

## АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И СТРУКТУР РАЗРЫВОВ В ИХ РЕШЕНИЯХ

© 2021 г. И. Б. Бахолдин

125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

e-mail: [ibbakh@yandex.ru](mailto:ibbakh@yandex.ru)

Поступила в редакцию 20.08.2020 г.  
Переработанный вариант 20.08.2020 г.  
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Рассмотрены различные варианты записи уравнений двухжидкостной плазмы, называемых уравнениями электромагнитной гидродинамики и представляющих собой обобщение уравнений обычной магнитной гидродинамики посредством добавления дисперсионных членов. Проанализировано применение конечно-разностных методов для решения этих уравнений. Численно решена задача о распаде разрыва и рассмотрены различные типы расширяющихся со временем структур разрывов: быстрых и медленных магнитозвуковых структур и альвеновских структур. При умеренной амплитуде быстрые и медленные магнитозвуковые структуры типичны для теории бездиссипативных разрывов. Установлено, что вследствие исчезновения дисперсии для коротких волн при некоторых начальных данных происходит опрокидывание волны, требующее рассмотрения решений с разрывами или включения дополнительных диссипативных или дисперсионных членов в уравнения. При добавлении газодинамической вязкости обнаружена структура типа ударной волны. Исследованы эволюционность этого разрыва и условия на разрыве. Библ. 18. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** двухжидкостная плазма, электромагнитная гидродинамика, дисперсия, структуры разрывов, задача о распаде разрыва, конечно-разностные численные методы.

DOI: 10.31857/S0044466921030029

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию математических свойств уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики (ЭМГД), возникающих в решениях этих уравнений структур разрывов и численных методов для решения этих уравнений. Под приближением ЭМГД понимается гидродинамическое двухжидкостное приближение плазмы с допущениями квазинейтральности и пренебрежением током смещения в уравнениях Максвелла. В этом случае в уравнениях можно исключить некоторые неизвестные и свести их к одножидкостным уравнениям. Эти уравнения представляют собой уравнения классической магнитной гидродинамики (МГД) [1] с добавленными дисперсионными членами. Эти члены возникают за счет учета ионной и электронной проводимости и инерции электронов при условии квазинейтральности. Здесь используется вариант уравнений с неизвестными скорости и концентрации ионов и исключенным электрическим полем, развиваемый в работах [2]–[9]. Значительное число из этих работ посвящено исследованию уединенных волн. История развития модели представлена в [4]. Имеется еще вариант уравнений с неизвестными массовой скорости и суммарной плотности плазмы и отдельным уравнением для электрического поля [10], [11], ниже даются сравнения. Варианты уравнений с массовой скоростью, но с исключенным электрическим полем и некоторыми приближениями физического характера используются в [12], в частности, там встречается более простой вариант уравнений, используемых здесь, там же есть ссылки на другие исследования на основе МГД с добавленными дисперсионными членами.

Здесь применяется ранее разработанная теория обратимых структур разрывов, используемая для недиссипативных и слабодиссипативных уравнений [5], [13], [14]. Используется ранее разработанный численный метод с центральными пространственными разностями и методом Рунге–Кутты четвертого порядка для аппроксимации временных производных [15]. Для скалярных

уравнений этот метод не ведет к численному росту возмущений и обладает низкой схемной диссипацией, что позволяет в случае добавления слабой диссипации рассчитывать диссипативные и недиссипативные структуры одновременно. Применение этого метода к уравнениям трубы [15] показало его эффективность и возможность наличия опрокидывания волн в бездиссипативном случае. Здесь аналогичные исследования проводятся для уравнений двухжидкостной плазмы и в этом смысле данная статья является продолжением исследований работы [15]. Роль упрощенных уравнений теории разрывов здесь играют как уравнения МГД, так и ЭМГД. Ранее автором проводились исследования только быстрых магнитозвуковых структур [5]–[8], что было связано с недостаточной разработанностью численных методов. Основной целью работы является исследование структур разрывов других типов.

## 2. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения двухжидкостной плазмы с исключенными неизвестными скорости электронов, а также электрического поля, были выведены из уравнений Максвелла и двухжидкостных гидродинамических уравнений в работах [2], [3] для холодной плазмы, т.е. без учета давления, методика вывода уравнений подробно изложена в [4]. При этом предполагалась квазинейтральность, т.е. совпадение концентраций зарядов ионов и электронов, и пренебрегалось током смещения. В работах [4], [7], [9] в эту модель было включено давление электронного газа (рассматривалась плазма с горячими электронами, но также можно включать и суммарное давление ионов и электронов) и ион-электронное трение:

$$0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}),$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = R_e^{-1} \frac{d}{dt} (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) + R_e^{-1} [n^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \times \text{grad}] \mathbf{v} -$$

$$- (R_i^{-1} + R_e^{-1}) (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) \times \text{grad} (n^{-1} \text{rot } \mathbf{B}) + n^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} - b^2 \text{grad } \ln(n) + n^{-1} \mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -R_i^{-1} \text{rot } \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \varepsilon \text{rot rot } \mathbf{B},$$

$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \times \nabla$  – полная производная,  $n$  – плотность частиц (объемная концентрация) ионов или электронов,  $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$  – напряженность магнитного поля, и  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  – скорость ионов. Используются безразмерные величины, определяемые через физические так:  $x = \hat{x}/L$ ,  $t = \hat{t}\omega_0$ ,  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}/V_A$ ,  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}/|\mathbf{B}_0|$ ,  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}/|\mathbf{B}_0|$ ,  $n = \hat{n}/n_0$ ;  $L$ ,  $\omega_0 = V_A/L$ ,  $n_0$ ,  $|\mathbf{B}_0|$ ,  $V_A = |\mathbf{B}_0| [4\pi n_0 (m_e + m_i)]^{-1/2}$  – характерная длина, частота, плотность невозмущенной плазмы, модуль вектора невозмущенного магнитного поля, альвеновская скорость. Здесь  $m_i$  и  $m_e$  – массы ионов и электронов, соответственно,  $\varepsilon$  – коэффициент магнитной вязкости, связанной с ионно-электронным трением,  $b^2$  – коэффициент сжимаемости электронного газа. По сравнению с предыдущими работами добавлена объемная сила  $\mathbf{F}$ , действующая на ионный газ (вязкость, давление). Параметры дисперсии  $R_i$  и  $R_e$  даются формулами:  $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$  и  $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$ , где  $\omega_{ic} = e|\mathbf{B}_0|/(m_i c)$  и  $\omega_{ec} = e|\mathbf{B}_0|/(m_e c)$  – ионная и электронная циклотронные частоты соответственно,  $e$  – заряд электрона,  $c$  – скорость света. Для удобства расчета мы можем взять  $L$  таким, что  $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$ , тогда  $R_i = R_e^{-1} = \sqrt{m_i/m_e}$ . Заряд иона здесь предполагается равным по модулю заряду электрона, если заряд иона равен по модулю нескольким зарядам электрона, то массу иона нужно уменьшить в соответствующее число раз, получатся уравнения для концентрации “доли” ионов. В расчетах далее подразумевается водородная плазма,  $R_e^{-1} = 0.02341352$ . Уравнения дополняются условием нулевой дивергенции напряженности магнитного поля, являющимся физическим ограничением на начальные данные. Приведем формулы для скорости электронов  $\mathbf{v}_e = \hat{\mathbf{v}}_e/V_A$  и напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}}/|\mathbf{B}_0|$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - (R_i^{-1} + R_e^{-1}) n^{-1} \text{rot } \mathbf{B},$$

$$\mathbf{E} = \frac{V_A}{c} \left[ R_i^{-1} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} - n^{-1} \mathbf{F} \right) - \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \varepsilon \text{rot } \mathbf{B} \right].$$

Формула для электрического поля выведена из уравнения импульсов ионов.

В одномерном случае уравнения (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -n \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{n^{-1} \partial(B_y^2 + B_z^2)}{2} - n^{-1} b^2 \frac{\partial n}{\partial x} + n^{-1} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left( n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + n^{-1} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{dw}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left( n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + n^{-1} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{dB_y}{dt} &= B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\ \frac{dB_z}{dt} &= B_x \frac{\partial w}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для одномерных движений компонента  $B_x$  магнитного поля остается константой все время движения. Здесь включены коэффициенты вязкости ионного газа  $\lambda$  и  $\mu$  так, как это принято в механике сплошной среды [16]. Вязкость электронного газа может быть учтена также, но для скорости в вязких членах придется использовать формулу (2.2). В одномерном случае условие бездивергентности магнитного поля выполнено всегда.

