ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 3, с. 391–399

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.658

МЕТОД ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА ДЛЯ КЛАССА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ ПОДМНОЖЕСТВА ТОЧЕК ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2021 г. Ю. А. Черняев

420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

e-mail: chernyuri@mail.ru

Поступила в редакцию 24.03.2020 г.
Переработанный вариант 24.03.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Рассматривается обобщение метода проекции градиента на случай невыпуклых множеств ограничений, представляющих собой теоретико-множественную разность множества точек гладкой поверхности и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости метода. Библ. 14.

Ключевые слова: гладкая поверхность, выпуклое открытое множество, метод проекции градиента, необходимые условия локального минимума.

DOI: 10.31857/S004446692102006X

ВВЕДЕНИЕ

Один из возможных подходов к решению задачи вида $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, в случае гладкой функции $\varphi(x)$ и выпуклого замкнутого множества X состоит в построении итерационного процесса по правилу

$$x_0 \in X, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k(\mathrm{Pr}_X(x_k - \beta_k\varphi'(x_k)) - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha_k \in (0; 1]$ и $\beta_k \in (0; +\infty)$ – параметры алгоритма. В силу выпуклости и замкнутости X задача проектирования всегда имеет единственное решение. Если нахождение проекций не требует привлечения трудоемких итерационных процедур, то соответствующий метод решения исходной задачи, называемый методом проекции градиента, может оказаться эффективным.

В [1] изучается одна из модификаций указанного метода для задач с неточно заданными исходными данными. В [2] предлагается подход к решению задач нелинейного программирования, объединяющий идеи метода проекции градиента и метода барьерных функций. В [3] рассмотрен непрерывный вариант метода в пространстве с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования. Кроме того, к настоящему времени разработаны модификации метода, предназначенные для решения более сложных вычислительных задач. Например, в [4] на основе метода проекции градиента строится алгоритм нахождения квазирешения нелинейного некорректного операторного уравнения, в [5] исследуется непрерывный аналог метода в пространстве с переменной метрикой для численного решения квазивариационных неравенств, а в [6] рассматривается класс некорректных задач минимизации приближенно заданного гладкого функционала на выпуклом множестве в гильбертовом пространстве. Различные варианты метода проекции градиента и вопросы их сходимости изучаются также в [7]–[9].

Возвращаясь к задаче $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, отметим, что в случае невыпуклого допустимого множества X она существенно усложняется и для ее решения, как правило, приходится использовать иные, более трудоемкие методы. К числу наиболее распространенных из них относятся метод модифицированной функции Лагранжа и метод линеаризации. Однако для некоторых классов задач в последние годы было разработано обобщение метода проекции градиента. Одной из первых по соответствующей тематике является работа [10], где изучен класс допустимых множеств с пустой внутренностью, представляющих собой выпуклые гладкие поверхности.

Идея алгоритма, предложенного в [10], лежит в основе алгоритмов, рассматриваемых в [11]–[13] и предназначенных для решения задач с ограничениями более сложного вида. В [11] изучаются допустимые множества, представляющие собой гладкие поверхности общего вида, в [12] – теоретико-множественные пересечения сферической поверхности и выпуклого множества произвольной структуры, в [13] – пересечения гладкой поверхности общего вида и выпуклого множества.

В данной статье рассматривается обобщение метода проекции градиента на случай ограничений, представимых в виде теоретико-множественной разности множества точек гладкой поверхности S и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств $\operatorname{int} G_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, где каждое из замкнутых множеств G_i в любой своей граничной точке имеет единственную опорную гиперплоскость. В работе предлагается алгоритм построения итерационной последовательности $\{x_k\}$ и доказывается, что при выполнении ряда предположений любая ее предельная точка удовлетворяет необходимым условиям локального минимума.

В процессе использования алгоритма на каждой итерации приходится решать вспомогательную задачу проектирования точки $x_k - \beta\varphi'(x_k)$, $\beta > 0$, на пересечение l замкнутых полупространств, содержащих точку x_k, и касательной гиперплоскости к поверхности S, построенной в точке x_k. При $l = 1$ поиск точки $z(x_k)$, являющейся решением этой задачи, осуществляется просто; с ростом l ее поиск усложняется. Однако, поскольку проектирование равносильно минимизации выпуклой квадратичной функции, то соответствующая задача сводится к задаче квадратичного программирования и может быть решена с помощью конечношаговых алгоритмов. Отметим также, что построению каждого из l полупространств предшествует решение вспомогательной задачи проектирования точки x_k на одно из выпуклых замкнутых множеств G_i. Если эти множества имеют простую геометрическую структуру (например, являются шарами), то соответствующие задачи решаются просто; в противном случае поиск проекций усложняется и может потребовать привлечения итерационных процедур.

