## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.652

# НЕПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ[1)]

© 2021 г. А. И. Задорин[1,*], Н. А. Задорин[1,**]

[1] 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. СО РАН, Россия

*e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

**e-mail: nik-zadorin@yandex.ru

Поступила в редакцию 02.06.2020 г.
Переработанный вариант 20.08.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Исследуется вопрос интерполяции функции одной переменной с большими градиентами в области пограничного слоя. Проблема в том, что применение классических полиномиальных интерполяционных формул на равномерной сетке к функциям с большими градиентами может приводить к погрешностям порядка $O(1)$, несмотря на малость шага сетки. Исследована интерполяционная формула, построенная на основе подгонки к составляющей, задающей погранслойный рост функции. Получена оценка погрешности, зависящая от числа узлов интерполяции и равномерная по погранслойной составляющей и ее производным. Показано, как построенная интерполяционная формула может быть применена для построения формул численного дифференцирования и интегрирования, в двумерном случае. Получены соответствующие оценки погрешности. Библ. 21. Табл. 2.

**Ключевые слова:** пограничный слой, функция с большими градиентами, неполиномиальная интерполяционная формула, оценка погрешности.

**DOI:** 10.31857/S0044466921020150

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Многочлен Лагранжа широко используется для интерполяции функций. Однако в случае функций с большими градиентами применение интерполяции Лагранжа может приводить к погрешностям порядка O(1) (см. [1]). Следовательно, актуален вопрос построения интерполяционных формул для функций с большими градиентами в пограничном слое. Интерполяционная формула должна строиться таким образом, чтобы ее погрешность была равномерной по резким изменениям функции в пограничном слое. Для построения таких формул можно выделить два подхода: применение интерполяции Лагранжа на сетке, сгущающейся в области пограничного слоя и построение специальных интерполяционных формул, основанных на подгонке к погранслойной составляющей функции.

Формула линейной интерполяции при наличии экспоненциального пограничного слоя на сетках Г.И. Шишкина (см. [2]) и Н.С. Бахвалова (см. [3]) исследовалась в [4]. В [5] доказано, что в случае экспоненциального пограничного слоя многочлен Лагранжа можно применять на сетке Шишкина. Для многочлена Лагранжа с произвольно заданным числом узлов интерполяции получены оценки погрешности, равномерные по малому параметру.

Подход, основанный на подгонке интерполяционной формулы к быстро растущей составляющей, менее исследован. В [6] рассмотрен вопрос интерполяции функции, представимой в виде

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.1}$$

где функция $u(x)$ является достаточно гладкой, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна и имеет большие градиенты на интервале $[a,b]$, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (работа по секциям 1, 2, 4 поддержана проектом № 20-01-00650, по секциям 3, 5, 6 – проектом № 19-31-60009).

с производными до некоторого порядка, постоянная $\gamma$ не задана. В частности, декомпозиция (1.1) строилась в [7] для решения сингулярно возмущенной краевой задачи, при этом

$$\Phi(x) = e^{-mx/\varepsilon}, \quad x \in [0,1], \quad m > 0, \quad \varepsilon \in (0,1]. \tag{1.2}$$

Производные функции $\Phi(x)$ неограниченно растут с уменьшением параметра $\varepsilon$, из-за чего погрешность полиномиальных интерполяционных формул становится порядка $O(1)$.

В [6] построена интерполяционная формула на произвольном сеточном интервале $[x_{n-1}, x_n]$ с двумя узлами интерполяции $x_{n-1}$ и $x_n$, точная на составляющей $\Phi(x)$. Доказано, что если $\Phi'(x) \neq 0$, то погрешность построенной формулы порядка $O(h)$ равномерна по составляющей $\Phi(x)$. Здесь $h$ – шаг сетки.

В [8] для функции вида (1.1) построена интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции, точная на составляющей $\Phi(x)$. Однако в [8] нет оценки погрешности, равномерной по погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

В данной работе получим оценку погрешности интерполяционной формулы из [8] с $k$ узлами интерполяции. Рассмотрим применение этой формулы для построения формул численного дифференцирования и интегрирования, а также в двумерном случае.

## 2. АНАЛИЗ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ

Пусть $\Omega^h$ – равномерная сетка интервала $[a,b]$:

$$\Omega^h = \{x_n : x_n = a + (n-1)h,\ x_1 = a,\ x_k = b,\ n = 1,2,\ldots,k\}.$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ вида (1.1) задана в узлах сетки, $u_n = u(x_n)$.