Уравнения можно привести к форме законов сохранения, имеющих смысл закона сохранения массы ионного газа, законов изменения компонент импульса ионного газа и законов изменения  $B_y$  и  $B_z$ , являющихся следствиями уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для вычислений с применением центральных разностей более удобна система уравнений, в которой при аппроксимации временных производных требуется только одно неизвестное, если при расчете следующего временного слоя вначале вычислять величину  $n$ . Это позволяет применять метод прогонки при неявных аппроксимациях пространственно-временных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial un}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( nv - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \left[ B_x \frac{dw}{dt} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - B_z \frac{du}{dx} - R_i^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right] \right\} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( nw - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \left[ B_x \frac{dv}{dt} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_y \frac{du}{dx} - R_i^{-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right] \right\} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \left( \frac{\partial u \partial w}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right\} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{2.6} \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ B_y - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u B_y - B_x v - R_i^{-1} n^{-1} \left[ B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + R_e^{-1} \left( \frac{\partial u \partial B_y}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1} \partial B_y}{\partial x \partial x} - \varepsilon \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ B_z - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left( n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u B_z - B_x w + R_i^{-1} n^{-1} \left[ B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - R_e^{-1} \left( \frac{\partial u \partial B_z}{\partial x \partial x} + u \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1} \partial B_z}{\partial x \partial x} - \varepsilon \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} = 0.
 \end{aligned}$$

Эта система получается подстановкой выражений для полных производных из (2.4) в правые части (2.5). Более простой вариант уравнений МГД с дисперсией, но без пространственно-временных производных можно получить, положив в (2.6)  $R_e^{-1} = 0$ , поскольку эта величина мала по сравнению с  $R_i^{-1}$ .

В [10] при тех же предположениях (квазинейтральность и пренебрежение током смещения) и на основе тех же базовых уравнений представлена иная форма уравнений, где вместо концентрации ионов и их скорости использовались суммарная плотность плазмы и массовая скорость, а для электрического поля применялось отдельное эллиптическое уравнение без временных производных. В систему уравнений включено было также уравнение для энтропии, т.е. учитывалась зависимость давления от температуры, здесь же для простоты рассматривается баротропный вариант модели (изотермический согласно газовой динамике). Анализ уравнений, приведенных в [10], показывает, что электрическое поле в них можно исключить, как и в случае уравнений, используемых здесь.

В том виде, как система написана здесь, электромагнитную гидродинамику легко интерпретировать как уравнения обычной магнитной гидродинамики с добавленными дисперсионными членами, поэтому можно предположить наличие бездиссипативных структур разрывов.

### 2.1. Дисперсионное соотношение

Система уравнений выведена из гиперболических уравнений и в значительной степени сохраняет их свойства. Дисперсионное соотношение, получаемое из линеаризованного варианта уравнений (2.4) подстановкой, в которой все неизвестные пропорциональны  $\exp(ikx - \omega t)$ , в недиссипативном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & (nr + k^2)^2 V_0^6 - \left[ n |\mathbf{B}|^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta) + |\mathbf{B}|^2 [r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta (R_i^2 + R_e^2)] k^2 + (nr + k^2)^2 b^2 V_0^4 \right] + \\
 & + \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 \left[ r^2 + 2nr^2 b^2 + (R_e^2 + R_i^2) b^2 k^2 \right] V_0^2 - r^2 \cos^4 \theta b^2 |\mathbf{B}|^4 = 0, \tag{2.7} \\
 & r = R_i R_e, \quad V_0 = \omega/k - u.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  – угол между вектором напряженности магнитного поля и осью  $Ox$ . Инвариантность дисперсионного соотношения относительно преобразования  $k \rightarrow -k$  и  $V_0 \rightarrow -V_0$  связана с инвариантностями уравнений относительно вращения вокруг оси  $x$ , относительно сдвигов по  $v$  и  $w$ , а также относительно преобразований

$$\begin{aligned}
 & (t, x, u, v, w, B_y, B_z) \rightarrow (-t, -x, u, w, v, B_z, B_y), \\
 & (t, x, u, v, w, B_y, B_z) \rightarrow (t, -x, -u, w, v, -B_y, -B_z).
 \end{aligned}$$

Имеются быстрая и медленная магнитозвуковые и альвеновская ветви дисперсионного соотношения. Графики дисперсионных кривых исследованы в [4]. Скорости распространения быстрых и медленных магнитозвуковых, а также альвеновских волн, для данных уравнений конечны при любых значениях длины волны ( $k \in R$ ). При  $k \rightarrow 0$  скорости распространения волн совпадают с соответствующими скоростями в МГД. Очевидно, можно выделить некоторый класс систем

уравнений, не являющихся гиперболическими, но сохраняющих конечную скорость распространения физически осмысленных волн, сюда относятся, в частности, уравнения волн в трубах [15].

## 2.2. О числе граничных условий

Рассматриваемая ниже задача о распаде произвольного разрыва математически ставится в неограниченной области. Фактический же расчет делается в конечной области с границами, достаточно удаленными от области распада, задаются значения величин на границе и нулевые значения производных, если постановку производных требует численная схема. Поэтому возникает вопрос о корректной постановке краевой задачи. Согласно теории, основанной на анализе дисперсионного соотношения  $\omega = \omega(k)$  [5], [17], [18], число граничных условий на краях расчетной области должно определяться на левой границе числом корней  $k(\omega)$  с  $\text{Im } k > 0$  при  $\text{Im } \omega > M > 0$ , а на правой границе – числом корней с  $\text{Im } k < 0$ , здесь имеются в виду неподвижные границы; принято говорить, что эти числа определяют число уходящих волн, подробное объяснение такой терминологии есть в [18]. Величина  $M$  выбирается достаточно большой так, чтобы значения  $k(\omega)$  не пересекали действительную ось. Данные уравнения формально не входят в класс уравнений, описанных в [18], из-за наличия пространственно-временных производных, но будем применять этот критерий. Большим значениям  $|M|$  в случае магнитозвуковых и альвеновских волн соответствуют волны с большим  $|k|$ , при этом  $k \approx \omega/V$ ,  $V = V_0 + u \in R$ . У быстрых магнитозвуковых волн скорость  $V$  при  $k \rightarrow \infty$  такая же, как в газовой динамике, если рассматривать первые два уравнения системы (2.4) без включения в них магнитного поля. В этом смысле можно говорить о дозвуковом и сверхзвуковом течении. Скорость альвеновских и медленных магнитозвуковых волн при  $k \rightarrow \infty$  равна  $u$ . Для корней  $k(\omega)$ , соответствующих рассмотренным волнам, понятие приходящих и уходящих волн совпадает с этим понятием для гиперболических систем, если рассматривать указанные выше скорости как характеристические. Волна уходящая, если характеристическая скорость положительна для левой границы и отрицательна для правой. Кроме того, имеются еще четыре ветви  $k(\omega)$ , для которых в соответствии с (2.7)  $k_{1,2,3,4} \approx \pm i\sqrt{nR_i R_e}$  при больших значениях  $|\omega|$ , т.е. две из этих волн всегда приходящие и две уходящие, скорость распространения этих волн может быть сколь угодно большой (при этом  $k$  – комплексное число). Таким образом, при сверхзвуковом течении требуется 8 или 2 условия на границах, при дозвуковом – 7 или 3 условия, при  $u = 0$ , возможно, достаточно трех условий, но это требует дальнейшего исследования.

## 2.3. Применение конечно-разностных численных методов

В расчетах для устранения схемной диссипации используются схемы с центральными пространственными разностями, поэтому с обеих сторон на границах ставится одинаковое число условий. Ранее проведенные исследования показали, что наличие избыточного числа граничных условий обычно не создает проблем в решении задачи о распаде произвольного разрыва [5]. Стоит обратить внимание на существенное различие при применении конечно-разностных методов к системам (2.4) или (2.5), (2.6) или к системе, приведенной в [10]. В случае систем (2.4) или (2.5) число граничных условий при применении центральных разностей совпадает с числом уравнений, т.е. равно шести, что меньше необходимого числа в общем случае, поставить граничные условия для производных невозможно. Попытка расчета системы (2.4) центральными разностями ранее проводилась автором с применением неявной аппроксимации для пространственно-временных производных, система неявных уравнений успешно разрешалась методом итераций. Но была обнаружена краевая неустойчивость, делавшая применение такого метода невозможным или требовавшая модификации уравнений вблизи границ, например путем введения поглощающих диссипативных зон с производными высокого порядка. При применении систем (2.6) или [10] в случае одномерного баротропного варианта уравнений без учета термодинамики число условий равно 10, что больше, чем нужно и равно общему числу корней  $k(\omega)$ , поскольку дисперсионное соотношение (2.7) описывается полиномом от  $k$  десятой степени. Таким образом, можно было гарантировать достаточное число граничных условий даже без исследования дисперсионного соотношения. В случае расчета (2.6) по сравнению с расчетом (2.4) дополнительно ставятся условия на производные от  $v$ ,  $w$ ,  $B_z$ ,  $B_y$ , в случае уравнений [10] дополнительно ставятся два условия на электрическое поле и два условия на производные магнитного поля. Результаты

одномерного расчета системы [10] для холодной плазмы, т.е. без учета давления и без уравнения для энтропии, приведены в [11] для уединенных волн в вакууме. Применялся метод Лакса–Вендроффа. Отметим, что в [11] для упрощения расчетов использовалось представление части уравнений через комплексные переменные, что связано со свойствами инвариантности этих уравнений при перестановке неизвестных. Анализ уравнений из [10] и [11] показывает, что, исключив из них электрическое поле, можно получить систему с пространственно-временными производными от магнитного поля, аналогичную (2.6), но требующую постановки при баротропном варианте или для холодной плазмы только восьми граничных условий.

