ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 3, с. 450–456

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.927

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ ЦИЛИНДРА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

 С. И. Эминов

173003 Великий Новгород, ул. Б.С.-Петербургская, 41, Новгородский гос. ун-т, Россия

e-mail: eminovsi@mail.ru

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.
Переработанный вариант 15.01.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Векторная задача дифракции электромагнитных волн на цилиндре описывается системой двух двумерных интегродифференциальных уравнений. После разложения неизвестных функций и правых частей в ряды Фурье задача сводится к системам одномерных уравнений. Рассмотрено аналитическое обращение главного оператора одномерных систем в пространствах Соболева. Доказаны теоремы об ограниченности и ограниченной обратимости главного оператора. Обратный оператор представлен в виде рядов и в замкнутой форме: элементы обратной матрицы представляют собой интегральные или интегродифференциальные операторы. Библ. 19.

Ключевые слова: дифракция, цилиндр, операторная матрица, пространства Соболева, теорема Лакса-Мильграма, интегральный оператор, сингулярный оператор, интегродифференциальный оператор, обратная матрица.

DOI: 10.31857/S0044466921030054

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассмотрено аналитическое обращение операторной матрицы, которая встречается в задаче дифракции на отрезке цилиндра (см. [1]),

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}SL \\ a_{21}SA & a_{22}L \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}(Lv)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v(t)\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt, \quad (Au)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt,\\ (SLv)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} v(t)\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt, \quad (SAu)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt,\end{gathered} \tag{2}$$

a_{ij} – постоянные величины.

В частном случае, когда $a_{12} = a_{21} = 0$, матрица является диагональной.

Уравнения с компактными операторами M и N

$$Au + Mu = f, \tag{3}$$

$$Lv + Nv = g \tag{4}$$

соответствуют осесимметричному случаю, а также задачам дифракции на цилиндрической поверхности. Эти уравнения рассмотрены во многих литературных источниках. В данной работе используются методы псевдодифференциальных уравнений, развитые в [2]–[5].

В указанных работах уравнения рассматриваются в пространствах Соболева, выбор индексов пространств обеспечивает ограниченность операторов задач. В [3] доказаны теоремы существования и единственности решения в пространствах Соболева для скалярных задач, а в [4] – для векторных задач.

Целью данной работы является аналитическое построение обратного оператора к главному непрерывно обратимому оператору задачи. Именно он является носителем информации о свойствах решения применительно к задачам дифракции электромагнитных волн (имеются в виду свойства поверхностных токов).

1. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ОДНОМЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Введем основные определения (см. [6], [7]): $H_s(R)$ – пространство обобщенных функций $u(\tau)$, преобразование Фурье которых $\tilde{u}(\xi)$ локально интегрируемо в смысле Лебега и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{2s}\, d\xi < +\infty; \tag{5}$$

$H_s(-1,1)$ – подпространство в $H_s(R)$, состоящее из функций $u(\tau)$ с носителем в замкнутом промежутке $[-1,1]$. Финитные и бесконечно дифференцируемые функции $C_0^\infty(-1,1)$ плотны в $H_s(-1,1)$ по норме (5);

$\tilde{H}_s(-1,1)$ – пространство обобщенных функций f, допускающих продолжение lf на R, принадлежащее $H_s(R)$.

Норма в $\tilde{H}_s(-1,1)$ определяется формулой

$$\|f\|_s = \inf_l \|lf\|_s. \tag{6}$$

Псевдодифференциальный оператор

$$(\tilde{A}_s u)(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2s}\, \tilde{u}(\xi)\exp(-i\tau\xi) d\xi < +\infty, \quad -\infty < \tau < +\infty, \tag{7}$$

как показано в [6, стр. 45], ограничен из пространства $H_s(R)$ в пространство $H_{-s}(R)$. Оператор сужения из пространства $H_{-s}(R)$ в пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$, согласно определению (6), также непрерывен. Отсюда получаем

Утверждение 1. *Интегральный оператор*

$$(\tilde{A}_s u)(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2s}\, \tilde{u}(\xi)\exp(-i\tau\xi) d\xi < +\infty, \quad -1 \le \tau \le 1, \tag{8}$$

непрерывен из пространства $H_s(-1,1)$ в пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$ при любом вещественном s.