Пусть $L_n(u,x)$ – многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с узлами интерполяции $x_1,\ldots,x_n$. Покажем, что применение многочлена Лагранжа к функции вида (1.1) может приводить к значительным погрешностям. Для этого зададим $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$ при $x \in [0,1]$. Пусть $\varepsilon = h$, тогда при интерполяции на интервале $[0,h]$ выполнится $L_2(u,h/2) - u(h/2) \approx 0.075$. Итак, точность интерполяции не повышается с уменьшением шага $h$, если $\varepsilon = h$.

В [8] для интерполяции функции вида (1.1) построена интерполяционная формула

$$L_{\Phi,k}(u,x) = L_{k-1}(u,x) + \frac{[x_1,\ldots,x_k]u}{[x_1,\ldots,x_k]\Phi}[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi,x)], \tag{2.1}$$

где $[x_1,\ldots,x_k]u$ – разделенная разность для функции $u(x)$ (см. [9]).

Пусть

$$\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, \quad x \in (a,b). \tag{2.2}$$

Тогда знаменатель в (2.1) не обращается в нуль и формула задана корректно.

Покажем, что формула (2.1) является интерполяционной. Преобразуем формулу (2.1). В соответствии с [9], справедливо соотношение

$$L_k(u,x) = L_{k-1}(u,x) + r_{k-1}(x)[x_1,x_2,\ldots,x_k]u, \tag{2.3}$$

где $r_{k-1}(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})$. Учитывая (2.3), из (2.1) получаем

$$L_{\Phi,k}(u,x) = L_k(u,x) + \frac{[x_1,\ldots,x_k]u}{[x_1,\ldots,x_k]\Phi}[\Phi(x) - L_k(\Phi,x)]. \tag{2.4}$$

Очевидно, что формула (2.4) является интерполяционной с узлами интерполяции $x_1, \ldots, x_k$. Следовательно, и формула в виде (2.1) является интерполяционной.

Учитывая, что, согласно [9, с. 44],

$$\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi,x) = r_{k-1}(x)[x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x]\Phi \tag{2.5}$$

и

$$u(x) - L_k(u,x) = \frac{u^{(k)}(s)}{k!}r_k(x), \quad \exists s \in (a,b), \tag{2.6}$$

получаем, что формула (2.1) является точной на многочленах степени $(k-2)$ и на функции $\gamma\Phi(x)$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнено условие* (2.2),

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)}. \tag{2.7}$$

*Тогда*

$$\max_x \left|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\right| \le \max_x \left|L_{k-1}(p, x) - p(x)\right|(1 + \max_x \left|M_k(\Phi, x)\right|). \tag{2.8}$$

**Доказательство.** Интерполяционная формула (2.1) точна на составляющей $\Phi(x)$, поэтому

$$L_{\Phi,k}(u, x) - u(x) = L_{k-1}(p, x) - p(x) + \frac{[x_1, \ldots, x_k]p}{[x_1, \ldots, x_k]\Phi}[\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)].$$

Учитывая (2.5), получаем

$$L_{\Phi,k}(u, x) - u(x) = [L_{k-1}(p, x) - p(x)] - [L_{k-1}(p, x_k) - p(x_k)]M_k(\Phi, x), \tag{2.9}$$

где $M_k(\Phi, x)$ соответствует (2.7). Теперь из (2.9) получаем (2.8). Лемма доказана.

**Следствие 1.** Учитывая (2.6), из (2.8) получаем

$$\max_x \left|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\right| \le \max_x \left|p^{(k-1)}(x)\right|(1 + \max_x \left|M_k(\Phi, x)\right|)h^{k-1}, \quad x \in [a, b].$$

**Лемма 2.** *Пусть*

$$\Phi^{(k-1)}(x) \ne 0, \quad \Phi^{(k)}(x) \ne 0, \quad k \ge 2, \quad x \in (a, b). \tag{2.10}$$

*Тогда*

$$\max_x \left|L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)\right| \le 2\max_x \left|L_{k-1}(p, x) - p(x)\right|, \quad x \in [a, b]. \tag{2.11}$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда производные $\Phi^{(k-1)}(x)$, $\Phi^{(k)}(x)$ одного знака:

$$\Phi^{(k-1)}(x) > 0, \quad \Phi^{(k)}(x) > 0, \quad x \in (a, b), \tag{2.12}$$

или

$$\Phi^{(k-1)}(x) < 0, \quad \Phi^{(k)}(x) < 0, \quad x \in (a, b). \tag{2.13}$$

Остановимся на условиях (2.12), условия (2.13) рассматриваются аналогично. Учитывая (2.5) и (2.7), получаем

$$M_k(\Phi, x) = \frac{r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi}{r_{k-1}(x_k)[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k]\Phi}. \tag{2.14}$$