Для решения системы (2.6) использовалась консервативная численная схема с аппроксимацией временных производных по методу Рунге–Кутты четвертого порядка и центральными разностями для пространственных производных. В работе [15] проводилось исследование такой схемы, было показано, что схемная диссипация в ней пропорциональна шестому порядку от временного шага. Было показано, что, по крайней мере, для скалярных эволюционных уравнений она условно устойчива, показатель степени в условии устойчивости  $\tau < ch^q$  определяется показателем роста  $\omega(k)$  при  $k \rightarrow \infty$  (для скалярных эволюционных уравнений  $q$  – порядок старшей производной), при этом роста возмущений нет. Численный эксперимент показывает, что все это подтверждается и при применении ее для данной системы уравнений. Краевой и какой-либо иной неустойчивости при подходящем выборе временного шага обнаружено не было. Все пространственно-временные производные (волны, распространяющиеся с бесконечной скоростью связаны именно с ними) аппроксимируются на каждом шаге с помощью неявных шаблонов, скорости распространения магнитозвуковых и альвеновских волн конечны, поэтому, как и предполагалось, расчеты показали, что для достижения устойчивости при выборе соотношения между пространственным и временным шагом в недиссипативном случае можно ориентироваться на классическое условие Куранта  $\tau < Ch$ , где  $\tau$  и  $h$  – временной и пространственный шаг,  $C$  – константа. Поскольку используемая численная схема обладает очень малой схемной диссипацией, пропорциональной  $\tau^6$ , все наблюдаемые схемные эффекты связаны с недиссипативной схемной дисперсией. Они выявляются путем изменения пространственного шага, длина волны при схемных эффектах меняется при изменении шага. Для выявления опрокидывания волны использовалась методика, разработанная в [15]. В случае наличия классического решения амплитуда схемных волн, если они есть, быстро убывает при уменьшении пространственного шага, если уменьшения нет или развивается вычислительный блоуап, то можно предположить отсутствие классического решения.

Построение конечно-разностной схемы, набор и проверку вычислительных операторов значительно упрощает не непосредственная аппроксимация уравнений (2.6), а использование новых переменных для расчета разностных аппроксимаций правых частей последних четырех уравнений системы (2.4) без включения пространственно-временных производных и последующая подстановка этих переменных в консервативные разностные аппроксимации уравнений (2.5). Упрощение дает также использование подпрограммы для расчета  $v$  и  $B_y$  с использованием ее же для расчета  $w$  и  $B_z$  путем ссылки в нее  $R_e^{-1}$  и  $R_r^{-1}$ , взятых с противоположным знаком. В последних четырех уравнениях систем (2.5) и (2.4) при замене  $B_z \rightarrow B_y$ ,  $v \rightarrow w$  меняются только знаки при некоторых членах.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУР РАЗРЫВОВ

#### 3.1. Основные элементы теории разрывов и особенности постановки задачи о распаде разрыва

В классической теории разрывов [18] есть понятие упрощенных уравнений, это нелинейные гиперболические уравнения (в данном случае уравнения МГД без диссипации), в которых имеются решения с разрывами, и понятие полных уравнений с диссипацией (в данном случае уравнения МГД с диссипацией), в которых этим разрывам соответствуют гладкие решения с локальными структурами разрывов, т.е. переходами между однородными состояниями. Стационарные структуры разрывов находятся как решения уравнений бегущих волн, т.е. уравнений, описывающих стационарные решения в системе координат, движущейся со скоростью разрыва. В теории бездиссипативных структур разрывов [5], [13], [14] рассматриваются два типа структур, возникающих при решении задачи о распаде произвольного разрыва. Расширяющиеся со временем структуры разделяют однородные состояния, в упорядоченном случае они описываются автомодельными решениями усредненных уравнений, усредненные уравнения в этом случае играют

роль упрощенных уравнений. Другой тип – не расширяющиеся локальные структуры, т.е. переходы между однородными, периодическими или стохастическими состояниями, эти структуры могут быть элементами расширяющихся структур или быть самостоятельными в случае переходов между однородными состояниями. На границах волновых зон могут быть также структуры солитонного типа, т.е. переходы между однородным и периодическим состоянием, в котором краевая волна приближается к уединенной при  $t \rightarrow \infty$ . Роль полных уравнений в теории недиссипативных разрывов играют недиссипативные уравнения с дисперсией (в данном случае уравнения ЭМГД без диссипации), т.е. с наличием зависимости скорости волн от волнового числа. Здесь под понятием дисперсия подразумевается именно недиссипативная дисперсия. В случае, если в полные уравнения добавляется слабая диссипация, расширяющиеся структуры замещаются протяженными локальными структурами, упорядоченные волновые зоны в них также описываются усредненными уравнениями, локальные стационарные бездиссипативные структуры при этом сохраняются [13].

Согласно теории каждой ветви дисперсионного соотношения, проходящей через начало координат, при решении задачи о распаде разрыва должна соответствовать своя структура или простая волна, и решения могут включать в себя быстрые магнитозвуковые структуры, альвеновские структуры и медленные магнитозвуковые структуры. При длительном расчете решения должны представлять собой комбинации из однородных участков, центрированных простых волн, описываемых уравнениями МГД, и структур разрывов, описываемых уравнениями ЭМГД.

Для сравнения помимо расчетов ЭМГД проводились также расчеты обычной МГД, в которых возникали схемные бездиссипативные структуры, а также расчеты с дополнительными диссипативными членами, в которых возникали классические локальные структуры с диссипацией.

Граничные условия на разрывах для магнитной и электромагнитной гидродинамики получаем из интегральной формы уравнений (2.5), имеющих вид законов сохранения

$$-U[n] + [nu] = 0, \quad (3.1)$$

$$-U[nu] + \left[ nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right] = 0, \quad (3.2)$$

$$-U \left[ nv + \left\{ R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} \right] + \left[ nuv - B_x B_y + \left\{ u R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.3)$$

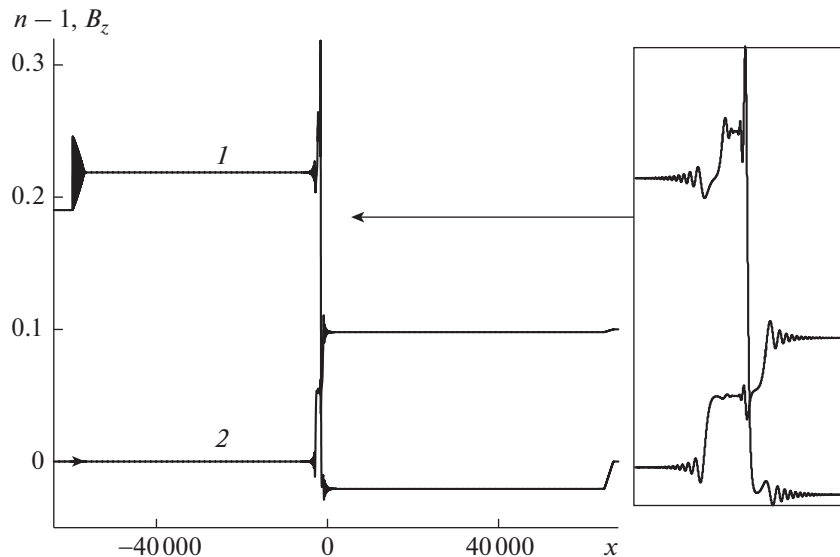
$$-U \left[ nw - \left\{ R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \right] + \left[ nuw - B_x B_z - \left\{ u R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.4)$$

$$-U \left[ B_y - \left\{ R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \right] + \left[ u B_y - B_x v - \left\{ u R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \right] = 0, \quad (3.5)$$

$$-U \left[ B_z + \left\{ R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right] + \left[ u B_z - B_x w + \left\{ u R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \right] = 0. \quad (3.6)$$

Здесь  $U$  – скорость разрыва, квадратные скобки обозначают разность величин по разные стороны разрыва, в случае МГД члены с производными в фигурных скобках не включаются, они включаются, если уравнения ЭМГД рассматриваются в качестве упрощенной системы, когда классического решения не существует. В случае разрыва диссипативного типа коэффициенты при диссипативных членах в уравнениях (2.5) можно считать стремящимися к нулю (см. исследование структуры разрыва ниже), поэтому соответствующие им члены с производными в условия на разрывах в случае ЭМГД не включены. Можно показать в случае ЭМГД, используя условие квазинейтральности и формулу (2.2), что из условий сохранения массы (3.1) и изменения импульса ионов (3.2)–(3.4) следует сохранение полной массы и импульса плазмы на разрыве.

