ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 3, с. 519–528

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633

ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОЙ ВЗАИМНОЙ ДИФФУЗИИ НА ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЕ[1)]

А. В. Нестеров

117997 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Россия

e-mail: andrenesterov@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2020 г.
Переработанный вариант 20.05.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений, описывающих процесс переноса с диффузией в многофазной среде в случае, когда обмен между фазами происходит намного быстрее процессов переноса и диффузии. Рассматривается случай взаимного влияния диффузионных потоков компонент друг на друга. При принятых на данные задачи условиях главный член асимптотики описывается многомерным обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза. При выполнении ряда дополнительных условий приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 8.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение, обобщенное многомерное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза.

DOI: 10.31857/S0044466921020095

ВВЕДЕНИЕ

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы уравнений переноса с малой нелинейностью и диффузионными слагаемыми

$$\varepsilon^2\left(U_t+\sum_{i=1}^{m}D_iU_{x_i}\right)=AU+\varepsilon F(U)+\varepsilon^3\sum_{i=1}^{m}B_iU_{x_ix_i},\qquad |x_i|<\infty,\quad 1\le i\le m,\quad t>0, \tag{1}$$

$$U(\overline{x},0)=H\omega\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right). \tag{2}$$

Здесь $U=\{u_1,\dots,u_K\}$ – решение, $0<\varepsilon\ll 1$ – малый положительный параметр, D_i – диагональные матрицы:

$$D_i=\{d_{i,ll},\, d_{i,lp}=0\ \ \forall l\ne p, 1\le i\le m, 1\le l,\ p\le k\},$$

где первый индекс относится к пространственным переменным, пара второй-третий – к компонентам решения, $F(U)$ – достаточно гладкая, $\omega(\overline{z})$ – быстро убывает вместе со всеми своими производными при $\|x\|\to\infty$:

$$\left|\omega^{(k)}(\overline{z})\right|<Ce^{-\kappa\|\overline{z}\|^2}\quad \forall z, C,\kappa>0,\quad \forall k=0,1,\dots . \tag{3}$$

Константы C, κ могут зависеть от номера k. Матрицы коэффициентов диффузионного обмена B_i описывают диффузионные потоки по пространственным переменным x_i: $B_i=\{b_{i,lp}, 1\le i\le m,$ $1\le l,\ p\le k\}$, где первый индекс относится к пространственным переменным, пара второй-тре-

1) Работа выполнена при поддержке гранта РЭУ им. Г.В. Плеханова по теме “Интеллектуальная система анализа спутниковых данных с целью прогнозирования экономических последствий динамики глобального распределения запасов питьевой воды и пожарной опасности”.

тий — к компонентам решения. Соответственно диффузионный поток l-й компоненты вдоль оси x_i имеет вид

$$J_{i,l} = \varepsilon^3 \sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{k} b_{i,lp} u_{p,x_i x_i}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le l \le k.$$

На данные задачи наложим условия.

Условие I. Матрица A имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому отвечает собственный вектор h_0, вектор h_0^* есть собственный вектор матрицы A^{T}, отвечающий нулевому собственному значению; остальные ненулевые собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i=1, 2, \ldots, k-1$. Ниже, для сокращения некоторых выкладок, будем считать, что остальные собственные значения матрицы A однократные (что не ограничивает общности).

Условие II. Потребуем, чтобы

$$(F(Z), h_0^*) = 0.$$

Условие III. Коэффициенты B_i удовлетворяют условиям: при любых фиксированных индексах i транспонированные по индексам l, p матрицы B_i^{T} имеют нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор h_0^*: $B_i^{\mathrm{T}} h_0^* = 0 \quad \forall Z, 1 \le i \le m$.

Условие IV. Система (1) является параболической (см. [1]).