Наиболее сложной при реализации алгоритма является задача отыскания проекции точки на невыпуклое множество, представляющее собой пересечение l замкнутых полупространств и гладкой поверхности S. Как уже отмечалось в [11], за последние годы был разработан ряд итерационных алгоритмов проектирования точки на множество вида $\{x \in A : g(x) = 0\}$, где A – выпуклый компакт, а $g(x)$ удовлетворяет тому или иному условию подчинения. Одно из таких условий представляет собой липшицевость $g(x)$ на A и рассматривается в [14]. При реализации метода, предлагаемого в настоящей работе, на каждой итерации требуется проектировать различные точки отрезка $[x_k, z(x_k)]$, при этом расстояние от проектируемой точки до ее проекции не может превосходить величину $\|x_k - z(x_k)\|$, поэтому в качестве A можно брать пересечение l имеющихся полупространств и замкнутого шара с центром в проектируемой точке и радиусом, не меньшим этой величины. Поскольку гладкая поверхность может быть задана в виде $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$, где $g(x) \in C^1(E^n)$, то $g(x)$ на любом компакте является липшицевой, а значит, для нахождения проекции может быть использован алгоритм из [14].

Отметим, что привлечение итерационных процедур для поиска проекции точки на невыпуклое множество существенно увеличивает объем вычислений на итерации при использовании предлагаемого в данной работе метода. Поэтому следует ожидать, что соответствующий метод для многих конкретных задач минимизации окажется менее эффективным по сравнению с методом модифицированной функции Лагранжа или методом линеаризации, о которых упоминалось выше. Однако, как уже отмечалось в [11], названные методы имеют свои недостатки, существенно ограничивающие их практическое использование. В связи с этим возможны ситуации, когда для минимизации гладкой функции на допустимом множестве рассматриваемого вида целесообразно использовать метод проекции градиента, несмотря на его сравнительно невысокую эффективность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ МЕТОДА

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \to \min$, $x \in X \subset E^n$, в которой $\varphi(x) \in C^1(X)$, а X непусто и представляет собой теоретико-множественную разность множества точек поверхности $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$ и множества $\bigcup_{i=1}^{l} \operatorname{int} G_i$, где $g(x) \in C^1(E^n)$ и при любом $x \in S$ имеет место

$\|g'(x)\| \neq 0$, а G_i, $i = \overline{1,l}$, выпуклы и замкнуты и $\operatorname{int} G_i$, $i = \overline{1,l}$, непусты. Пусть каждое из множеств G_i, $i = \overline{1,l}$, в любой своей граничной точке x имеет единственную опорную гиперплоскость, нормаль которой считается внешней, т.е. для всех $y \in G_i$ орт $n^i(x)$ нормали удовлетворяет условию $\langle n^i(x), y - x\rangle \leq 0$. Будем полагать, что при каждом i орт $n^i(x)$ является непрерывной вектор-функцией на границе ∂G_i множества G_i.

Введем следующие обозначения: $n(x) = g'(x)\|g'(x)\|^{-1}$ – орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $\Lambda(x) = \{y \in E^n : \langle n(x), y - x\rangle = 0\}$ – касательная гиперплоскость к S в точке $x \in S$; $s^i(x)$ – проекция точки x на множество G_i, $n^i(x)$ – орт нормали опорной гиперплоскости к G_i в точке $s^i(x)$, $\Gamma^i(x) = \{e \in E^n : \langle n^i(s^i(x)), e - s^i(x)\rangle \geq 0\}$, $P(x) = \Gamma^1(x) \cap \Gamma^2(x) \cap \ldots \cap \Gamma^l(x)$.

В силу гладкости $g(x)$, гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S. Проекции $s^i(x)$ при любом $x \in X$ определяются однозначно, так как G_i, $i = \overline{1,l}$, являются выпуклыми замкнутыми множествами евклидова пространства E^n. Поскольку каждое из G_i, $i = \overline{1,l}$, в любой своей граничной точке x имеет только одну опорную гиперплоскость, то векторы $n^i(x)$, а значит, и полупространства $\Gamma^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, определяются единственным образом для любого $x \in X$. Поскольку по построению при каждом $i = 1, 2, \ldots, l$ имеет место $x \in \Gamma^i(x)$, то всегда $x \in P(x)$.