В соответствии с [9] для некоторого $s \in (a, b)$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi = \Phi^{(k-1)}(s)/(k-1)!. \tag{2.15}$$

Согласно (2.12), $\Phi^{(k-1)}(x) > 0$. С учетом (2.15) имеем $z(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x]\Phi > 0$. В соответствии с [9, с. 82] для производной разделенной разности справедливо соотношение

$$z'(x) = [x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x]\Phi.$$

Согласно (2.12), $\Phi^{(k)}(x) > 0$. Учитывая (2.15), получаем $z'(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$. Итак, функция $z(x)$ на интервале $(a, b)$ является положительной и возрастающей. Учитывая неравенство $\left|r_{k-1}(x)\right| \le r_{k-1}(x_k)$, из (2.14) получаем

$$\left|M_k(\Phi, x)\right| \le 1, \quad x \in [a, b]. \tag{2.16}$$

Теперь из (2.8) следует (2.11).

Остановимся на случае, когда производные $\Phi^{(k-1)}(x)$ и $\Phi^{(k)}(x)$ разных знаков. Представление (1.1) для $u(x)$ может быть записано в виде

$$u(a + b - x) = p(a + b - x) + \gamma\Phi(a + b - x), \quad x \in [a, b]. \tag{2.17}$$

Зададим $v(x) = u(a + b - x)$, $\Psi(x) = \Phi(a + b - x)$. Тогда (2.17) принимает вид

$$v(x) = p(a + b - x) + \gamma\Psi(x), \quad x \in [a, b].$$

Пусть $k$ четно. Тогда

$$\Psi^{(k-1)}(x) = -\Phi^{(k-1)}(a + b - x), \quad \Psi^{(k)}(x) = \Phi^{(k)}(a + b - x).$$

Следовательно, производные $\Psi^{(k-1)}(x)$ и $\Psi^{(k)}(x)$ одного знака. Итак, ограничения (2.12) или (2.13) справедливы для функции $\Psi(x)$. Мы доказали, что в этом случае $|M_k(\Psi, x)| \le 1$, поэтому в соответствии с (2.8) справедливо неравенство

$$|L_{\Psi,k}(v, x) - v(x)| \le 2\max_s |L_{k-1}(p, s) - p(s)|, \quad x, s \in [a, b].$$

Это неравенство можно записать в виде

$$|L_{\Psi,k}(v, a + b - x) - v(a + b - x)| \le 2\max_s |L_{k-1}(p, s) - p(s)|, \quad x, s \in [a, b]. \tag{2.18}$$

Далее учитываем, что $v(a + b - x) = u(x)$, $\Psi(a + b - x) = \Phi(x)$, и из (2.18) получаем требуемую оценку (2.11).

Случай нечетного $k$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

В соответствии с леммой 2 при ограничениях (2.10) оценка погрешности построенной интерполяционной формулы (2.1) сведена к оценке погрешности интерполяции многочленом Лагранжа $L_{k-1}(p, x)$ на регулярной составляющей $p(x)$. Для оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа $L_{k-1}(p, x)$ известны оценки через $\max|p^{(k-1)}(x)|$ и в интегральной форме.

С учетом известной оценки прогрешности интерполяции многочленом Лагранжа на равномерной сетке (см. [9]):

$$|L_k(p, x) - p(x)| \le \max_s |p^{(k)}(s)| h^k, \quad x \in [a, b], \tag{2.19}$$

из (2.11) получаем

$$\max_x |L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)| \le 2\max_x |p^{(k-1)}(x)| h^{k-1}, \quad x \in [a, b]. \tag{2.20}$$

Для отдельных значений $k$ можно выписать оценку погрешности интерполяции многочленом Лагранжа в интегральной форме. Например,

$$|L_2(p, x) - p(x)| \le h\int_a^b |p''(s)| ds, \quad x \in [a, b]. \tag{2.21}$$

Тогда из (2.11 ) получаем

$$\max_x |L_{\Phi,3}(u, x) - u(x)| \le 2h\int_a^b |p''(s)| ds, \quad x \in [a, b].$$

**Замечание 1.** Условия (2.10) выполнены для пограничных слоев следующих видов:

экспоненциального пограничного слоя, когда $\Phi(x)$ соответствует (1.2);

степенного пограничного слоя, $\Phi(x) = (x + \varepsilon)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $x > 0$, $\varepsilon > 0$;

слоя с логарифмической особенностью, $\Phi(x) = \ln x$, $x \ge \varepsilon > 0$.

