треугольника Г точек экстремума нет. Остается проверить выполнение неравенства (4.10) на границе треугольника Г.

1. На стороне

$$s = 0, \quad t \in \left(0, \frac{\phi - b}{2}\right]$$

значения

$$H(0,t) = 8t^3 + 12bt^2 + 6b^2t - F(b + 2t) = F(b + 2t) - F(b + 2t) = 0 \geq 0.$$

2. На стороне

$$t = s, \quad s \in (0, \phi - b]$$

значения

$$H(s,s) = 8s^3 - 6s^3 + 12bs^2 - 6bs^2 + 6b^2s - 4s^3 + 2s^3 - 6bs^2 - 6b^2s - F(b) = 0 \geq 0.$$

3. Для проверки неравенства (4.10) на стороне

$$t = \frac{s^2}{2(\phi - b)} + \frac{\phi - b}{2}, \quad s \in \left(0, \frac{\phi - b}{2}\right]$$

удобнее вернуться к переменным (y, z) и рассмотреть одну из двух сторон квадрата G:

$$y = \phi - b, \quad z \in (0, \varphi - b] \quad \text{или} \quad z = \phi - b, \quad y \in (0, \phi - b].$$

Для определенности будем рассматривать сторону $z = \phi - b,\ y \in (0, \phi - b]$. Нужно доказать неравенство (4.8) при $z = \phi - b$. Запишем левую часть этого неравенства в виде

$$\left(1 - \sqrt{\frac{y}{z}}\right)F(b + z) + \left(1 - \sqrt{\frac{z}{y}}\right)F(b + y) - F((b + (\sqrt{z} - \sqrt{y})^2) \geq 0,$$

и сделаем замены

$$t = \sqrt{\frac{y}{z}}, \quad 0 < t < 1, \quad a = z, \quad a > 0. \tag{4.14}$$

В результате получим неравенство

$$(1 - t)F(b + a) - \frac{1 - t}{t}F(b + at^2) - F(b + a(1 - t)^2) \geq 0.$$

Здесь

$$F(b + u) = uh(u), \quad \text{где} \quad h(u) = u^2 + 3bu + 3b^2.$$

Соответственно имеем неравенство

$$(1-t)ah(a) - (1-t)ath(at^2) - a(1-t)^2 h(a(1-t)^2) \geq 0,$$

которое после деления на $(1-t)a$ принимает вид

$$h(a) - th(at^2) - (1-t)h(a(1-t)^2) \geq 0. \tag{4.15}$$

Преобразуем левую часть этого неравенства:

$$\begin{gathered} h(a) - th(at^2) - (1-t)h(a(1-t)^2) = (a^2 + 3ba + 3b^2) - t(a^2t^4 + 3bat^2 + 3b^2) - \\ - [a^2(1-t)^4 + 3ba(1-t)^2 + 3b^2] + t[a^2(1-t)^4 + 3ba(1-t)^2 + 3b^2] = \\ = a[a + 3b - a(1-t)^4 - 3b(1-t)^2 + a(4t^4 - 6t^3 + 4t^2 - t) + 3b(2t^2 - t)]. \end{gathered}$$

Поэтому неравенство (4.15) эквивалентно неравенству

$$g := a + 3b - a(1-t)^4 - 3b(1-t)^2 + a(4t^4 - 6t^3 + 4t^2 - t) + 3b(2t^2 - t) \geq 0. \tag{4.16}$$

Изучим зависимость значений g от параметра a на промежутке $a > 0$. Производная

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 1 - (1-t)^4 + 4t^4 - 6t^3 + 4t^2 - t = t(3t^3 - 2t^2 - 2t + 3) > 0,$$

поэтому g возрастает на промежутке $a > 0$ и ее величина

$$g(a) > g(0) = 3b - 3b(1-t)^2 + 3b(2t^2 - t) = 3b(t^2 + t) > 0.$$

Таким образом, (4.16), а вместе с ним и (4.8) при $z = \phi - b$, являются верными неравенствами. Это завершает доказательство неравенства (4.10), и можно утверждать, что функция $Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0 Q_0}$ является нижним решением задачи (4.1), (4.2).

Обе барьерные функции $Z_-(\xi, \tau)$ и $Z_+(\xi, \tau)$ удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида (3.5), поэтому решение $P_0(\xi, \tau)$ задачи (4.1), (4.2) также удовлетворяет оценке того же вида. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть функция* $F(u)$ *имеет вид* $F(u) = u^3 - b^3$, *где* $b > 0$, *и граничное значение* $\phi(0,0) > \bar{u}_0(0,0)$. *Тогда задачи* (3.3), (3.4) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (3.5).

Доказательство. Исследуем знак производной $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0)$. Так как

$$P_0 \geq -2\sqrt{\Pi_0 Q_0},$$

то

$$\Pi_0 + Q_0 + P_0 \geq \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0} = (\sqrt{\Pi_0} - \sqrt{Q_0})^2 \geq 0.$$

Поэтому величина

$$\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0 = b + \Pi_0 + Q_0 + P_0 \geq b,$$

вследствие чего производная $F'(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + P_0) > 0$ и задачи (3.3), (3.4) имеют решения с оценками вида (3.5). Теорема доказана.

Отметим, что функции $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \geq 0$, определяются аналогично.

5. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Итак, ряд (1.3) оказывается полностью построенным при дополнительном условии 6:

Условие 6. В угловых точках $(k,0)$, $k = 0,1$, прямоугольника Ω функция $F(u)$ имеет вид $F(u) = u^3 - b^3$, где положительное число b не обязательно одно и то же, и граничные значения $\phi(k,0) > \bar{u}_0(k,0)$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* 1–6. *Тогда для достаточно малых* ε *задача* (0.1)–(0.3) *имеет решение* $u(x,t,\varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\bar{u}_k(x,t)+\Pi_k(x,\tau)+Q_k(\xi,t)+Q_k^*(\xi_*,t)+P_k(\xi,\tau)+P_k^*(\xi_*,\tau))$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon\to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\bar{\Omega}$.

Доказательство основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k\geq 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из статьи [3].

Выражаю искреннюю благодарность В.Ф. Бутузову за плодотворное обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов И.В.* Первая краевая задача для квазилинейного сингулярно возмущенного параболического уравнения в прямоугольнике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 10. С. 56–72.
2. *Денисов И.В.* Оценка остаточного члена в асимптотике решения краевой задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 12. С. 64–67.
3. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 255–274.
4. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 102–117.
5. *Денисов А.И., Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с немонотонными нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1581–1590.
6. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с монотонной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 1–11.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
8. *Amann H.* On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. № 2. P. 125–146.
9. *Sattinger D.H.* Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.
10. *Amann H.* // Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. New York etc: Acad press, cop. 1978. XIII. P. 1–29.