Через $z(x)$ будем обозначать проекцию точки $x - \beta\varphi'(x)$, $x \in X$, на множество $\Lambda(x) \cap P(x)$, где β – фиксированное положительное число. В силу выпуклости и замкнутости $\Lambda(x)$ и $\Gamma^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, проекция $z(x)$ при любом $x \in X$ определяется однозначно.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Задается $\beta > 0$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть x_k есть k-е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, полупространства $\Gamma^i(x_k)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, и точка $z(x_k)$.

Шаг 3. Если $x_k = z(x_k)$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 4.

Шаг 4. Задается $\alpha_k \in (0;1]$.

Шаг 5. Пусть x_{k+1} – проекция точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на $S \cap P(x_k)$.

Шаг 6. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множество S в силу непрерывности $g(x)$ является замкнутым, поэтому, в силу замкнутости $\Gamma^i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, множество $S \cap P(x_k)$ тоже замкнуто, а значит, задача проектирования на него всегда имеет хотя бы одно решение. Действительно, пусть $\tilde{x} \in E^n$, $y \in S \cap P(x_k)$ и $T = \{x \in E^n : \|x - \tilde{x}\| \leq r\}$, где r – произвольное число, не меньшее $\|\tilde{x} - y\|$, тогда каждая проекция точки $\tilde{x}$ на $S \cap P(x_k)$ является также проекцией на $S \cap P(x_k) \cap T$ и наоборот. Но $\psi(x) = \|x - \tilde{x}\|$ непрерывна при любом фиксированном $\tilde{x}$, а значит, в силу компактности $S \cap P(x_k) \cap T$, вытекающей из компактности T и замкнутости $S \cap P(x_k)$, существует $\min\limits_{x \in S \cap P(x_k) \cap T} \|x - \tilde{x}\|$, поэтому задача проектирования $\tilde{x}$ на $S \cap P(x_k)$ имеет решение.

Будем считать, что при выбранном начальном приближении $x_0 \in X$ выполняются следующие условия:

1) множество $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено;

2) для любого $x \in M(x_0)$ гиперплоскость $\Lambda(x)$ и множество внутренних точек $P(x)$ имеют непустое пересечение.

Заметим, что если точка $x \in M(x_0)$ не принадлежит границе никакого из множеств G_i, $i = \overline{1,l}$, то $\operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$ заведомо непусто, а если точка $x \in M(x_0)$ принадлежит границе только одного из множеств G_i, $i = \overline{1, l}$, то непустота $\operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$ означает несовпадение касательной гиперплоскости к поверхности S с опорной гиперплоскостью к соответствующему множеству G_i в этой точке. Если $l = 1$ или G_i, $i = \overline{1, l}$, являются попарно непересекающимися, то для любой точки $x \in M(x_0)$, очевидно, имеет место один из двух указанных случаев.

В силу непрерывности $\varphi(x)$ и замкнутости X, вытекающей из замкнутости S и открытости $\operatorname{int} G_i$, $i = \overline{1, l}$, множество $M(x_0)$ компактно, при этом в силу непрерывности $\varphi'(x)$ существует $d_0 = \beta \max\limits_{x \in M(x_0)} \|\varphi'(x)\| < \infty$, а в силу сжимающего свойства проектирования на выпуклое множество $\Lambda(x)$ при любом $x \in M(x_0)$ имеем $\|x - z(x)\| \le \beta \|\varphi'(x)\| \le d_0$.

Пусть $D(x) = \{y \in R^n : \|x - y\| \le 2d_0\}$ – шар радиуса $2d_0$ с центром в точке x, а Y – такое выпуклое компактное множество, что для любого $x \in M(x_0)$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу компактности Y и замкнутости S пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min\limits_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$, так как $g(x) \in C^1(E^n)$ и $\|g'(x)\| \ne 0$ при любом $x \in S$. Заметим, что если $x \in M(x_0)$, то при любом $\alpha \in (0; 1]$ произвольная проекция точки $x + \alpha(z(x) - x)$ на множество $S \cap P(x)$ лежит в Y, поскольку

$$\begin{aligned} \|x - \operatorname{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\| &\le \|x - (x + \alpha(z(x) - x))\| + \\ &+ \|(x + \alpha(z(x) - x)) - \operatorname{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\|, \end{aligned}$$

где первое слагаемое в правой части неравенства равно $\alpha\|z(x) - x\|$ и не превосходит d_0, а второе слагаемое не больше первого, так как $x \in S \cap P(x)$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1.1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа M, что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \le M\|x - y\|$. Тогда из показанного в [11] следует, что при $N = M/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \le N\|x - y\|$.