Условия на разрывах для МГД при расчетах задачи о распаде разрыва на основе ЭМГД можно использовать для получения начальных данных для решений с преимущественной структурой определенного типа. Для этого можно задать значение  $U$  и значения величин по одну сторону разрыва, а затем найти значения по другую сторону разрыва. В недиссипативном случае для быстрых и медленных магитозвуковых волн при расчете уравнений ЭМГД получаются расширяющиеся со временем структуры, а при включении диссипации – локальные, для которых приведенные выше соотношения выполняются точно. Для расширяющихся структур эти соотношения после исключения  $U$  должны выполняться приблизительно для параметров по разные стороны разрыва, но в проведенных расчетах существенных отличий обнаружено не было, видимо,



Фиг. 1.

это связано с небольшими амплитудами разрывов. Скорости распространения локальных недиссипативных разрывов на границах волновых зон заметно отличаются от получаемых из (3.1)–(3.6). Для альвеновских волн удобнее использовать известные условия вращения [1] поперечного магнитного поля и поперечной скорости без изменения остальных параметров:  $[v] = \pm[B_y]/n^{1/2}$ ,  $[w] = \pm[B_z]/n^{1/2}$ ,  $[B_y^2 + B_z^2] = 0$ . В случае отсутствия вращения в начальных данных альвеновские структуры не возникают, хотя альвеновские волны в ЭМГД, но не в МГД модели все же наблюдаются. Начальные данные для всех неизвестных брались в виде сглаженной ступеньки, сглаживание производилось при помощи функции  $\tanh(x/l_0)$  с помощью параметра  $l_0$  варьировалась длина переходной зоны.

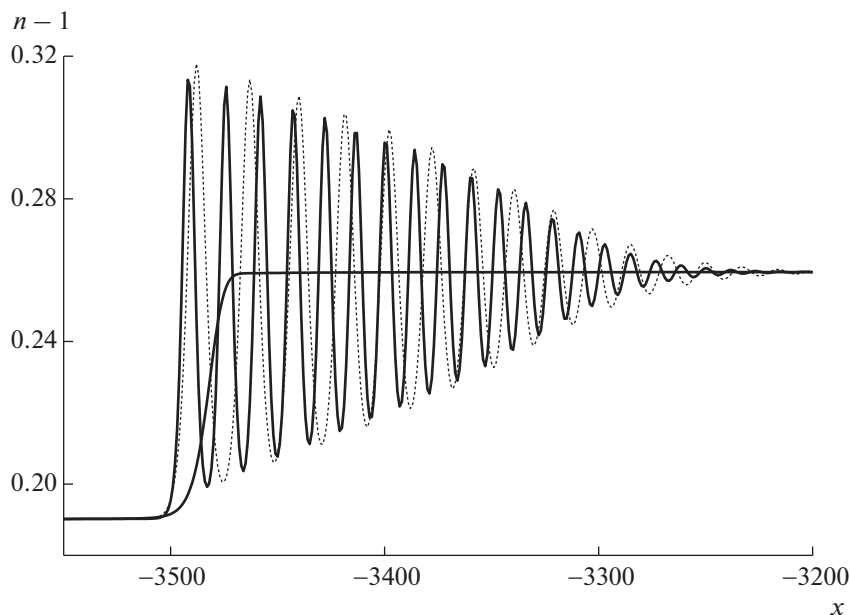
Программный комплекс был оборудован средствами, позволяющими вырезать некоторый участок решения с целью выделения структуры определенного типа и фиксировать новые граничные условия, а также средствами расширения расчетной области. Кроме того, было включено средство для автоматического периодического расширения области, с одной стороны, и сокращения, с другой. Это нужно для отслеживания волн, движущихся с некоторой скоростью, и это предпочтительнее, чем изменение величины  $u$  с целью изменения скорости системы координат наблюдателя, поскольку такое изменение может ухудшать условие устойчивости и усиливать схемные дисперсионные эффекты.

Пример расчета полной задачи о распаде произвольного разрыва для ЭМГД приведен на фиг. 1, показаны графики  $n - 1$  – кривая 1 и  $B_z$  – кривая 2,  $b^2 = 0.25$ ,  $t = 60\,000$ ,  $\theta = 1.555$ ,  $n = 1$ ,  $|V| = 1$  для состояния справа. Имеются слева направо полностью сформировавшаяся быстрая магнитозвуковая структура солитонного типа (первая волна в этом решении стремится к уединенной волне при  $t \rightarrow \infty$ ), формируются альвеновская структура, медленная магнитозвуковая структура и еще одна медленная магнитозвуковая структура, еще одна альвеновская структура, справа имеется полностью сформировавшаяся быстрая магнитозвуковая простая волна. Растянутый по оси  $x$  фрагмент графиков формирующихся альвеновских и медленных магнитозвуковых структур показан в рамке. В связи с большими различиями в скорости распространения, характерной длине волны и во времени, необходимым для формирования структуры, вырезка фрагментов с отдельными структурами предпочтительнее.

### 3.2. Быстрые магнитозвуковые структуры

В случае быстрых магнитозвуковых волн образуются структуры солитонного типа, структуры с излучением и нестационарные структуры хаотического типа. Волновые зоны в упорядоченных магнитозвуковых структурах могут быть описаны усредненными уравнениями. Дисперсионная



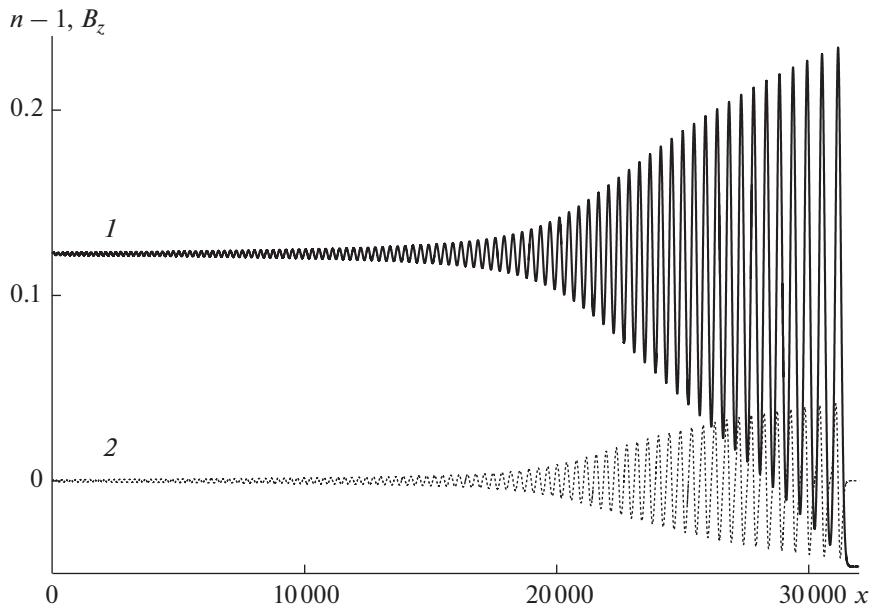


Фиг. 2.

ветвь быстрых магнитозвуковых волн может быть двух типов: с точкой перегиба при  $k > 0$  и ростом групповой скорости в окрестности начала координат и без точки перегиба при  $k > 0$  с убыванием групповой скорости при  $k > 0$  на всей ветви. В первом случае касательная к дисперсионной ветви пересекает эту ветвь при  $k > 0$ , прогнозируется решение нестационарного типа с двухволновой хаотической зоной, во втором случае — структура солитонного типа. В обоих случаях при увеличении амплитуды разрыва возможен переходный вариант решения — структура с излучением, т.е. структура с локальным разрывом типа перехода между однородным и периодическим состоянием с конечной длиной волны. Эти исследования подробно изложены в работах [4]–[8]. Практически в случае дисперсионной кривой с точкой перегиба, если параметры разрыва не близки к переходным значениям, решение неотлично от решения солитонного типа, только на границе волновой зоны график плотности выглядит как уединенная волна-яма, тогда как в случае без точки перегиба это уединенная волна-горб, кроме того, направление затухания волн в волновой зоне противоположно случаю дисперсионной кривой без точки перегиба.

При добавлении вязкости упорядоченные структуры замещаются стационарными структурами, которые в случае слабой вязкости могут быть описаны усредненными уравнениями. В случае нестационарных хаотических бездиссипативных структур для получения стационарных решений требуются конечные значения вязкости, такое исследование проводилось в [13] для обобщенного уравнения Кортевега–Бюргера с производной пятого порядка. Уравнение Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка — модельное уравнение для быстрых магнитозвуковых волн [3], [5].