## 3. ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

Рассмотрим вопрос численного интегрирования функции вида (1.1). В [10], [11] показано, что применение составной квадратурной формулы Ньютона–Котеса при наличии экспоненциального пограничного слоя при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon$ приводит к погрешностям порядка $O(h)$, несмотря на увеличение числа узлов базовой квадратурной формулы. Например, составная формула Симпсона при $\varepsilon = 1$ имеет погрешность порядка $O(h^4)$, а при $\varepsilon \le h$ погрешность становится порядка $O(h)$.

Таким образом, в случае равномерной сетки неприемлемо применять формулы Ньютона–Котеса для численного интегрирования функций вида (1.1). В [10]–[12] обоснованы аналоги формул Ньютона–Котеса с числом узлов от двух до пяти, построенные на основе замены подынтегральной функции $u(x)$ интерполянтом (2.1) вместо многочлена Лагранжа. В этих работах доказано, что построенные составные квадратурные формулы обладают погрешностью порядка $O(h^{k-1})$ равномерно по составляющей $\Phi(x)$ и ее производным, где $k$ – число узлов базовой квадратурной формулы. При оценке погрешности накладывается ограничение $\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0$ на каждом интервале с $k$ узлами, на котором строится базовая квадратурная формула. Это условие выполнено для всех функций из замечания 1. Доказано, что если выделить область пограничного слоя и вне этой области строить формулы Ньютона–Котеса, то точность составной квадратурной формулы повышается на порядок и при этом погрешность становится такой же, как в регулярном случае, когда интегрируемая функция имеет ограниченные производные.

В [13] на основе интерполянта (2.1) построен и обоснован аналог формулы Ньютона–Котеса в общем случае, когда квадратурная формула содержит $k$ узлов. При обосновании оценки погрешности потребовались ограничения на знак остаточного члена квадратурной формулы в случае функции $\Phi(x)$. Выполнение требуемых ограничений можно проверить для отдельных значений $k$ на основе задаваемых в ряде работ таблиц, в которых указан вид остаточного члена квадратурной формулы.

Полученные оценки погрешности интерполяции (2.11), (2.20) можно применить для оценивания погрешности квадратурной формулы, построенной в [13]. При этом накладываемые ограничения (2.10) имеют более простой для проверки вид, чем ограничения в [13].

Итак, применяем интерполяционную формулу в виде (2.4) для построения квадратурной формулы с $k$ узлами:

$$\int_a^b u(x)dx \approx \int_a^b L_{\Phi,k}(u,x)dx.$$

Учитывая (2.4), полученную квадратурную формулу можно записать в виде

$$\int_a^b u(x)dx \approx S_{\Phi,k}(u) = S_k(u) + \frac{[x_1,\ldots,x_k]u}{[x_1,\ldots,x_k]\Phi}\left[\int_a^b \Phi(x)dx - S_k(\Phi)\right],$$

где $S_k(u)$ – замкнутая формула Ньютона–Котеса с $k$ узлами,

$$S_k(u) = \int_a^b L_k(u,x)dx.$$

Предполагается, что интеграл от функции $\Phi(x)$ можно вычислить в явном виде. Это условие выполнено для функций из замечания 1.

**Лемма 3.** *Пусть выполнены условия* (2.10). *Тогда*

$$\left|\int_a^b u(x)dx - S_{\Phi,k}(u)\right| \le 2(b-a)\max_{x\in[a,b]}\left|L_{k-1}(p,x) - p(x)\right| \le 2(b-a)\max_{x\in[a,b]}\left|p^{(k-1)}(x)\right|h^{k-1}.$$

Доказательство леммы следует из оценок (2.11), (2.19). Итак, получена оценка погрешности квадратурной формулы, равномерная по составляющей $\Phi(x)$. Погрешность $\left|L_{k-1}(p,x) - p(x)\right|$ для отдельных значений $k$ может быть оценена более точно в интегральной форме, например, как в (2.21).

## 4. ФОРМУЛЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Покажем необходимость построения специальных формул численного дифференцирования в случае функций с большими градиентами. Рассмотрим классическую формулу

$$u'(x) \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Тогда при $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$, $x \in [0,1]$, и $\varepsilon = h$ выполнится

$$\varepsilon\left|\frac{u_1 - u_0}{h} - u'(0)\right| = e^{-1}.$$

Получаем, что точность формулы не повышается при $h \to 0$, если $\varepsilon = h$, и требуется разработка формул численного дифференцирования при наличии пограничного слоя. Умножением на параметр $\varepsilon$ вычисляется относительная погрешность, так как производная $u'(x)$ порядка $O(1/\varepsilon)$.