В силу замкнутости $P(x)$ и компактности Y их пересечение компактно. Поскольку касательная гиперплоскость к S, построенная в произвольной точке $x \in M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} P(x)$, то она имеет непустое пересечение и с $\operatorname{int} P(x) \cap \operatorname{int} Y$. Действительно, пусть $x \in M(x_0)$ и $h \in \operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$, тогда $(x; h] \subset \operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$, так как множества $\operatorname{int} P(x)$ и $\Lambda(x)$ выпуклы и по построению $x \in P(x)$ и $x \in \Lambda(x)$. Из определения множества Y следует, что любая точка $(x; h] \cap \operatorname{int} D(x)$ лежит одновременно в $\Lambda(x)$, в $\operatorname{int} P(x)$ и в $\operatorname{int} Y$. В силу произвольности рассмотренных точек $x \in M(x_0)$ и $h \in \operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$, отсюда вытекает справедливость требуемого утверждения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Справедлива следующая

Лемма 1. *Функции* $\psi_1(x) = \max\limits_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x\rangle$ *и* $\psi_2(x) = \min\limits_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x\rangle$ *непрерывны на* $S \cap Y$.

Доказательство. Докажем непрерывность $\psi_1(x)$; непрерывность $\psi_2(x)$ доказывается аналогично. Пусть x_* – произвольная точка из $S \cap Y$, $\{x_k\}$ – произвольная последовательность, лежащая в $S \cap Y$ и сходящаяся к x_*. Обозначим через y_k ($k = 1, 2, \ldots$) произвольную точку максимума $\xi_k(y) = \langle n(x_k), y - x_k\rangle$ на $P(x_k) \cap Y$. В силу неравенства Коши–Буняковского имеет место $|\langle n(x), y - x\rangle| \le \|n(x)\|\|y - x\| = \|y - x\|$, а поскольку $\{x_k\} \subset Y$, $\{y_k\} \subset Y$ и Y ограничено, то $\{\psi_1(x_k)\}$ ограничена.

Покажем, что $\lim\limits_{k \to \infty} \psi_1(x_k) = \psi_1(x_*)$. Предположим противное, тогда в силу ограниченности $\{\psi_1(x_k)\}$ найдется такая подпоследовательность $\{x_{k_m}\}$, что $\{\psi_1(x_{k_m})\}$ сходится к числу, отличному от $\psi_1(x_*)$. Множество Y компактно и $\{y_k\} \subset Y$, поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\{y_{k_m}\}$ сходится к некоторой точке $y_* \in Y$. Поскольку $y_k \in P(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то $\langle n^i(x_k), y_k - s^i(x_k)\rangle \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, $k = 1, 2, \ldots$, а тогда, в силу сходимости $\{y_{k_m}\}$ к y_* и $\{x_k\}$ к x_*, сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклые множества G_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, и непрерывности $n^i(x)$ на ∂G_i, имеет место $\left\langle n^i(x_*), y_* - s^i(x_*)\right\rangle \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, т.е. $y_* \in P(x_*)$.

Из непрерывности $n(x)$ и сделанного предположения следует, что y_* не является точкой максимума $\xi(y) = \langle n(x_*), y - x_*\rangle$ на $P(x_*) \cap Y$, т.е. имеется точка $\overline{y}_* \in P(x_*) \cap Y$, для которой $\xi(\overline{y}_*) > \xi(y_*)$. Но тогда найдутся такие окрестности $U_\delta(x_*)$ и $U_\varepsilon(\overline{y}_*)$, что для всех $x \in U_\delta(x_*)$ и $y \in U_\varepsilon(\overline{y}_*)$ справедливо неравенство $\langle n(x), y - x\rangle > 0.5(\xi(\overline{y}_*) + \xi(y_*))$. Возьмем произвольную точку $h \in \operatorname{int} P(x_*) \cap \operatorname{int} Y$ (выше было показано, что такая точка на $\Lambda(x_*)$ обязательно существует), тогда в силу выпуклости множества Y и полупространств $\Gamma^i(x_*)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, справедливо включение $(\overline{y}_*; h] \subset \operatorname{int} P(x_*) \cap \operatorname{int} Y$, а значит, для всех x из $(\overline{y}_*; h]$ имеем $\left\langle n^i(x_*), x - s^i(x_*)\right\rangle > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$. В силу сходимости $\{x_k\}$ к x_*, существует такое $k_1 \in N$, что при всех $k \geq k_1$ точка x_k лежит в $U_\delta(x_*)$, тогда, взяв произвольную точку $\tilde{h} \in (\overline{y}_*; h] \cap U_\varepsilon(\overline{y}_*)$, получим, что при $k \geq k_1$ имеет место

$$\xi_k(\tilde{h}) = \left\langle n(x_k), \tilde{h} - x_k\right\rangle > 0.5(\xi(\overline{y}_*) + \xi(y_*)).$$

Кроме этого, $\left\langle n^i(x_*), \tilde{h} - s^i(x_*)\right\rangle > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, а тогда, в силу сходимости $\{x_k\}$ к x_* и сжимающего свойства оператора проектирования, найдется такое $k_2 \in N$, что при $k \geq k_2$ имеет место $\left\langle n^i(x_k), \tilde{h} - s^i(x_k)\right\rangle > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, т.е. $\tilde{h} \in P(x_k) \cap Y$.