Легко показать, что из условий I–III следует закон сохранения

$$\int_{R^m} (U, h_0^*) d\overline{x} = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Начальные условия (2), имеющие вид асимптотически узкой “шапочки”, выбраны таким образом для того, чтобы исследовать асимптотику решения в наиболее интересных зонах больших градиентов начальных условий.

Настоящая работа является продолжением работ [2], [3]. Основная цель — получение формального асимптотического разложения решения задачи (1), (2) по малому параметру и определение задач, описывающих главный член разложения, представляющий в прикладных областях основной интерес.

Система уравнений (1) может описывать процессы переноса в многофазной среде в случае многих пространственных переменных, когда процессы обмена между фазами (описываемые слагаемым AU) проходят намного быстрее, чем процессы переноса, и отклонения от линейного режима малы. Поскольку в многофазной среде диффузионный перенос одной фазы может влиять на диффузионный перенос других фаз, то в слагаемых со вторыми пространственными производными матрицы B_{ij}, описывающие диффузионный перенос компонентов, не являются диагональными. Подобного типа задачи могут встречаться в теории коагуляции, тепло- и массопереноса и в других прикладных областях.

Асимптотическое разложение (АР) решения начальной задачи строится методом пограничных функций (см. [4]) и имеет вид

$$\begin{gathered} U(\overline{x}, t) = S(\zeta, t) + \Pi(\xi, \tau) + R_N = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\overline{\zeta}, t) + \Pi_i(\overline{\xi}, \tau)) + R_N = U_N + R_N, \\ \zeta_i = (x_i - V_i t)/\varepsilon, \quad \xi_i = x_i/\varepsilon, \quad \tau = t/\varepsilon^2, \quad V_i = (D_i h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*). \end{gathered} \tag{5}$$

Порядок разложения N определяется гладкостью входных данных.

Построение АР подробно описано в [2], [3] и др. В соответствии с погранслойным методом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова (см. [4]) нелинейная функция $F(U)$ представляется в виде

$$\begin{gathered} F(U) = F(\overline{U} + S + \Pi + R) = F(\overline{U}) + (F(\overline{U} + S) - F(\overline{U})) + (F(\overline{U} + \Pi) - F(\overline{U})) + \\ + (F(\overline{U} + S + \Pi + R) - F(\overline{U} + S) - F(\overline{U} + \Pi) + F(\overline{U})) = \overline{F} + SF + \Pi F + RF. \end{gathered} \tag{6}$$

В этом представлении член $\overline{U}$ играет вспомогательную роль.

1. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Наличие нулевого собственного значения у матрицы A относит сингулярно возмущенную систему (1) к так называемому критическому случаю (см. [4]).

1.1. Построение регулярной части АР

Регулярная часть АР решения задачи (1) при условиях (2) равна нулю, но для дальнейшего изложения необходимо выписать задачу, из которой определяется главное слагаемое регулярной части

$$\bar{U}(\bar{x},t) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{u}_i(\bar{x},t). \tag{7}$$

Подставляя разложение (7) в систему (8):

$$\begin{gathered} \varepsilon^2\left(\bar{U}_t + \sum_{i=1}^{m} D_i \bar{U}_{x_i}\right) = A\bar{U} + \varepsilon(\bar{U}) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^{m} B_i \bar{U}_{x_i x_i}, \\ |x_i| < \infty, \quad 1 \le i \le m, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{8}$$

стандартным способом из [4] получаем соотношения для определения членов разложения

$$\begin{gathered} \varepsilon^0 : A\bar{u}_0 = 0, \\ \varepsilon^1 : A\bar{u}_1 = -F(\bar{u}_0), \\ \varepsilon^2 : A\bar{u}_2 = \bar{u}_{0,t} + \sum_{i=1}^{m} D_i \bar{u}_{0,x_i} - F_u'(\bar{u}_0)\bar{u}_1, \\ \ldots \end{gathered}$$

Система для определения $\bar{u}_0$, очевидно, разрешима, система для определения $\bar{u}_1$ так же разрешима в силу условия II $(F(Z), h_0^*) = 0 \quad \forall Z$, откуда имеем

$$\begin{gathered} \bar{u}_0(x,t) = u_0(x,t)h_0, \\ \bar{u}_1 = u_1(x,t)h_0 - GF(\bar{u}_0), \end{gathered}$$

где G – псевдообратный к A оператор, $u_0(x, t)$ и $u_1(x, t)$ – пока не определенные скалярные функции.