Известно, что классические разностные формулы для производных, построенные дифференцированием многочлена Лагранжа, можно применять на сетках, сгущающихся в области пограничного слоя. В [14]–[17] на сетках Шишкина и Бахвалова получены оценки относительной погрешности, равномерные по параметру $\varepsilon$.

Построение специальных формул численного дифференцирования функций с большими градиентами на равномерной сетке менее исследовано.

Интерполяционную формулу (2.1) можно применить для построения формул численного дифференцирования. Дифференцируя интерполянт (2.1), получаем

$$u^{(j)}(x) \approx L^{(j)}_{\Phi,k}(u,x) = L^{(j)}_{k-1}(u,x) + \frac{[x_1,\dots,x_k]u}{[x_1,\dots,x_k]\Phi}[\Phi^{(j)}(x) - L^{(j)}_{k-1}(\Phi,x)], \quad x \in [x_1, x_k]. \tag{4.1}$$

В [18] в случае экспоненциального пограничного слоя были получены равномерные по $\varepsilon$ оценки относительной погрешности при вычислении первой производной при $k = 2,3$ и второй производной при $k = 3,4$, где $k$ – число узлов в формуле (4.1), и $\Phi(x)$ соответствует (1.2).

В случае погранслойной составляющей $\Phi(x)$ общего вида оценки относительной погрешности при вычислении первой производной при $k = 2,3$ и второй производной при $k = 3$ были получены в [19]. Для пояснения остановимся на случае вычисления первой производной по формуле

$$u'(x) \approx L'_{\Phi,2}(u,x) = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Phi_n - \Phi_{n-1}}\Phi'(x), \quad x \in [x_{n-1}, x_n],$$

соответствующей (4.1). В [19] доказана следующая лемма.

**Лемма 4.** *Предположим, что*

$$|\Phi'(x)| \le B_n, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]$$

*и для некоторой постоянной* $G_n$

$$\frac{\int_{x_{n-1}}^{x_n} |\Phi''(s)|\,ds}{B_n|\Phi_n - \Phi_{n-1}|} \le G_n.$$

*Тогда*

$$\left|\frac{L'_{\Phi,2}(u,x) - u'(x)}{B_n}\right| \le G_n \int_{x_{n-1}}^{x_n} |p'(s)|\,ds + \frac{1}{B_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} |p''(s)|\,ds, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{4.2}$$

В случае, когда $\Phi(x)$ соответствует (1.2), выполнится $B_n = m/\varepsilon$, $G_n = 1$. Тогда из (4.2) получаем

$$\varepsilon\left|L'_{\Phi,2}(u,x) - u'(x)\right| \le \int_{x_{n-1}}^{x_n}\left[|p'(s)| + \frac{\varepsilon}{m}|p''(s)|\right]ds, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{4.3}$$

С помощью леммы 4 получена оценка погрешности (4.3) порядка $O(h)$, равномерная по составляющей $\Phi(x)$.

Аналогично можно воспользоваться леммой 4 для оценивания погрешности в случае другой функции $\Phi(x)$, например, из замечания 1.

## 5. ДВУМЕРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА

Исследуем формулу для интерполяции функции двух переменных с большими градиентами. Эта формула является обобщением формулы (2.1) и для получения оценки погрешности будет использована лемма 2.

Итак, пусть для достаточно гладкой функции $u(x,y)$ справедливо представление

$$u(x,y) = p(x,y) + d_1(y)\Phi(x) + d_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y), \tag{5.1}$$

где $(x,y) \in \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} = [a,b]\times[c,d]$. Предполагаем, что в (5.1) регулярная составляющая $p(x,y)$ и функции $d_1(y)$, $d_2(x)$ не заданы в явном виде и имеют ограниченные производные до некоторого порядка, а функции $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ известны и имеют большие градиенты в области пограничного слоя. Остановимся на примере такой функции $u(x,y)$.