Поскольку $\xi(y_*) = \langle n(x_*), y_* - x_*\rangle$, то в силу непрерывности $n(x)$ и сходимости $\{y_{k_m}\}$ к y_* и $\{x_k\}$ к x_* существует такое $m_0 \in N$, что при $m \geq m_0$ имеем

$$\xi_{k_m}(y_{k_m}) = \left\langle n(x_{k_m}), y_{k_m} - x_{k_m}\right\rangle < 0.5(\xi(\overline{y}_*) + \xi(y_*)).$$

Отсюда и из вышеприведенных рассуждений следует, что при больших m точка y_{k_m} не доставляет максимум $\xi_{k_m}(y)$ и $P(x_{k_m}) \cap Y$, так как $\xi_{k_m}(\tilde{h}) > \xi_{k_m}(y_{k_m})$. Из полученного противоречия следует, что сделанное выше предположение неверно, а значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_1(x_k) = \psi_1(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной последовательности $\{x_k\}$, лежащей в $S \cap Y$ и сходящейся к x_*, утверждение леммы доказано.

Замечание 1. Поскольку касательная гиперплоскость к S, построенная в произвольной точке x множества $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int} P(x) \cap \operatorname{int} Y$, то при любом фиксированном $x \in M(x_0)$ имеет место $\psi_1(x) > 0$ и $\psi_2(x) < 0$, поэтому в силу компактности $M(x_0)$ существуют положительные константы $\varepsilon_1 = \min\limits_{x \in M(x_0)} \psi_1(x)$ и $\varepsilon_2 = -\max\limits_{x \in M(x_0)} \psi_2(x)$.

В силу компактности Y существует $d = \max\limits_{x,y \in Y} \|x - y\| < \infty$. Обозначим $\varepsilon = 0.5\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Ниже приведено утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [13], где в качестве допустимого множества X рассматривается пересечение гладкой поверхности S и выпуклого замкнутого множества F. Отличие состоит в том, что в проводимых рассуждениях множество F при каждом x заменяется на $P(x)$.

Лемма 2. *При любом* $x \in S$, *для которого* $\min\limits_{y \in M(x_0)} \|x - y\| \leq \dfrac{\varepsilon}{Nd + 1}$, *имеет место* $\psi_1(x) \geq \varepsilon$, $\psi_2(x) \leq -\varepsilon$.

Замечание 2. В силу показанного выше, если $x_* \in M(x_0)$, то

$$\left\| x_* - \Pr_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*)) \right\| \leq \frac{2d_0}{2^s}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решая относительно s неравенство $\frac{2d_0}{2^s} \le \frac{\varepsilon}{Nd+1}$, получаем $s \ge \log_2 \frac{2d_0(Nd+1)}{\varepsilon}$. Отсюда и из леммы 2 следует, что при целых $s \ge \overline{s}_1$, где $\overline{s}_1$ – наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, при котором выполняется указанное неравенство, имеет место

$$\psi_1(\mathrm{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \ge \varepsilon, \quad \psi_2(\mathrm{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \le -\varepsilon.$$

Считая $x \in X$, введем обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$; $u_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на поверхность S; $p_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на множество $S \cap P(x)$; $c_s(x)$ – решение задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x)\rangle \to \min$, $y \in P(x) \cap Y$ при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x)\rangle \ge 0$ и задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x)\rangle \to \max$, $y \in P(x) \cap Y$ при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x)\rangle < 0$. Отметим, что при фиксированных $x \in X$ и $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ проекции $u_s(x)$ и $p_s(x)$ в общем случае определяются не однозначно, так как множества S и $S \cap P(x)$, вообще говоря, не являются выпуклыми. Точка $c_s(x)$ при выбранной проекции $u_s(x)$ тоже может определяться не однозначно, так как она есть точка минимума или максимума линейной функции, не являющейся строго выпуклой или строго вогнутой.

Пусть x_* – произвольная точка множества $M(x_0)$, которая не совпадает с $z(x_*)$. Введем обозначения: $L_s(x_*)$ – прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (силу показанного в [11] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ – луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку $c_s(x_*)$. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [13].