Условие разрешимости системы для u_2 с учетом условия II преобразуется к форме

$$\bar{u}_{0,t} + \sum_{i=1}^{m} V_i \bar{u}_{0,x_i} = 0,$$

где

$$V_i = (D_i h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*). \tag{9}$$

Полученные выражения для коэффициентов V_i существенны для дальнейших построений.

При поставленных начальных условиях, зависящих только от растянутой переменной x/ε, начальные условия для u_0 нулевые, поэтому

$$\bar{u}_0(\bar{x},t) \equiv 0 \quad \forall \bar{x}, t$$

и все остальные $\bar{u}_i$ тоже равны нулю.

1.2. Построение функции S

Функция S, зависящая от растянутых переменных, строится в виде

$$S(\bar{\zeta},t) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i s_i(\bar{\zeta},t), \quad \zeta_i = (x_i - V_i t)/\varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Здесь V_i найдены выше в (9). Функция S есть решение системы

$$\varepsilon^2\left(S_t + \sum_{i=1}^m D_i S_{x_i}\right) = AS + \varepsilon SF + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m SB_i S_{x_i x_i}, \qquad |\overline{\zeta}| < \infty, \quad t > 0. \tag{11}$$

Переходя к переменным $(\overline{\zeta}, t)$ и принимая во внимание $\overline{U} = 0$, получаем

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) S_{\zeta_i} = AS + \varepsilon F(S) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i S_{\zeta_i \zeta_i}. \tag{12}$$

Подставляя разложение (10) в систему (12) стандартным способом из [4], получаем соотношения

$$\begin{gathered}\varepsilon^0 : As_0 = 0,\\ \varepsilon^1 : As_1 = \tilde{S}_1,\\ \varepsilon^2 : As_2 = s_{0,t} + \tilde{S}_2,\\ \dots\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{S}_1 = \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) s_{0,\zeta_i} - F(s_0) - \sum_{i=1}^m B_i s_{0,\zeta_i\zeta_i},\\ \tilde{S}_2 = \sum_{i=1}^m (D_i - V_i) s_{1,\zeta_i} - F_u'(s_0) s_1 - \sum_{i=1}^m B_i s_{1,\zeta_i\zeta_i},\\ \dots\end{gathered}$$

Имеем

$$s_0(\overline{\zeta}, t) = \varphi_0(\overline{\zeta}, t) h_0.(13) \tag{13}$$

Легко показать, что система уравнений для s_1 разрешима в силу условий II и III, поэтому s_1 можно записать в виде

$$s_1(\overline{\zeta}, t) = \varphi_1(\overline{\zeta}, t) h_0 + G\tilde{S}_1. \tag{14}$$

Запишем условие разрешимости системы уравнений для определения s_2:

$$(s_{0,t} + \tilde{S}_2, h_0^*) = 0.$$

Подставляя сюда $s_0 = h_0\varphi_0$, $\tilde{S}_2$, исключая φ_1 с помощью соотношения (14), принимая во внимание условия I–III и легко проверяемое равенство $((D_i - V_j)h_0, h_0^*) = 0$, получаем замкнутое уравнение для определения φ_0. Введем обозначения

$$\begin{gathered}\Psi_i = (D_i - V_i),\\ M_{ii} = (\Psi_i G \Psi_i h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*),\\ M_{ij} = ((\Psi_i G \Psi_j h_0, h_0^*) + (\Psi_j G \Psi_i h_0, h_0^*))/(2(h_0, h_0^*)),\\ F_{i,\mathrm{eff}} = -(\Psi_i GF(\varphi_0 h_0), h_0^*)/(h_0, h_0^*),\\ B_{ik,\mathrm{eff}} = -(\Psi_k G B_i h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*).\end{gathered} \tag{15}$$

Тогда уравнение для определения φ_0 может быть записано в компактной форме

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{i,\mathrm{eff}}(\varphi_0))'_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\mathrm{eff}} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_i\zeta_k} = 0. \tag{16}$$

Наложим условие диссипативности.

V. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} z_i z_j$ является отрицательно знакоопределенной (или полузнакоопределенной):

$$\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} z_i z_j \leq 0 \quad \forall \sum_{i=1}^{m} z_i^2 > 0.$$

Не затрагивая вопросы существования, единственности и свойств решений уравнения (16), формально построим остальные члены разложения (10).

Уравнения для остальных членов разложения (10) получаются стандартно (см. [4]). Выпишем члены порядка ε, ε^2 и ε^3:

$$\varepsilon^1 : As_1 = \tilde{S}_1,$$
$$\varepsilon^2 : As_2 = s_{0,t} + \tilde{S}_2,$$
$$\varepsilon^3 : As_3 = s_{1,t} + \tilde{S}_3,$$

где $\tilde{S}_3$ получается из $\tilde{S}_2$ (см. выше) заменой φ_1 на φ_2. Из первого и второго соотношений получаем

$$s_1 = h_0 \varphi_1(\overline{\zeta}, t) + G\tilde{S}_1,$$
$$s_2 = h_0 \varphi_2(\overline{\zeta}, t) + G\tilde{S}_2,$$

где φ_1, φ_2 – пока произвольные функции.

Записывая условие разрешимости системы уравнений для s_3:

$$(s_{1,t} + \tilde{S}_3, h_0^*) = 0,$$

после исключения s_2, получаем уравнение для определения φ_1.

Вводя обозначение

$$F1_{i,\text{eff}} = (\Psi_i GF(\varphi_0 h_0) h_0, h_0^*)/(h_0, h_0^*),$$

и принимая во внимание обозначения (15), введенные выше, запишем это уравнение в виде

$$\varphi_{1,t} + \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} \varphi_{1,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^{m} (F1_{i,\text{eff}} \varphi_1)_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^{m} B_{ik,\text{eff}} \varphi_{1,\zeta_i\zeta_i\zeta_k} = \Psi_1(\overline{\zeta}, t), \tag{17}$$

где Ψ_1 выражается через φ_0.

Уравнения для остальных членов разложения получаются аналогично и имеют аналогичный вид (с заменой индекса у φ и Ψ с 1 на n, при этом Ψ_n выражается через $\varphi_j, j < n$).

Построенная выше функция S ни в каком приближении не может удовлетворить начальным условиям. Для удовлетворения начальным условиям строится функция Π:

$$\Pi(\overline{\xi}, \tau) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i p_i(\overline{\xi}, \tau), \quad \overline{\xi} = \overline{x}/\varepsilon, \tau = t/\varepsilon^2. \tag{18}$$

Построение функции Π делается стандартно (см. [4]). Функция Π есть решение системы

$$\begin{gathered} \varepsilon^2 \left(\Pi_t + \sum_{i=1}^{m} D_i \Pi_{x_i} \right) = A\Pi + \varepsilon \Pi F + \varepsilon^3 \sum_{i,j=1}^{m} B_i \Pi_{x_i x_i}, \\ |\overline{x}| < \infty, \quad \tau > 0, \end{gathered} \tag{19}$$

совместно с функцией S должна удовлетворять начальным условиям и быть функцией погранслоя:

$$\begin{gathered} S(\overline{\zeta}, 0) + \Pi(\overline{\xi}, 0) = H\omega\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right), \\ \Pi_{\tau\to\infty}(\overline{\xi}, \tau) \to 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Построение уравнений, из которых определяются члены разложения (18), проводится стандартно (см. [4]), описано во многих работах и здесь не приводится.