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу для эллиптического уравнения

$$\begin{gathered}\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega;\\ u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y)\in\Gamma,\end{gathered} \tag{5.2}$$

где $\Gamma = \bar{\Omega}\backslash\Omega$. Предполагается, что функции $a, b, c, f, g$ — достаточно гладкие и угловые пограничные слои отсутствуют:

$$a(x) \ge \alpha > 0, \quad b(y) \ge \beta > 0, \quad c(x,y) \ge 0, \quad \varepsilon > 0.$$

В соответствии с [20] решение задачи (5.2) представимо в виде (5.1) при

$$\Phi(x) = e^{-a(0)x/\varepsilon}, \quad \Theta(y) = e^{-b(0)y/\varepsilon}.$$

Зададим сетку $\Omega^h = \Omega_x^{h_1}\times\Omega_y^{h_2}$ в исходной области $\bar{\Omega}$:

$$\Omega_x^{h_1} = \{x_i : x_i = a + (i-1)h_1,\ i = 1,2,\dots,k_1\}, \quad h_1 = (b-a)/(k_1-1),$$

$$\Omega_y^{h_2} = \{y_j : y_j = c + (j-1)h_2,\ j = 1,2,\dots,k_2\}, \quad h_2 = (d-c)/(k_2-1), \quad k_1 \ge 2, \quad k_2 \ge 2.$$

Построим интерполяционную формулу для функций вида (5.1), точную на погранслойных составляющих.

Сначала при заданном значении $y$ в соответствии с (2.1) зададим интерполяцию по $x$:

$$L_x(u,x,y) = L_{k_1-1}(u,x,y) + \frac{[x_1,x_2,\dots,x_{k_1}]u}{[x_1,x_2,\dots,x_{k_1}]\Phi}[\Phi(x) - L_{k_1-1}(\Phi,x)]. \tag{5.3}$$

В (5.3) $L_{k_1-1}(u,x,y)$ соответствует интерполяции по $x$ функции $u(x,y)$ многочленом Лагранжа с узлами интерполяции $x_1, x_2, \dots, x_{k_1-1}$ при заданном $y$.

По аналогии с (5.3) зададим интерполяционную формулу по $y$:

$$L_y(u,x,y) = L_{k_2-1}(u,x,y) + \frac{[y_1,y_2,\dots,y_{k_2}]u}{[y_1,y_2,\dots,y_{k_2}]\Theta}[\Theta(y) - L_{k_2-1}(\Theta,y)]. \tag{5.4}$$

Используя (5.4), после интерполяции по $x$ осуществляем интерполяцию по $y$:

$$L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y) = L_{k_2-1}(L_x(u,x,y),x,y) + \frac{[y_1,y_2,\dots,y_{k_2}]L_x(u,x,y)}{[y_1,y_2,\dots,y_{k_2}]\Theta}[\Theta(y) - L_{k_2-1}(\Theta,y)]. \tag{5.5}$$

Итак, построена двумерная интерполяционная формула (5.3)–(5.5).

Формула (5.3)–(5.5) задана корректно, если знаменатель в (5.3) и (5.5) не обращается в нуль. В соответствии с соотношением (2.15) это условие выполняется, если

$$\Phi^{(k_1-1)}(x) \ne 0, \quad x\in(a,b), \quad \Theta^{(k_2-1)}(y) \ne 0, \quad y\in(c,d). \tag{5.6}$$

Несложно получить, что двумерная интерполяционная формула (5.3)–(5.5) является точной на функциях

$$x^i, \ \ x^i\Theta(y), \ \ i = 0,1,\dots,k_1-2, \ \ y^j, \ \ y^j\Phi(x), \ \ j = 0,1,\dots,k_2-2, \ \ \Phi(x)\Theta(y).$$

Формула (5.3)–(5.5) исследовалась в [21], где доказана следующая лемма.

**Лемма 5.** *Пусть выполнены условия* (5.6). *Тогда для некоторой постоянной* $C$, *не зависящей от функций* $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ *и их производных, справедлива оценка погрешности*

$$\left|u(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)\right| \le C(1 + \max_x \left|M_{k_1}(\Phi,x)\right|)(1 + \max_y \left|M_{k_2}(\Theta,y)\right|)[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}], \tag{5.7}$$

*где* $(x,y) \in \bar{\Omega}$, $M_{k_1}(\Phi,x)$, $M_{k_2}(\Theta,y)$ *определяются согласно* (2.7).

Оценка погрешности (5.7) зависит от погранслойных составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$. Улучшим эту оценку.