Лемма 3. *Пусть $x_* \in M(x_0)$, $s \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, v – произвольная точка множества Y, а δ и $\overline{\delta}$ – расстояния от точки v, соответственно, до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда, если v лежит на поверхности S, то при $0 < \delta < \frac{2K}{M}$ имеет место $\overline{\delta} \ge \sqrt{\delta\left(\frac{2K}{M} - \delta\right)}$.*

С учетом справедливости леммы 3 аналогично тому, как это было сделано в [13], доказываются приведенные ниже утверждения. В проводимых при доказательстве рассуждениях множество F при фиксированном $x_* \in M(x_0)$ заменяется на $P(x_*)$.

Лемма 4. *Если $x_* \in M(x_0)$, то при всех целых $s \ge \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, где $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ – некоторые номера из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S, то на отрезке $[y_s(x_*); c_s(x_*)]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.*

Замечание 3. В данной формулировке $\overline{s}_1$ имеет тот же смысл, что и в замечании к лемме 2, а $\overline{s}_2$ – наименьший из номеров $s = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющий условию $s \ge \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$, если $\varepsilon \ge \frac{K}{M}$, и условиям $s \ge \log_2 \frac{2\sqrt{3}Ndd_0}{\varepsilon}$ и $s \ge \log_2 \frac{2d_0\sqrt{N(K - M\varepsilon)}}{\sqrt{K\varepsilon}}$ одновременно, если $\varepsilon < \frac{K}{M}$.

Лемма 5. *Если точки $x_* \in M(x_0)$ и $z(x_*)$ не совпадают, то существует такая положительная константа M_0, что при всех целых $s \ge \overline{s}$, где $\overline{s}$ – некоторый номер из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$, имеет место $\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\| \le M_0 \|y_s(x_*) - u_s(x_*)\|$.*

Замечание 4. В данной формулировке $\overline{s} = \max\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\}$, где $\overline{s}_1$ и $\overline{s}_2$ имеют тот же смысл, что и в замечаниях к леммам 2 и 4.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума $\varphi(x)$ на X и доказано предложение о сходимости алгоритма.

Лемма 6. *Если $x_* \in M(x_0)$ – точка локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X, то $z(x_*)$ совпадает с x_*.*

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [13] с заменой множества F при фиксированном $x_* \in M(x_0)$ на $P(x_*)$.

Из утверждения леммы 6 следует, что в случае выполнения равенства $x_k = z(x_k)$ при некотором k точка $x_k \in M(x_0)$ удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X. Если равенство $x_k = z(x_k)$ не выполняется ни при каком k, то алгоритм становится итерационным.

Заметим, что множество X может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $X = \{x \in E^n : f_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \dots, l;\ g(x) = 0\}$, где $g(x)$ является гладкой, а $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$, – вогнутыми и гладкими на E^n и для каждого $i = 1, 2, \dots, l$ существует такая точка $\tilde{x}_i$, что $f(\tilde{x}_i) > 0$. Тогда $G_i = \{x \in E^n : f_i(x) \ge 0\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, и для любого $x_* \in X$ имеет место представление $\Gamma^i(x_*) = \left\{x \in E^n : \left\langle f_i^/(s^i(x_*)), x - s^i(x_*)\right\rangle \le 0\right\}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Вводя обозначения $F_i = \{x \in E^n : f_i(x) \le 0\}$ и $F = \bigcap_{i=1}^{l} F_i$, получим, что $X = \{x \in F : g(x) = 0\}$, при этом конусы возможных направлений множеств F_i и $\Gamma^i(x_*)$ для каждого i в произвольной точке $x_* \in X$ совпадают.

Лемма 7. *Если точка $x_* \in M(x_0)$ совпадает с $z(x_*)$, то она стационарна в смысле Лагранжа.*

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [12] с учетом введенного выше определения точки $z(x)$ и непустоты $\operatorname{int} P(x) \cap \Lambda(x)$ для всех $x \in M(x_0)$.

Будем считать, что $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$, тогда существует константа $L = \max_{x \in Y} \|\varphi'(x)\| < \infty$. Отсюда следует, что для любых $x, y \in Y$ при некотором $\theta \in [0; 1]$ имеет место $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \|\varphi'(x + \theta(y - x))\| \|x - y\| \le L\|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y.