В случае уравнений МГД численная схема может сама добавить дисперсию, получаются решения со структурами солитонного типа, качественно неотличимые от решений системы ЭМГД, фиг. 2, показана структура, распространяющаяся влево, аналогичная имеющейся на фиг. 1, сплошная жирная линия — МГД, штриховая — ЭМГД (дисперсионная кривая быстрых магнитозвуковых волн ЭМГД не имеет точки перегиба при  $k \neq 0$ ), тонкая линия — МГД с магнитной вязкостью  $\varepsilon = 1$ ;  $b = 0$ ,  $t = 4000$ . Отличие между случаями МГД и ЭМГД только в длине волны в волновой зоне, но в случае МГД длина волны привязана к пространственному шагу, при уменьшении шага уменьшается и длина волны по закону, близкому к пропорциональному. При уменьшении пространственного шага имеется сходимость огибающей волновой зоны в решении для МГД, а в случае ЭМГД есть еще сходимость по длине волны и при непродолжительных расчетах можно проверить поточечную сходимость. При большой амплитуде разрыва в случае МГД возможен вычислительный блоуп. Добавление вязкости для МГД приводит к локальным стационарным структурам.

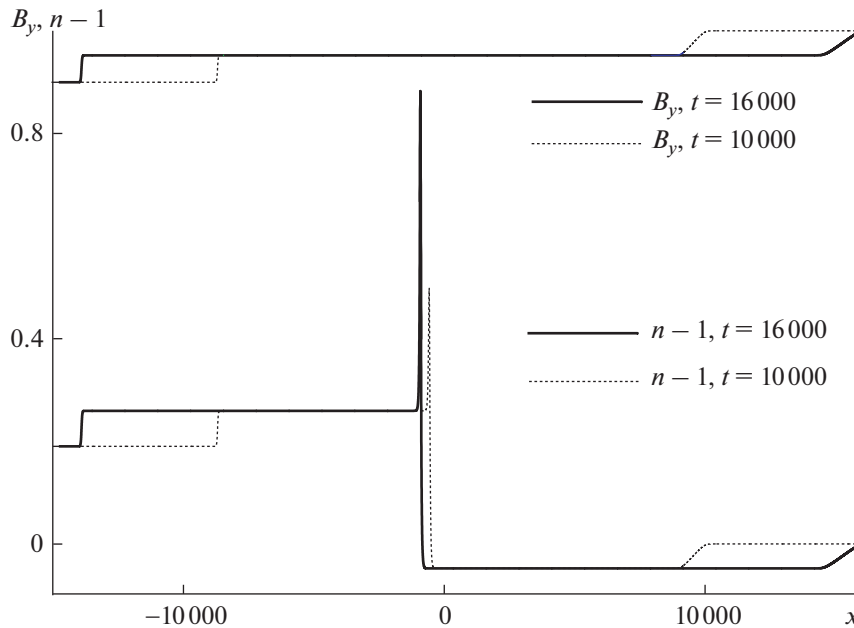


Фиг. 3.

### 3.3. Медленные магнитозвуковые структуры

Структуры медленных магнитозвуковых волн теоретически должны быть двухволновыми нестационарными [5], поскольку касательная к дисперсионной ветви в начале координат всегда пересекает альвеновскую ветвь [4] (резонанс). Прямая  $\omega = U_l k$ , соответствующая скорости  $U_l$  локального медленного магнитозвукового разрыва тоже пересекает эту ветвь. В случае большой амплитуды разрыва есть еще и пересечение быстрой магнитозвуковой ветви. Это означает, что солитонного решения нет и должны возникать нестационарные двухволновые и трехволновые структуры. Но при не слишком большой амплитуде разрыва в расчетах наблюдаются структуры солитонного типа, поскольку согласно теории амплитуда второй излучаемой волны мала. На фиг. 3 показана структура, распространяющаяся вправо, показаны графики  $n - 1$  — кривая 1 и  $B_z$  — кривая 2,  $b^2 = 0.5$ ,  $t = 85\,000$ . В [7] численно исследовалась эволюция приближенного решения ЭМГД для медленных магнитозвуковых волн типа уединенной волны уравнения Кортевега—де Вриза. Наблюдался распад уединенной волны, но излучаемой альвеновской волны обнаружить не удалось, излучались медленные магнитозвуковые волны. Провести расчет с достаточно мелким пространственным шагом, чтобы добиться того, чтобы на длине резонансной излучаемой волны, прогнозируемой теорией, располагалось достаточное количество шагов сетки, не представляется возможным. При увеличении амплитуды разрыва все же выявляются двухволновые решения качественно правильного вида: первая солитоноподобная волна излучает короткую волну малой амплитуды внутрь волновой зоны. Но длина короткой волны меняется с изменением шага сетки, амплитуда ее не уменьшается при уменьшении шага, что указывает на возможность отсутствия классического решения и на недостаточно малую величину пространственного шага, чтобы точно рассчитать короткие волны. В наблюдаемой короткой волне существуют только изменения  $n$  и  $u$ , т.е. эта волна имеет в основном газодинамический характер. Ее наличие связано с резонансом с быстрой магнитозвуковой ветвью. Можно предположить, что при включении слабой вязкости здесь возникнет гибридная диссипативно-дисперсионная структура с излучением коротких волн, наблюдавшаяся для волн в трубах внутри структуры продольных волн [15].

В холодной плазме ( $b = 0$ ) медленные магнитозвуковые волны вырождаются (обе дисперсионные ветви описываются соотношением  $\omega = uk$ ), в решениях задачи о распаде разрыва наблюдается локальный большой рост плотности со временем (расчеты не позволяют сделать однозначный вывод, идет ли речь о блоуапе или рост может продолжаться сколь угодно долго). Этот рост имеется как в случае МГД, так и ЭМГД уравнений и не устраняется включением магнитной и газодинамической вязкости. При расчетах с  $b \rightarrow 0$  получаются решения с двумя медленными



Фиг. 4.

магнитозвуковыми разрывами с  $n \rightarrow \infty$  в области между ними. Но в каком-то смысле решение задачи о распаде разрыва для холодной плазмы все же существует. На фиг. 4 показаны графики решения для МГД с  $b = 0$ ,  $\theta = 1.555$ ,  $n = 1$ ,  $|\mathbf{V}| = 1$  для состояния справа и включением магнитной вязкости,  $\varepsilon = 1$ ;  $B_z = 0$ ,  $w = 0$ , альвеновских волн нет. Выясняется, что в области между двумя магнитозвуковыми разрывами  $B_y = \text{const}$ , из уравнения для  $B_y$  системы (2.4) следует, что  $B_x v - B_y u = \text{const}$  и что уравнение для  $v$  совпадает с уравнением для  $u$ , эволюция решения описывается первыми двумя уравнениями газодинамического типа. Область с локальным ростом плотности можно интерпретировать как структуру разрыва, на котором  $[B_y] = 0$ ,  $B_x[v] - B_y[u] = 0$ . Имеем два условия на рассматриваемом разрыве без включения в них его скорости. Исключив из (3.1)–(3.3), (3.5) на быстром магнитозвуковом разрыве слева скорость разрыва, получим три соотношения. С учетом наличия аналогичных трех соотношений для простой волны (или в случае иных начальных данных для быстрого магнитозвукового разрыва) справа, приходим к выводу, что имеющихся соотношений достаточно, чтобы определить величины  $n$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $B_y$  на однородных участках.

Отметим, что утверждение об отсутствии в некоторых случаях ограниченного решения при  $b = 0$  для уравнений ЭМГД уже делалось в [9]. Предлагалось использовать при расчетах холодной плазмы малые значения  $b$ .