**Лемма 6.** *Пусть*

$$\Phi^{(k_1-1)}(x) \ne 0, \quad \Phi^{(k_1)}(x) \ne 0, \quad k_1 \ge 2, \quad x \in (a,b), \tag{5.8}$$

$$\Theta^{(k_2-1)}(y) \ne 0, \quad \Theta^{(k_2)}(y) \ne 0, \quad k_2 \ge 2, \quad y \in (c,d). \tag{5.9}$$

*Тогда*

$$\left|u(x,y) - L_{\Phi,\Theta,k_1,k_2}(u,x,y)\right| \le 4C[h_1^{k_1-1} + h_2^{k_2-1}], \quad x \in [a,b], \quad y \in [c,d]. \tag{5.10}$$

**Доказательство.** По аналогии с леммой 2, где обоснована оценка (2.16) при выполнении условий (2.10), получаем, что при выполнении условий (5.8) и (5.9) справедливы оценки

$$\left|M_{k_1}(\Phi,x)\right| \le 1, \quad \left|M_{k_2}(\Theta,y)\right| \le 1.$$

Теперь из (5.7) следует (5.10), что доказывает лемму.

**Замечание 2.** Если исходную область $[a,b]\times[c,d]$ разбить на непересекающиеся прямоугольные ячейки с $k_1$ узлами по $x$ и $k_2$ узлами по $y$, то при интерполяции функции $u(x,y)$ можно применить интерполяционную формулу (5.3)–(5.5) в каждой ячейке. Если ячейка не пересекается с областью больших градиентов функции $u(x,y)$, то в ней можно применять классические интерполяционные формулы, основанные на многочленах Лагранжа.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассмотрим функцию вида (1.1):

$$u(x) = \cos(\pi x) + e^{-x/\varepsilon}, \quad x \in [0,1], \quad \varepsilon > 0.$$

При этом $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Предполагаем, что число сеточных интервалов $N$ четно и разобьем интервал $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы вида $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, где $n = 1,3,\dots,N-1$. На каждом таком интервале зададим интерполяционную формулу (2.1) при $k = 3$:

$$L_{\Phi,3}(u,x) = u_{n-1} + \frac{u_n - u_{n-1}}{h}(x - x_{n-1}) + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}} \times$$
$$\times\left[\Phi(x) - \Phi_{n-1} - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h}(x - x_{n-1})\right], \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}].$$

Зададим погрешность интерполяции многочленом Лагранжа

$$\Delta_{\varepsilon,N} = \max_{1\le n\le N}\left|u(\tilde{x}_n) - L_3(u,\tilde{x}_n)\right|, \quad \tilde{x}_n = (x_n + x_{n-1})/2.$$

В табл. 1 приведена погрешность интерполяции $\Delta_{\varepsilon,N}$ многочленом Лагранжа $L_3(u,x)$ в зависимости от $\varepsilon$ и $N$. При малых значениях $\varepsilon$ погрешность не убывает при уменьшении шага сетки. Это подтверждает неприемлемость применения для интерполяции многочлена Лагранжа на равномерной сетке при наличии пограничного слоя.

В табл. 2 аналогичным образом представлена погрешность интерполянта $L_{\Phi,3}(u,x)$ и вычисленный порядок точности $M_{\varepsilon,N} = \log_2(\Delta_{\varepsilon,N}/\Delta_{\varepsilon,2N})$. Из табл. 2 следует, что порядок точности интерполяционной формулы понижается с 3 до 2 при уменьшении $\varepsilon$, результаты вычислений согласуются с оценкой (2.20) при $k = 3$.

Другие результаты вычислений по всем исследуемым вопросам содержатся в публикациях авторов, приведенных в списке литературы настоящей статьи, и согласуются с полученными в данной работе оценками погрешностей.

**Таблица 1.** Погрешность интерполяции многочленом Лагранжа $L_3(u, x)$

| $\varepsilon$ | $N$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $3 \times 2^3$ | $3 \times 2^4$ | $3 \times 2^5$ | $3 \times 2^6$ | $3 \times 2^7$ | $3 \times 2^8$ |
| 1 | $1.36e-4$ | $1.72e-5$ | $2.15e-6$ | $2.68e-7$ | $3.36e-8$ | $4.19e-9$ |
| $10^{-1}$ | $3.15e-3$ | $4.71e-4$ | $6.45e-5$ | $8.43e-6$ | $1.08e-6$ | $1.36e-7$ |
| $10^{-2}$ | $2.62e-1$ | $1.14e-1$ | $3.00e-2$ | $5.68e-3$ | $8.82e-4$ | $1.23e-4$ |
| $10^{-3}$ | $3.75e-1$ | $3.75e-1$ | $3.70e-1$ | $3.05e-1$ | $1.58e-1$ | $4.82e-2$ |
| $10^{-4}$ | $3.75e-1$ | $3.75e-1$ | $3.75e-1$ | $3.75e-1$ | $3.75e-1$ | $3.74e-1$ |

Примечание. Здесь и в табл. 2 $e-m$ обозначает $10^{-m}$.