Введем обозначения: $z_k = z(x_k)$, $\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle$, $p_{k,s} = p_s(x_k)$. Рассмотрим способ выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, состоящий в том, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k}, где s_k – первый из номеров $s = 0, 1, 2, \dots$, при котором $\varphi(x_k) - \varphi(p_{k,s}) \ge 0.25 \times 2^{-s} |\varphi_k(z_k)|$. Аналогично тому, как это было сделано в [13], можно показать, что выбор α_k из указанного условия всегда возможен.

Лемма 8. *При выборе чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, согласно указанному способу, имеет место* $\varphi_k(z_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующей леммы из [13].

Лемма 9. *Точка $z(x)$ непрерывно зависит от x на множестве $M(x_0)$.*

Доказательство. Пусть x_* – произвольная точка из $M(x_0)$, а $\{x_k\}$ – произвольная последовательность, лежащая в $M(x_0)$ и сходящаяся к x_*. Покажем, что последовательность $\{z_k\}$ сходится к $z(x_*)$, откуда будет вытекать непрерывность $z(x)$ в точке x_*.

Предположим, что $\{z_k\}$ не сходится к $z(x_*)$. Тогда поскольку $M(x_0)$ ограничено и $\|x_k - z_k\| \le d_0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\{z_k\}$ тоже ограничена, а значит, существует подпоследовательность $\{z_{k_m}\}$, сходящаяся к некоторой точке z_*, отличной от $z(x_*)$. Поскольку $x_k, z_k \in \Lambda(x_k) \cap P(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $\langle n(x_k), z_k - x_k \rangle = 0$ и $\left\langle n^i(x_k), z_k - s^i(x_k) \right\rangle \ge 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, а значит, в силу сходимости $\{x_k\}$ к x_* и $\{z_{k_m}\}$ к z_*, имеем $\langle n(x_*), z_* - x_* \rangle = 0$ и $\left\langle n^i(x_*), z_* - s^i(x_*) \right\rangle \ge 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, т.е. $z_* \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*)$. Точка $z(x_*)$ является проекцией $x_* - \beta\varphi'(x_*)$ на выпуклое множество $P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, поэтому $\|x_* - \beta\varphi'(x_*) - z(x_*)\| < \|x_* - \beta\varphi'(x_*) - z_*\|$. Тогда, поскольку $x_{k_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} x_*$, $z_{k_m} \xrightarrow[m \to \infty]{} z_*$, то существуют такое $m_1 \in N$ и такая окрестность $U_\delta(z(x_*))$, что при $m \ge m_1$ для всех $x \in U_\delta(z(x_*))$ справедливо неравенство $\|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - x\| < \|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - z_{k_m}\|$.

Пусть $\bar{x}$ – произвольная точка из $\operatorname{int} P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, тогда $(z(x_*), \bar{x}] \subset \operatorname{int} P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$ в силу выпуклости $P(x_*)$ и $\Lambda(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h \in (z(x_*), \bar{x}] \cap U_\delta(z(x_*))$, тогда найдется окрестность $U_\varepsilon(h)$, целиком лежащая в $U_\delta(z(x_*)) \cap \operatorname{int} P(x_*)$, поскольку $U_\delta(z(x_*))$ является открытым шаром и $h \in U_\delta(z(x_*)) \cap \operatorname{int} P(x_*)$. Обозначив через h_k проекцию точки h на гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, получим

$$\left\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \right\rangle = \left\langle n(x_{k_m}), h - h_{k_m} \right\rangle + \left\langle n(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \right\rangle,$$

где второе слагаемое справа равно нулю, так как $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а модуль первого слагаемого есть расстояние от точки h до гиперплоскости $\Lambda(x_{k_m})$, в силу того что векторы $n(x_{k_m})$ и $h - x_{k_m}$ коллинеарные и $\|n(x_{k_m})\| = 1$. Поскольку $\left\langle n(x_*), h - x_* \right\rangle = 0$, так как $h \in \Lambda(x_*)$, и $\{x_{k_m}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$, а $n(x)$ является непрерывной вектор-функцией на S, то это означает, что $\left\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \right\rangle \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$, откуда $\|h - h_{k_m}\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Окрестность $U_\varepsilon(h)$ целиком лежит в $\operatorname{int} P(x_*)$, а значит, для всех $x \in U_\varepsilon(h)$ имеет место $\left\langle n^i(x_*), x - s^i(x_*) \right\rangle > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Но тогда из сходимости $\{x_{k_m}\} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$ и сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклые множества следует, что найдется такое $m_2 \in N$, что при всех $m \ge m_2$ справедливы неравенства $\|h - h_{k_m}\| < \varepsilon$ и $\left\langle n^i(x_{k_m}), h_{k_m} - s^i(x_{k_m}) \right\rangle > 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$, т.е. $h_{k_m} \in U_\varepsilon(h) \cap P(x_{k_m})$. Окрестность $U_\varepsilon(h)$ целиком лежит в $U_\delta(z(x_*))$, поэтому при $m \ge \max\{m_1, m_2\}$ имеем $\|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - h_{k_m}\| < \|x_{k_m} - \beta\varphi'(x_{k_m}) - z_{k_m}\|$, где $h_{k_m} \in P(x_{k_m}) \cap \Lambda(x_{k_m})$.