### 3.4. Альвеновские структуры

Вначале расчеты проводились методом вырезки формирующейся альвеновской структуры, выявляемой визуально между быстрой и медленной магнитозвуковой волной. При этом величины  $u$ ,  $n$ ,  $B_y^2 + B_z^2$ ,  $v^2 + w^2$  по разные стороны структуры оказывались одинаковыми, что позволило в дальнейшем применять в качестве начальных данных решения уравнений МГД типа простой альвеновской волны [1] с углом вращения поперечного магнитного поля пропорциональным  $1 - \tanh(x/l_0)$ . Расчеты показывают, что структуры альвеновского типа имеют нетипичный вид для теории обратимых структур разрывов. Они расширяются со временем, имеются колебания, но солитонных или локальных структур не образуется. На одном краю альвеновской структуры имеется колебание с максимальной амплитудой, длина волны этого колебания растет со временем, а значения производных уменьшаются, за этим колебанием идут пространственно затухающие колебания. В зависимости от величины  $\theta$  (для альвеновской структуры эта величина по обе

стороны одинакова) при фиксированных значениях  $n = 1$  и  $|\mathbf{B}| = 1$  по обоим сторонам структуры направление затухания может быть как вправо, так и влево в зависимости от того, растет или убывает групповая скорость при увеличении  $k$  от нулевого значения. Согласно (2.7) при малых  $k$  имеем

$$\begin{aligned} \omega &= (u + V_a)k - P/Qk^3 + O(k^5), \\ P &= 2nrV_a^5 - \left\{ |\mathbf{B}|^2 [r \sin^2 \theta + \cos^2 \theta (R_i^2 + R_e^2) + 2nrb^2] \right\} V_a^3 + \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 (R_e^2 + R_i^2) b^2 V_a, \\ Q &= 6n^2 r^2 V_a^4 - 4[n |\mathbf{B}|^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta) + n^2 r^2 b^2] V_a^2 + 2 \cos^2 \theta |\mathbf{B}|^2 (r^2 + 2nrb^2), \\ V_a &= \cos \theta |\mathbf{B}| / n^{1/2}. \end{aligned}$$

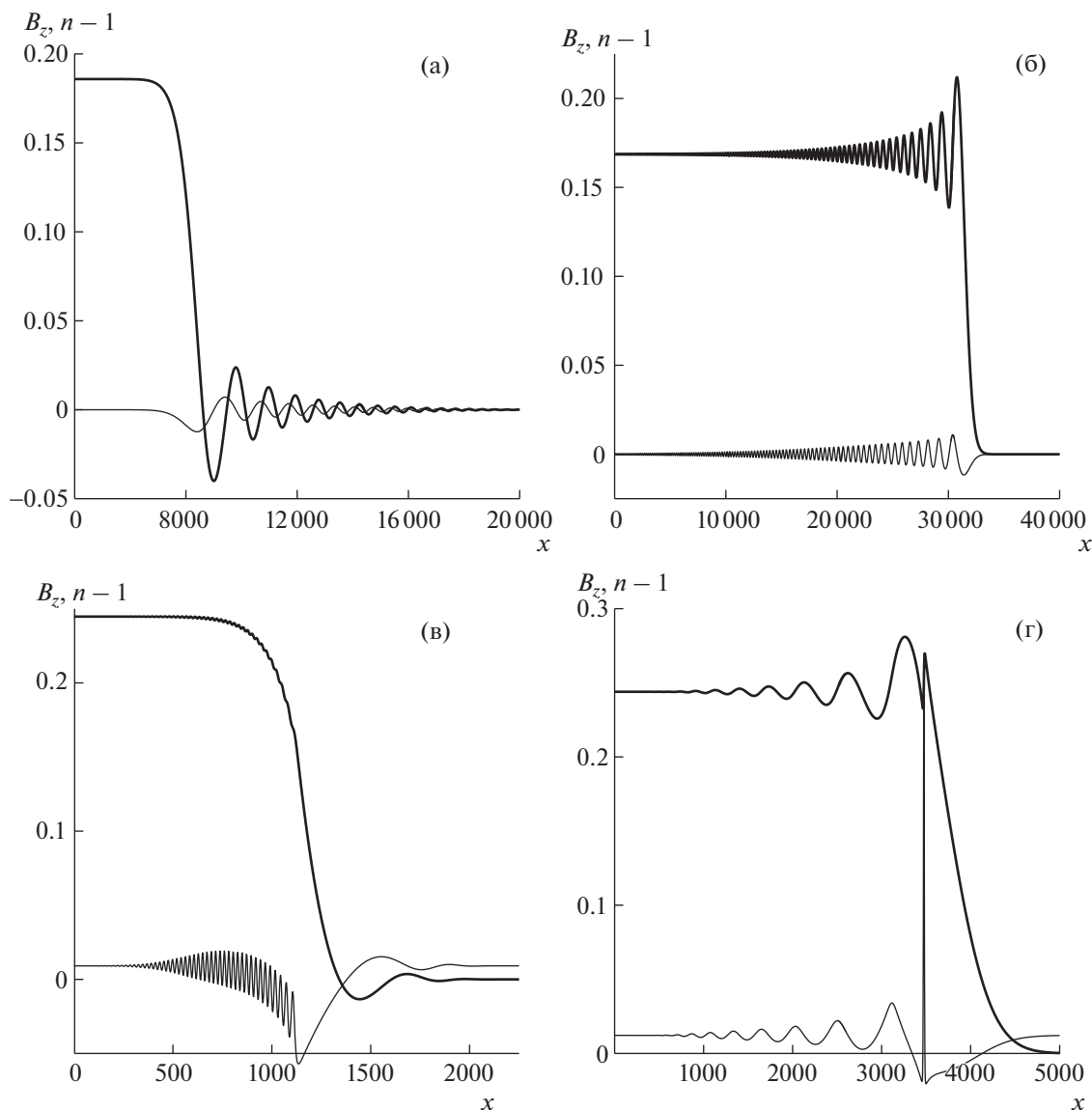
Поскольку  $R_e$  – большая величина, то нулевое значение  $P$  достигается при  $\theta \approx \arccos(bn^{1/2}/|\mathbf{B}|)$ .

Примеры обоих вариантов альвеновской структуры показаны на фиг. 5а и фиг. 5б,  $b^2 = 0.5$ ,  $t = 500\,000$ , даны графики  $B_z$  жирной линией и  $n - 1$  тонкой линией, фиг. 5а соответствует первому варианту решения,  $\theta = 0.85 > \pi/4$ , фиг. 5б соответствует второму варианту,  $\theta = 0.75 < \pi/4$ . В [3] для слабонелинейных альвеновских волн выводилось модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза с кубической нелинейностью (МКДВ). Применение этого уравнения для описания альвеновских структур проблематично. У МКДВ есть нулевой уровень амплитуды, относительно которого можно получить симметрично отраженные решения, любые другие значения амплитуды таким свойством не обладают. Для альвеновских волн тоже можно получить симметрично отраженные решения, но определенного значения угла поворота магнитного поля, относительно которого можно делать отражение, нет. У МКДВ простые волны описываются нелинейным уравнением переноса, они центрированные, их параметры зависят от  $x/t$  [5]. Параметры альвеновских простых волн в МГД зависят от  $x - Ut$  [1]. В зависимости от знака при дисперсионном члене решения о распаде разрыва для МКДВ имеют вид центрированной простой волны, переходящей в центрированную простую волну огибающей волновой зоны, волна на границе этих участков имеет солитоноподобный вид, или же решения содержат кинк и центрированную простую волну (обычную или волну огибающей) [5], при любом знаке есть также решения с обычными солитонными структурами. В решениях ЭМГД есть длинноволновый медленно расширяющийся участок, близкий к простой волне МГД, но четкой границы у этого участка нет.

Расширение альвеновской структуры сохраняется при добавлении магнитозвуковой или газодинамической вязкости. Включение вязкости, как магнитной, так и газодинамической при расчете полной задачи о распаде разрыва ведет к замещению однородного участка между медленной магнитозвуковой и альвеновской структурой участком с изменяющимися величинами  $u$  и  $n$ . При этом справа и слева от альвеновской структуры значения  $u$  и  $n$  не совпадают, т.е. это уже не совсем альвеновская структура. Этот эффект наблюдается как в случае ЭМГД, так и МГД, но мало заметен в случае слабой вязкости.

В случае недостаточно протяженного перехода в начальных данных через некоторое время может возникать опрокидывание альвеновских волн. Опрокидывание выявляется путем обнаружения коротких схемных излучаемых волн аналогичных наблюдавшимся при расчетах магнитозвуковых волн при использовании уравнений МГД, фиг. 5в,  $b^2 = 0.5$ ,  $\theta = 0.84675$ ,  $|\mathbf{B}| = 1.0076$ ,  $t = 15000$ , первый вариант. В обоих вариантах схемная волна излучается и затухает в левом направлении. По мере расширения структуры эти волны исчезают. Если же в случае варианта 1 на начальном этапе гладкое решение все же существует, то это качественно правильный вид решения, поскольку есть пересечение прямой  $U = \omega/k$  с альвеновской ветвью при  $k > 0$ , а групповая скорость коротких альвеновских волн убывает при росте  $k$ . При увеличении шага сетки схемные волны исчезают.