**Таблица 2.** Погрешность и вычисленный порядок точности интерполянта $L_{\Phi,3}(u, x)$

| $\varepsilon$ | $N$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $3 \times 2^3$ | $3 \times 2^4$ | $3 \times 2^5$ | $3 \times 2^6$ | $3 \times 2^7$ | $3 \times 2^8$ |
| 1 | $1.47e-4$ | $1.84e-5$ | $2.30e-6$ | $2.87e-7$ | $3.59e-8$ | $4.49e-9$ |
| | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | |
| $10^{-1}$ | $4.87e-4$ | $6.00e-5$ | $7.40e-6$ | $9.19e-7$ | $1.15e-7$ | $1.43e-8$ |
| | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | |
| $10^{-2}$ | $4.61e-3$ | $6.34e-4$ | $7.69e-5$ | $9.23e-6$ | $1.12e-6$ | $1.38e-7$ |
| | 2.9 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | 3.0 | |
| $10^{-3}$ | $6.38e-3$ | $1.60e-3$ | $3.96e-4$ | $8.26e-5$ | $1.23e-5$ | $1.52e-6$ |
| | 2.0 | 2.0 | 2.3 | 2.7 | 3.0 | |
| $10^{-4}$ | $6.38e-3$ | $1.60e-3$ | $4.01e-4$ | $1.00e-4$ | $2.51e-5$ | $6.25e-6$ |
| | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | |
| $10^{-5}$ | $6.38e-3$ | $1.60e-3$ | $4.01e-4$ | $1.00e-4$ | $2.51e-5$ | $6.27e-6$ |
| | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | 2.0 | |

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована неполиномиальная интерполяционная формула для функции одной переменной с большими градиентами в области пограничного слоя. Формула построена так, чтобы она была точной на погранслойной составляющей, отвечающей за рост функции в пограничном слое. Доказано, что при достаточно легко проверяемых ограничениях, которые выполнены в случаях экспоненциального и степенного пограничных слоев, при наличии логарифмической особенности построенная интерполяционная формула обладает погрешностью, равномерной по погранслойной составляющей и ее производным. Показано, как исследуемая интерполяционная формула может быть применена для построения формул численного интегрирования и дифференцирования, а также в двумерном случае. Получены соответствующие оценки погрешности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. ж. вычисл. матем. 2007. Т. 10. № 3. С. 267–275.
2. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
3. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–859.

4. *Linβ T.* Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. Berlin: Springer-Verlag, 2010.
5. *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона–Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. ж. вычисл. матем. 2015. Т. 18. № 3. С. 289–303.
6. *Zadorin A.I.* Interpolation method for a function with a singular component // Lect. Notes in Comput Sci. 2009. V. 5434. P. 612–619.
7. *Kellogg R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points // Math. Comput. 1978. V. 32. P. 1025–1039.
8. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Electronic Math. Reports. 2012. V. 9. P. 445–455.
9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
10. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 1952–1962.
11. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Аналог формулы Ньютона–Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей // Сиб. ж. вычисл. матем. 2013. Т. 16. № 4. С. 313–323.
12. *Zadorin A., Zadorin N.* Quadrature formula with five nodes for functions with a boundary layer component // Lect. Notes in Comput. Sci. 2013. V. 8236. P. 540–546.
13. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Аналог формул Ньютона–Котеса для численного интегрирования функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 368–376.
14. *Shishkin G.I.* Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy. 2003. V. 103A. P. 169–201.
15. *Kopteva N.* Error expansion for an upwind scheme applied to a two-dimensional convection-diffusion problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2003. V. 41. P. 1851–1869.
16. *Gracia J.L., O'Riordan E.* Numerical approximation of solution derivatives of singularly perturbed parabolic problems of convection-diffusion type // Mathematics of Computation. 2016. V. 85. P. 581–599.
17. *Задорин А.И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. ж. вычисл. матем. 2018. Т. 21. № 3. С. 243–254.
18. *Zadorin A., Tikhovskaya S.* Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer // Int. J. of Num. Analysis and Modeling. 2019. V. 16. № 4. P. 590–608.
19. *Il'in V.P., Zadorin A.I.* Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // J. of Physics: Conference Series. 2019. V. 1260. 042003.
20. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion and Flow Problems. Berlin: Springer, 2008.
21. *Задорин А.И.* Интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях // Ученые записки Казанского университета. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157. Кн. 2. С. 55–67.