Главный член разложения (18) есть решение системы

$$p_{0,\tau} = Ap_0, \quad \left|\overline{\xi}\right| < \infty, \quad \tau > 0. \tag{21}$$

Начальные условия для s_0 и p_0 ставятся совместно с условием p_0 при $\tau \to \infty$:

$$p_0 + s_0\big|_{t=0} = U(\overline{x}, 0) = H\omega\left(\frac{\overline{x}}{\varepsilon}\right), \quad p_0(\overline{\xi}, \infty) < \infty. \tag{22}$$

Из условий (22) с учетом $s_0 = h_0\varphi_0(\zeta, t)$ легко получаются начальные условия для φ_0 и p_0. В силу условия I на собственные значения матрицы A функция p_0 имеет вид

$$p_0 = C_0(\xi)h_0 + \sum_{i=1}^{N-1} C_i(\xi)h_i e^{\lambda_i t}. \tag{23}$$

Из условий $\operatorname{Re}\lambda_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, N-1$ и $p_0 \to 0$ при $t \to \infty$ получаем $C_0 = 0$.

Соответственно начальные условия (22) принимают вид

$$\sum_{i=1}^{N-1} C_i(\overline{\xi})h_i + \varphi_0(\overline{\zeta}, 0)h_0 = H\omega(\overline{\xi}),$$

откуда однозначно находятся все C_i, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ и $\varphi_0(\zeta, 0)$:

$$\varphi_0(\overline{\zeta}, 0) = q\omega(\overline{\xi}), \tag{24}$$

где q – константа.

Начальные условия для $\varphi_0(\zeta, t)$ определены.

Тем самым, функция p_0 однозначно определена и, очевидно, удовлетворяет оценке

$$\left\|p_0(\overline{\xi}, \tau)\right\| < C\exp\left(-\kappa\left(\left\|\overline{\xi}\right\|^2 + \tau\right)\right), \quad \kappa > 0. \tag{25}$$

Убывание p_0 по пространственным переменным является следствием требований, наложенных на начальные условия (2).

Остальные p_i $(i \geq 1)$ определяются из неоднородных СОДУ:

$$p_{i,\tau} = Ap_i + P_i, \quad i \geq 1, \quad \left|\overline{\xi}\right| < \infty, \quad \tau > 0. \tag{26}$$

Здесь P_i выражаются через найденные ранее p_j, $j < i$.

Начальные условия для функций φ_i и p_i получаются аналогично (см. [4]):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (s_i(\overline{\zeta}, 0) + p_i(\overline{\xi}, 0)) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i(\overline{\xi}, \tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} 0,$$

что дает

$$\begin{gathered} s_i(\overline{\zeta}, 0) + p_i(\overline{\xi}, 0) = 0, \\ p_i(\overline{\xi}, \tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} 0 \quad \forall i > 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Из условий (26) получаются начальные условия для φ_i и p_i.

Решения СОДУ (26) с начальными условиями (27) существуют и удовлетворяют аналогичным оценкам:

$$\left\|p_i(\overline{\xi}, \tau)\right\| < C\exp\left(-\kappa\left(\left\|\overline{\xi}\right\|^2 + \tau\right)\right), \quad \kappa > 0. \tag{28}$$

2. ОЦЕНКА S-ФУНКЦИЙ

К сожалению, автору не удалось найти в литературе исчерпывающих результатов, касающихся вопросов существования, единственности и оценок решений начальных задач для уравнений типа (16).

Легко получить (совершенно аналогично оценкам для одномерного уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза), что при выполнении условия диссипативности V, интегрируемости с квадратом и быстрого убывания начальных условий на бесконечности, выполняется оценка

$$\frac{d}{dt}M(t) < 0,$$

где

$$M(t) = \int\limits_{R^m} \varphi_0^2(\overline{\zeta}, t)d\overline{\zeta}.$$

В [2], [3] показано, что множество матриц A, для которых выполняется условие диссипативности V и условия I на собственные значения, не пусто, и что матрицы соответствующего вида могут возникать в физических задачах.