При удлинении переходного участка в начальных данных в случае варианта 2 вместо излучаемых волн возникают локализованные схемные структуры с концентрацией плотности, фиг. 5г,  $b^2 = 0.5$ ,  $\theta = 0.76025$ ,  $|\mathbf{B}| = 1.0512$ ,  $t = 120\,000$ . Эти структуры движутся вправо и могут со временем уходить из области альвеновской структуры по мере ее расширения, образуя уединенные волны, фиг. 6,  $b^2 = 0.5$ ,  $\theta = 0.3834$ ,  $|\mathbf{B}| = 0.9463$ . Показанная уединенная волна возникла в ходе расчета структуры медленной магнитозвуковой волны, альвеновской структуры разрыва в этом расчете не было из-за того, что не было вращения поперечного магнитного поля и скорости в на-



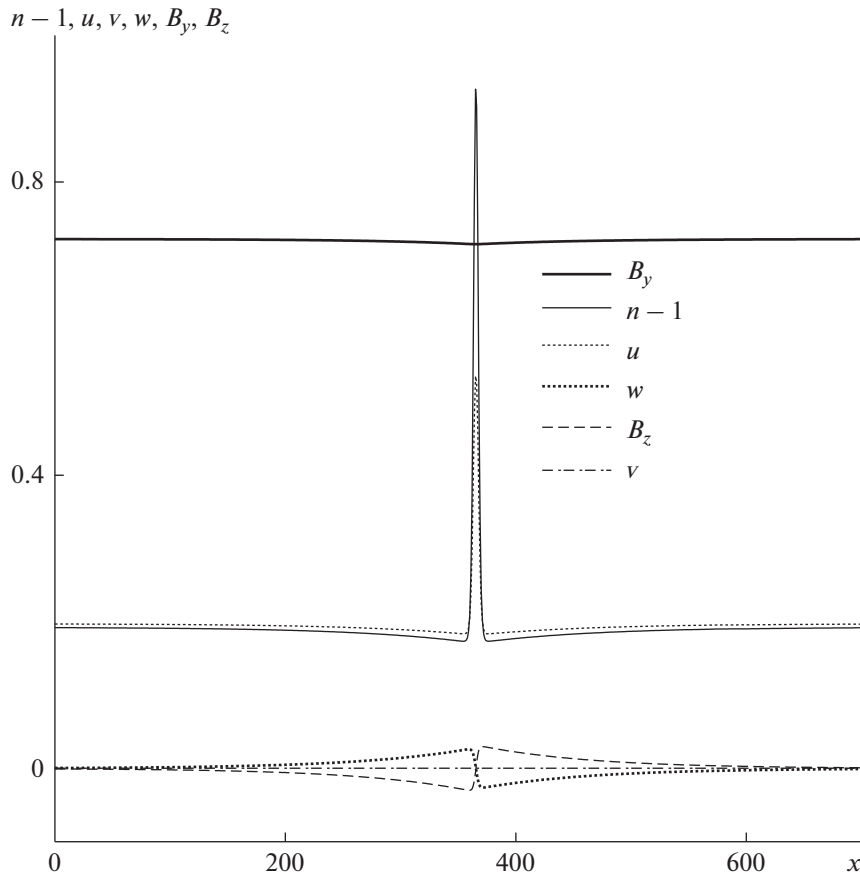
Фиг. 5.

чальных данных, но возникла альвеновская волна колебательного типа, которая опрокинулась. Несколько таких схемных структур не мешают расчету, но в случае большого количества этих структур возникает хаотизация. Увеличение числа схемных структур при опрокидывании волны наблюдается при уменьшении пространственного шага. Наоборот, при увеличении шага эти структуры пропадают. При дальнейшем увеличении длины переходного участка в начальных данных опрокидывание исчезает.

При включении слабой газодинамической вязкости в случае опрокидывания в решении может возникать структура типа ударной волны, фиг. 7,  $\lambda = 0.125$ ,  $\mu = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $b^2 = 0.5$ ,  $\theta = 1.0414$ ,  $|\mathbf{B}| = 1.0697$ , первый вариант решения,  $t = 20000$ . Ее амплитуда при расчете альвеновской структуры со временем уменьшается и формируется классическое гладкое решение. Этот тип разрыва рассматривается ниже. Сходимость при уменьшении шага сетки при расчетах с вязкостью есть.

### 3.5. Анализ разрывов в решениях уравнений электромагнитной гидродинамики

В ходе расчетов было установлено существование структур типа газодинамических ударных волн при включении малой газодинамической вязкости (при этом достаточно включать ее только в уравнение для  $u$ ), фиг. 7. Включение магнитной вязкости к такой структуре не приводит.



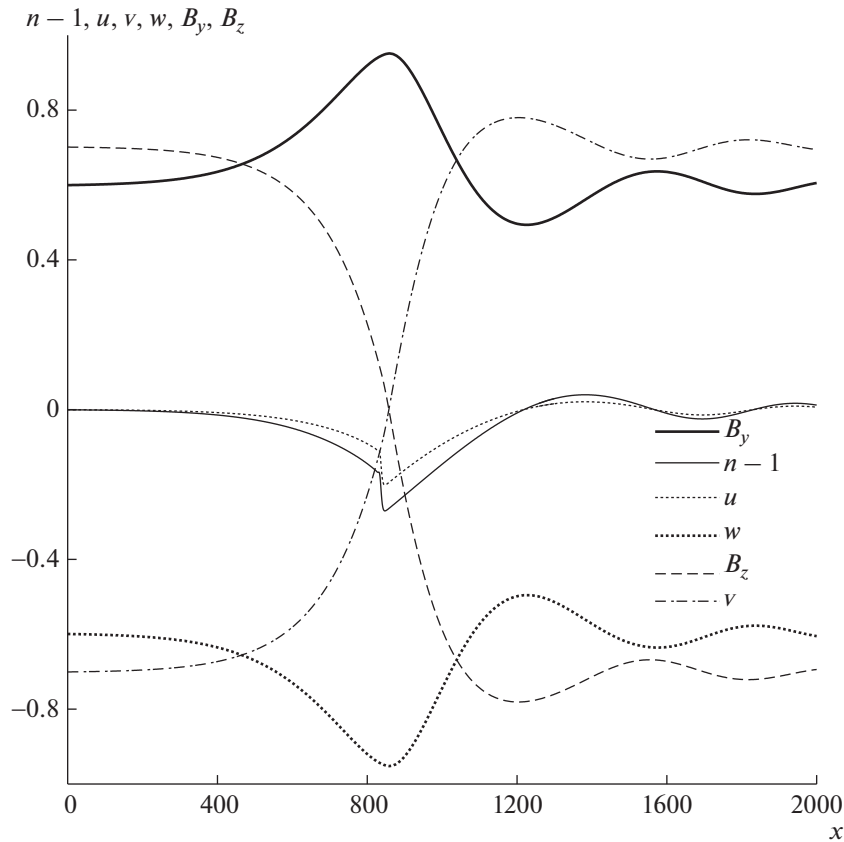
Фиг. 6.

В полученной структуре  $[v] = 0$ ,  $[w] = 0$ ,  $[B_y] = 0$ ,  $[B_z] = 0$ , это можно рассматривать как четыре дополнительных условия, выявляемые при исследовании структуры разрыва. Это приводит к тому, что скорость разрыва и скачки величин  $u$  и  $n$  определяются соотношениями (3.1), (3.2), т.е. также как в газовой динамике. Оставшиеся соотношения (3.3)–(3.6) представляют собой условия на производные

$$\left[ (u - U) \frac{\partial B_z}{\partial x} \right] = 0, \quad \left[ (u - U) \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] = 0,$$

$$\left[ (u - U) \left( B_y - R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad \left[ (u - U) \left( B_z + R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

Для эволюционности, т.е. математической корректности постановки задачи с разрывом, число условий на разрыве должно быть равно числу уходящих волн по обе стороны разрыва плюс одно условие, используется система координат, движущаяся со скоростью разрыва. В [18] это утверждение сформулировано для гиперболических систем, но по аналогии с условиями на границе, очевидно, оно верно и в общем случае. Напомним, что скорости быстрых магнитозвуковых волн при  $k \rightarrow \infty$  совпадают с характеристическими скоростями в газовой динамике, поэтому с обеих сторон одна из быстрых магнитозвуковых волн входящая, а другая с одной стороны входящая, а с другой — уходящая, скорости коротких альвеновских и медленных магнитозвуковых волн равны  $u$ , величина  $u - U$  на ударной волне определяет направление потока газа через разрыв и не меняет знак по разные стороны разрыва, поэтому если с одной из сторон волна входящая, то с другой она уходящая, среди оставшихся четырех волн из десяти две всегда уходящие и две всегда входящие. Число уходящих волн, как и в случае ударных волн в газовой динамике, здесь на две меньше числа входящих (9 и 11), поэтому условий, получаемых из законов сохра-



Фиг. 7.

нения, плюс четырех условий, обнаруженных в результате анализа структуры разрыва, достаточно для эволюционности.