Поскольку z_k — проекция $x_k - \beta\varphi'(x_k)$ на $P(x_k) \cap \Lambda(x_k)$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, то выполнение последнего неравенства невозможно. Из полученного противоречия следует, что z_* совпадает с $z(x_*)$, а значит, $\{z_k\}$ сходится к $z(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной точки $x_* \in M(x_0)$ и последовательности $\{x_k\}$, лежащей в $M(x_0)$ и сходящейся к x_*, утверждение леммы доказано.

Предложение. *Если $\varphi(x) \in C^{1,1}(Y)$ и последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, согласно указанному способу, то любая ее предельная точка x_* совпадает с $z(x_*)$.*

Доказательство. Поскольку $\{x_k\} \subset M(x_0)$ и $M(x_0)$ ограничено, то $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* — произвольная предельная точка, а $\{x_{k_m}\}$ — соответствующая ей подпоследовательность.

Покажем, что x_* совпадает с $z(x_*)$. Из леммы 8 имеем $\lim\limits_{m\to\infty} \left\langle \varphi'(x_{k_m}), z(x_{k_m}) - x_{k_m} \right\rangle = 0$, а значит, $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle = 0$, так как $x_{k_m} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_*$ и из леммы 9 следует, что $z(x_{k_m}) \xrightarrow[m\to\infty]{} z(x_*)$. Поскольку $z(x_*)$ — проекция точки $x_* - \beta\varphi'(x_*)$ на выпуклое множество $P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$ и при этом $x_* \in P(x_*) \cap \Lambda(x_*)$, то

$$\left\langle x_* - z(x_*), x_* - \beta\varphi'(x_*) - z(x_*) \right\rangle = \|x_* - z(x_*)\|^2 + \beta\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle \le 0,$$

где $\left\langle \varphi'(x_*), z(x_*) - x_* \right\rangle = 0$, а значит, x_* совпадает с $z(x_*)$. В силу произвольности рассмотренной предельной точки x_* последовательности $\{x_k\}$, утверждение предложения доказано.

Из данного предложения и леммы 7 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанном способе выбора α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, стационарна в смысле Лагранжа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П., Недич А.* О трехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для решения задач минимизации с неточными исходными данными // Известия вузов. Математика. 1993. № 12. С. 35–43.
2. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Барьерно-проективные методы решения задач нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 5. С. 669–684.
3. *Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П.* Регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1587–1595.

4. *Козлов А.И.* Градиентно-проекционный метод для нахождения квазирешений нелинейных нерегулярных операторных уравнений // Вычислит. методы и программирование. 2003. Т. 4. Вып. 1. С. 117–125.
5. *Мияйлович Н., Ячимович М.* Некоторые непрерывные методы для решения квазивариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 202–208.
6. *Кокурин М.Ю.* О решении некорректных невыпуклых экстремальных задач с точностью, пропорциональной погрешности в исходных данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 11. С. 1815–1828.
7. *Du N., Wang H., Liu W.* A fast gradient projection method for a constrained fractional optimal control // J. Scientific Comput. 2016. V. 68. № 1. P. 1–20.
8. *Tang Z., Qin J., Sun J., Geng B.* The gradient projection algorithm with adaptive mutation step length for non-probabilistic reliability index // Tehnicki Vjesnik. 2017. V. 24. № 1. P. 53–62.
9. *Preininger J., Vuong P.T.* On the convergence of the gradient projection method for convex optimal control problems with bang-bang solutions // Comput. Optimizat. Appl. 2018. V. 70. № 1. P. 221–238.
10. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Сходимость итерационного метода решения задачи математического программирования с ограничением в виде выпуклой гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 4. С. 609–612.
11. *Черняев Ю.А.* Обобщение метода проекции градиента и метода Ньютона на экстремальные задачи с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 9. С. 1493–1502.
12. *Черняев Ю.А.* Сходимость метода проекции градиента и метода Ньютона для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения сферической поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1733–1749.
13. *Черняев Ю.А.* Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 37–49.
14. *Дуллиев А.М., Заботин В.И.* Итерационный алгоритм проектирования точки на невыпуклое многообразие в линейном нормированном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 5. С. 827–830.