В [5]–[7] показано, что при начальных данных, удовлетворяющих оценке $|u(x,0)| < Ce^{-\kappa x^2}$, $\kappa > 0$, решение уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0$$

удовлетворяет оценке

$$u(x,t) = At^{-1/2}e^{-\xi^2} + O(t^{-1}), \quad \xi = \frac{x}{(2\sqrt{t})}. \tag{29}$$

Отметим, что, согласно замечанию 3, на стр. 76 работы [5], остаток в (29) не зависит от ξ. Но, очевидным образом, он зависит не только от переменной t, но и от x, причем, как и все решение, интегрируем по x с квадратом. К сожалению, асимптотическое поведение остатка при $|x| \to \infty$ в [5] не исследовано.

Ввиду обстоятельств, изложенных выше, придется оперировать с, по сути, не проверяемыми условиями на данные задачи.

Будем считать выполненными условие 1 и условие 2.

Условие 1. Пусть выполнены условия I–V и функция $F(U)$, матрицы $B(U)$ таковы, что решение задачи (15), (23) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$ и на этом промежутке выполняется оценка

$$|\varphi_0(x,t)| < Ce^{-\kappa\varsigma^2} \quad \forall 0 \le t \le T, \quad C > 0, \quad \kappa > 0,$$

где C и κ – положительные постоянные.

Условие 2. Решения всех задач (16), (26) до номера N существуют, единственны и удовлетворяют на том же промежутке оценке

$$|\varphi_i(x,t)| < Ce^{-\kappa\varsigma^2} \quad \forall 0 \le t \le T, \quad \forall 1 \le i \le N, \quad C > 0, \quad \kappa > 0.$$

Результаты из [5]–[7] дают основания полагать, что множества функций $F(U)$ и матриц $B(U)$, при которых выполняются условие 1 и условие 2, не пусты и в многомерном случае.

3. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Общие теоремы существования и единственности (см. [1]) при выполнении условия IV гарантируют существование и единственность решения исходной задачи (1), (2) лишь на асимптотически малом промежутке времени. Поэтому будем считать выполненным Условие 3, так же не проверяемое непосредственно по данным задачи.

Условие 3. Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ не зависит от ε.

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

Теорема. *Если справедливы условия* I–V *и условия* 1–3, *то решение задачи* (1), (2) *представимо в виде*

$$U(\overline{x},t) = S_N(\overline{\zeta},t) + \Pi_N(\overline{\xi},\tau) + R_{N+3} = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i(s_i(\overline{\zeta},t) + \Pi_i(\overline{\xi},\tau)) + R_N = U_N + R_N,$$

где $S + \Pi$ есть построенное АР, и остаточный член удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2\left(R_t + \sum_{i=1}^{m} D_i R_{x_i}\right) = AR + \varepsilon RF + \varepsilon^3 \sum_{i,j=1}^{m} B_{ij} R_{x_i x_j} + r, \quad |\overline{x}| < \infty, \quad t > 0,$$

$$R(\overline{x}, 0) = 0, \quad r = O(\varepsilon^N).$$

Доказательство. Существование самой величины R следует из условия 3. Оценка $r = O(\varepsilon^N)$ непосредственно вытекает из оценок (25), (28), оценок в условиях 1, 2 и алгоритма построения АР.