Обнаруженные структуры в отличие от классической теории структур разрывов с диссипацией не являются точными решениями уравнений бегущих волн

$$\begin{aligned}
 -Un + nu &= c_1, & -Unu + nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2n - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} &= c_2, \\
 -U \left( nv + R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + nuv - B_x B_y + u R_e^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial x} &= c_3, \\
 -U \left( nw + R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + nuw - B_x B_z - u R_e^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \lambda \frac{\partial w}{\partial x} &= c_4, \\
 -U \left( B_y - R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u B_y - B_x v + u R_i^{-1} \frac{\partial w}{\partial x} &= c_5, \\
 -U \left( B_z + R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u B_z - B_x w + u R_i^{-1} \frac{\partial v}{\partial x} &= c_6.
 \end{aligned}$$

Здесь  $c_{1,2,3,4,5,6}$  — константы. Приближенное решение, описывающее структуру рассматриваемых разрывов, при малых  $\lambda$  и  $\mu$  находится из первых двух уравнений при условии  $B_y^2 + B_z^2 = \text{const}$ . Длина газодинамической структуры, т.е. длина области, на которой отклонение  $n$  и  $u$  от постоянных значений существенно, стремится к нулю при  $\lambda + 2\mu \rightarrow 0$ , поэтому наличие ненулевых значений производных  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial w/\partial x$ ,  $\partial B_y/\partial x$ ,  $\partial B_z/\partial x$  оказывает пренебрежимо малое влияние на изменение  $v$ ,  $w$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  в области структуры. Сходимость к разрыву для величин  $u$  и  $n$  при  $\lambda + 2\mu \rightarrow 0$  проверялась численно посредством решения уравнений в частных производных.

Учет вязкости электронного газа не приводит к принципиальным изменениям, поскольку согласно (2.2) продольные скорости электронов и ионов одинаковы.

Заметим, что в [10] были предложены условия на разрывах решений уравнений ЭМГД, они получались из дивергентного вида уравнений сохранения массы, импульса, энергии и преобразованного обобщенного закона Ома. К ним добавлялись условия отсутствия скачка магнитного поля, скачка касательного к поверхности разрыва электрического поля и скачка нормального тока, эти условия выводились из уравнений Максвелла исходя из отсутствия поверхностных токов и зарядов. Полученные здесь дополнительные условия на разрыве типа ударной волны аналогичные: скачка магнитного поля нет, используя формулу (2.3), можно убедиться, что из условий  $[v] = 0$ ,  $[w] = 0$ ,  $[B_y] = 0$ ,  $[B_z] = 0$  следует отсутствие скачка касательного (поперечного) электрического поля. Продольного тока в одномерном случае нет и в качестве условия на разрыве здесь это не используется.

В ходе расчетов без диссипации было выявлено, что при опрокидывании альвеновских волн схемная дисперсия может создавать недиссипативные структуры (кинки), фиг. 5г, фиг. 6. Судя по виду графиков, в этих структурах внутри концентрируется некоторое количество массы и импульса, которое меняется со временем, поэтому в нестационарном случае условия (3.1) и (3.2) могут не выполняться. В работе [10] подобные разрывы со скачком поперечного магнитного поля были исключены из рассмотрения в связи с тем, что такой скачок предполагает конечные значения тока, а значит, заряда и массы в бесконечно малом объеме. При выходе рассматриваемых структур на однородное состояние в их окрестности формируются уединенные волны с внутренним кинком, движущиеся с постоянной скоростью, фиг. 6, здесь выбрано однородное состояние с  $B_z = 0$  и  $w = 0$ . В этих решениях имеется пространственная симметрия для переменных  $n$ ,  $u$ ,  $w$ ,  $B_y$  и антисимметрия для переменных  $v$  и  $B_z$ . В понимании магнитной гидродинамики кинки внутри уединенных волн являются специальными структурами альвеновского разрыва (класс  $-1$  согласно терминологии [14]). Кинки возникают за счет схемной дисперсии, описываемой членами с производными высокого порядка. Они сходны с решениями МКДВ, у этого уравнения в зависимости от знака при дисперсионном члене могут быть решения с симметричными кинками или без них [5]. Длинноволновая часть солитонного решения возникает за счет дисперсии самих уравнений. У этих уединенных волн скорость растет с ростом амплитуды, они обгоняют друг друга без заметного изменения параметров. Рассмотренные структуры – численный эффект, но их наличие показывает, что добавка в уравнения дисперсионных членов с высшими производными может привести к существованию структур такого типа. Даже если не найдется физических эффектов, формирующих такие структуры, это представляет математический интерес и может встречаться в других моделях с дисперсией.

### 3.6. Сравнение с результатами для волн в трубах с упругими стенками

Возможность отсутствия классических решений при некоторых начальных данных в системах с дисперсией уже обсуждалась в работе [15], в контексте решения уравнений волн в трубе с упругими стенками. В случае трубы с газом в отличие от системы, рассматриваемой здесь, число ветвей  $\omega(k)$  совпадает с числом корней  $k(\omega)$ , но в случае трубы с жидкостью, как и здесь, уравнения можно привести к форме с пространственно-временной производной, общее число корней  $k(\omega)$  на два корня больше, чем число ветвей  $\omega(k)$ . У этих уравнений, как и у рассматриваемой здесь системы, скорость распространения физически осмысленных волн с  $k \in R$  при  $k \rightarrow \infty$  стремится к постоянной величине, т.е. исчезает дисперсия, поэтому волны могут опрокидываться. Было предложено, если непрерывного решения не существует, для расчета таких решений применять дополнительные диссипативные или дисперсионные члены с высшими производными. Были приведены примеры расчетов с возникающими при этом разрывами. Но диссипативные разрывы были элементами решения задачи о распаде произвольного разрыва, а не исчезали со временем как в случае опрокидывания альвеновской волны. Кроме того, использовалась лагранжева неконсервативная форма уравнений, все условия на разрыве в таком случае получаются как результат расчета структуры разрыва. Здесь в отличие от [15] используется именно физическая вязкость, что указывает, что такой разрыв может наблюдаться в реальности.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщены уравнения ЭМГД. Проанализированы различные варианты записи уравнений ЭМГД на возможность их расчета конечно-разностным методом. Решена задача о распаде раз-



рыва. Исследованы структуры разрывов различных типов как разделяющие области, описываемые уравнениями МГД, так и разделяющие области, описываемые уравнениями ЭМГД. Для быстрых и медленных магнитозвуковых волн умеренной амплитуды получаются структуры, прогнозируемые теорией бездиссипативных разрывов, при большой амплитуде возможно опрокидывание волны, требующее включения вязкости или дополнительной дисперсии. В случае холодной плазмы две дисперсионные ветви медленных магнитозвуковых волн сливаются друг с другом. Это может приводить с течением времени к неограниченному локальному росту плотности. Вид альвеновских структур нетипичен для теории бездиссипативных разрывов в том смысле, что при их расширении солитонных или локальных структур не образуется. В зависимости от длины переходного участка в начальных данных для альвеновских структур возможно как возникновение сразу гладкого решения, так и опрокидывание волны, требующее на начальных этапах эволюции со временем рассмотрения решения ЭМГД с разрывом или включения дополнительных членов в уравнения. Условия на разрывах получены из уравнений ЭМГД в форме законов сохранения. В случае включения слабой газодинамической вязкости обнаружена структура разрыва решений ЭМГД типа ударной волны. Проанализирована эволюционность разрыва и найдены четыре дополнительные условия на разрыве посредством анализа структуры разрыва. Обнаружено, что при используемой численной схеме с центральными пространственными разностями и применением метода Рунге–Кутты четвертого порядка для аппроксимации временных производных в случае опрокидывания волн в решения могут быть автоматически включены различные структуры бездиссипативного типа или сделано сглаживание решения, что в некоторых случаях может быть полезно при расчетах.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
2. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in a cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 1159–1166.
3. Kakutani T., Ono H. Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
5. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
6. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы для магнитозвуковой ветви холодной плазмы // Физ. плазмы. 2000. Т. 26. № 1. С. 1–8.
7. Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Распад солитонов в изотермической бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическим давлением // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 1. С. 125–141.
8. Bakholdin I.B. Magnetosonic solitary waves and jumps in a cold plasma. Advances in plasma physics research. V. 1. New York.: Nova science publishers, 2001. P. 97–106.
9. Бахолдин И.Б., Егорова Е.Р. Исследование магнитозвуковых уединенных волн для уравнений электронной магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 3. С. 515–528.
10. Гавриков М.Б. Двухжидкостная гидродинамика. М.: URSS КРАСАНД, 2018. 578 с.
11. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Взаимодействие уединенных волн в двухжидкостной гидродинамике в продольном магнитном поле // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. естественные науки. 2017. № 1 (70). С. 59–77.
12. Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н. Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме. М.: Наука, 1989. 313 с.
13. Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // Прикл. матем. и механ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
14. Бахолдин И.Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // Прикл. матем. и механ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 833–852.
15. Бахолдин И.Б. Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 7. С. 1224–1238.
16. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
17. Куликовский А.Г. Об устойчивости однородных состояний // Прикл. матем. и механ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 148–153.
18. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М.: МИРАН. Лекц. курсы НОЦ, 2010, выпуск 16, 3–120.