ВЫВОДЫ

1. Главный член АР при $t > t_0$, где $t_0 > 0$ – любое фиксированное (не зависящее от ε) число, имеет вид

$$U(\overline{x}, t) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i (s_i(\overline{\zeta}, t) + \Pi_i(\overline{\xi}, \tau)) + R_N = s_0(\overline{\zeta}, t) + O(\varepsilon) = \varphi_0(\overline{\zeta}, t) h_0 + O(\varepsilon). \tag{30}$$

В разложении (30) $\varphi_0(\zeta, t)$ есть решение уравнения (15), которое в развернутой форме имеет вид

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^{m} F'_{i,\mathrm{eff}}(\varphi_0)\varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^{m} B_{ik,\mathrm{eff}} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_i\zeta_k} = 0 \tag{31}$$

(обобщенное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Вриза (см. [7])). Для квадратичной функции $F(u)$ уравнение (31) становится прямым обобщением уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза на многомерный случай:

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^{m} k_i \varphi_0 \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^{m} B_{ik,\mathrm{eff}} \varphi_{0,\zeta_i\zeta_i\zeta_k} = 0. \tag{32}$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (32) отличается от уравнения Бюргерса–Кортевега–де Вриза (см. [8]) только коэффициентами.

Можно привести пример системы (1) двух уравнений с двумя пространственными переменными и квадратичной нелинейностью, которая удовлетворяет всем условиям, наложенным выше:

$$\varepsilon^2(u_t + D_{1,x}u_x + D_{1,y}u_y) = -au + bv + \varepsilon(eu^2 + fuv + gv^2) + \varepsilon^3(cu_{xx} - dv_{xx} + k(cu_{yy} - dv_{yy})),$$

$$\varepsilon^2(v_t + D_{2,x}v_x + D_{2,y}v_y) = au - bv - \varepsilon(eu^2 + fuv + gv^2) + \varepsilon^3(-cu_{xx} + dv_{xx} - k(cu_{yy} - dv_{yy})).$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d, $k > 0$.

Переменные ζ_1, ζ_2 имеют вид

$$\zeta_1 = (x - V_x t)/\varepsilon, \quad \zeta_2 = (y - V_y t)/\varepsilon,$$

$$V_x = \frac{bD_{1,x} + aD_{2,x}}{a + b}, \quad V_y = \frac{bD_{1,y} + aD_{2,y}}{a + b}.$$

Уравнение (32) приобретает вид

$$\begin{gathered}\varphi_{0,t} + M_{11}\varphi_{0,\zeta_x\zeta_x} + 2M_{12}\varphi_{0,\zeta_x\zeta_y} + M_{22}\varphi_{0,\zeta_y\zeta_y} = k_i(\varphi_0^2)_{\zeta_x} + k_2(\varphi_0^2)_{\zeta_y} + \\ + B_{11,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_1\zeta_1\zeta_1} + B_{12,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_1\zeta_1\zeta_2} + B_{21,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_2\zeta_2\zeta_1} + B_{22,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_2\zeta_2\zeta_2}.\end{gathered} \tag{33}$$

Коэффициенты уравнения (33) равны

$$M_{11} = -\Delta x^2 r, \quad M_{12} = -\Delta x \Delta y r, \quad M_{22} = -\Delta y^2 r,$$

где

$$r = \frac{ab}{(a + b)^3}, \quad \Delta x = D_{1,x} - D_{2,x}, \quad \Delta y = D_{1,y} - D_{2,y}.$$

Остальные коэффициенты равны

$$k_1 = k\Delta x \frac{b}{(a+b)^2}, \quad k_2 = k\Delta y \frac{b}{(a+b)^2}, \quad k = e + f\frac{a}{b} + g\left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Коэффициенты при третьих производных равны

$$B_{11,\mathrm{eff}} = \Delta xq, \quad B_{12,\mathrm{eff}} = \Delta xkq, \quad B_{21,\mathrm{eff}} = \Delta yq, \quad B_{22,\mathrm{eff}} = \Delta ykq,$$
$$q = \frac{-cb+ad}{(a+b)^2}.$$

2. Можно отметить, что для главного члена асимптотики так же выполняется закон сохранения (4):

$$\int\limits_{R^m} (s_0(\overline{\zeta},t), h_0^*)d\overline{\zeta} = \int\limits_{R^m} \varphi_0(\overline{\zeta},t)(h_0,h_0^*)d\overline{\zeta} = \mathrm{const},$$

так как при условиях

$$\left|\varphi_0^{(k)}(\overline{\zeta},t)\right| < Ce^{-\kappa\|\overline{z}\|^2} \quad \forall z, C, \quad \kappa > 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

получаем

$$\int\limits_{R^m}\left(\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j} + \sum_{i=1}^m k_i\varphi_0\varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,j,k=1}^m B_{ijk,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j\zeta_k}\right)d\overline{\zeta} = 0 = \frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\varphi_0 d\overline{\zeta} +$$
$$+ \frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\sum_{i,j=1}^m M_{ij}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j}d\overline{\zeta} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\sum_{i=1}^m k_i(\varphi_0)^2_{\zeta_i}d\overline{\zeta} + \frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\sum_{i,j,k=1}^m B_{ijk,\mathrm{eff}}\varphi_{0,\zeta_i\zeta_j\zeta_k}d\overline{\zeta} = \frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\varphi_0 d\overline{\zeta},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{R^m}\varphi_0(\overline{\zeta},t)d\overline{\zeta} = 0.$$

3. Таким же образом можно строить асимптотики решений задач Коши в случае, когда начальные условия имеют вид не “шапочки” (2), а сглаженной “ступеньки”. Построение асимптотик начально-краевых задач возможно лишь для главного члена.

4. При иной расстановке степеней малого параметра, а так же при изменении условий на функцию F и матрицы A, B асимптотика решения может иметь совершенно иной вид.

5. Условие IV параболичности системы (1) легко проверяется в случае, когда все матрицы B_i приводятся к диагональной форме одним преобразованием $\tilde{B}_i = C^{-1}B_iC = \mathrm{diag}\{\tilde{b}_{i,jj}, 1 \le i \le k, 1 \le j \le m\}$ (например, в случае $B_i = q_iB$, где $q_i > 0$ – скаляры). Тогда из условия $\tilde{b}_{i,jj} \ge 0$ $\forall 1 \le i \le k$, $1 \le j \le m$, будет следовать параболичность системы (1).

В качестве примера можно привести старшую пространственную часть оператора в случае трех пространственных переменных и трех неизвестных

$$B(q_1U_{xx} + q_2U_{yy} + q_3U_{zz}), \quad q_1, q_2, q_3 > 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} a+b & -c & -e \\ -a & c+d & -f \\ -b & -d & e+f \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d,e,f > 0.$$

6. Формально алгоритм остается в силе и при наличии в правой части системы (1) смешанных вторых производных, а так же недиагональных матрицах D_i.

7. Очень интересные свойства части пространственного оператора, содержащей вторые производные (связь между размерностью системы и размерностью пространства), описаны в [1]. Квадратичная форма, отвечающая вторым производным в уравнении (16),

$$\sum_{i,j=1}^{m} M_{ij} z_i z_j,$$

может быть вырожденной, причем степень вырождения зависит от соотношения между числом уравнений k и пространственных переменных m.

Было бы интересно выявить аналогичные свойства у полной дифференциальной части (содержащей третьи производные) уравнения (16).

8. С помощью асимптотического анализа сингулярно возмущенная исходная система k уравнений по сути свелась к одному не возмущенному уравнению (16), исследование которого существенно проще, чем исходной системы (1), и при численном решении требует существенно меньших машинных ресурсов. Так же выявлены неочевидные закономерности поведения решения исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
2. *Нестеров А.В.* О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 4. С. 639.
3. *Нестеров А.В., Шулико О.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 268.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978. С. 106.
5. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 72.
6. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Об асимптотике при $t \to \infty$ решений нелинейных уравнений с диссипацией // Матем. заметки. 1989. Вып. 4. С. 118.
7. *Намкин П.И., Шишмарев И.А.* Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де-Вриза–Бюргерса // Функц. анализ и его приложения. 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.