Квадратичная форма оператора A_s

$$(A_s u, u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|)^{2s} |\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi < +\infty = \frac{1}{2\pi}\|u\|_s^2 \tag{9}$$

положительно-определена или коэрцитивна. Пространство, сопряженное к $H_s(-1,1)$, изоморфно пространству $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$ (см. [6, с. 74]). Поэтому выполнены условия теоремы Лакса–Мильграма (см. [8, с. 8], [4, с. 63]). Из этой теоремы следует сюръективность оператора A_s. Наконец, применяя теорему Банаха об обратном операторе, получим

Утверждение 2. *Непрерывный оператор A_s взаимно однозначно отображает пространство $H_s(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$, и обратный оператор A_s^{-1} ограничен.*

В [9, с. 81] для непрерывных операторов введено понятие фредгольмового оператора и индекса, исследовано поведение индекса в зависимости от компактных возмущений. Доказано (см. [9, с. 81]), что если оператор B — фредгольмов, а K — компактен, то оператор $B+K$ также фредгольмов и его индекс равен индексу оператора B. Отсюда и из утверждения 2 следует

Утверждение 3. *Для любого компактного оператора* $K\colon H_s(-1,1)\to \tilde{H}_{-s}(-1,1)$ *оператор* A_s+K *отображает пространство* $H_s(-1,1)$ *на все пространство* $\tilde{H}_{-s}(-1,1)$.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим оператор A:

$$(Au)(\tau)=\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|\tilde{u}(\xi)\exp(-i\tau\xi)\,d\xi,\quad -1\le\tau\le 1, \tag{10}$$

из пространства $H_{1/2}(-1,1)$ в пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$. Равенство двух форм записи оператора (в координатной и в виде интеграла Фурье) на плотном в $H_{1/2}(-1,1)$ множестве $C_0^\infty(-1,1)$ следует из тождества

$$\ln\frac{1}{|\tau-t|}=C+\int_0^1\frac{\cos(\xi(\tau-t))-1}{\xi}d\xi+\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\xi(\tau-t))}{\xi}d\xi,\quad C=0.5772. \tag{11}$$

Оператор A отличается от оператора $A_{1/2}$ на компактный оператор (см. [7, с. 107]), кроме того, он является положительным. С учетом утверждения 3 оператор A взаимно однозначно отображает пространства $H_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ и обратный оператор A^{-1} ограничен. Введем систему функций

$$\varphi_n(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin(n\arccos(\tau)),\quad n=1,2,\ldots. \tag{12}$$

Она плотна в пространстве $H_{1/2}(-1,1)$, и имеют место соотношения (см. [10])

$$(A\varphi_n)(\tau)=\frac{n}{\sqrt{1-\tau^2}}\varphi_n(\tau), \tag{13}$$

$$(A\phi_n,\phi_m)=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\ne n.\end{cases} \tag{14}$$

Для решения уравнения

$$Au=f \tag{15}$$

разложим неизвестную по функциям (12)

$$u(\tau)=\sum_{m=1}^{+\infty}c_m\varphi_m(\tau),$$

подставим в (15), умножим скалярно в $L_2[-1,1]$ на φ_n и учтем (14). В результате получим

$$u(\tau)=(A^{-1}f)(\tau)=\sum_{m=1}^{+\infty}(f,\varphi_m)\varphi_m(\tau). \tag{16}$$

В формуле (16) ряд можно привести к интегралу (см. [10], [7 с. 16]). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Оператор A непрерывно отображает пространство* $H_{1/2}(-1,1)$ *на все пространство* $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$, *обратный оператор* A^{-1} *ограничен, задается формулой*

$$(A^{-1}f)(\tau)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(t)\ln\left|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right|dt \tag{17}$$

и отображает пространство $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ *на пространство* $H_{1/2}(-1,1)$.

Элементы пространства $\tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ суть обобщенные функции, они проявляют себя по воздействию на пробные функции. Имеет место

Теорема 2. *Если* $f \in \tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} |(f,\varphi_m)|^2 < +\infty. \tag{18}$$

Верно обратное утверждение, если выполнено (18), *то элемент*

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} (f,\varphi_m)\,\varphi_m(\tau)$$

принадлежит пространству $H_{1/2}(-1,1)$.

Доказательство. Для каждого элемента $f \in \tilde{H}_{-1/2}(-1,1)$ найдется такой элемент $u \in H_{1/2}(-1,1)$, что $Au = f$. Разлагая u в ряд (16) и учитывая (14), получаем

$$(Au,u) = \sum_{m=1}^{+\infty} |(f,\varphi_m)|^2 < +\infty. \tag{19}$$

Обратно, пусть выполнено (18), тогда верно и (19). Из положительной определенности оператора A(см. [10]) следует, что

$$\|u\|_{1/2}^2 \le \frac{1}{\gamma^2}(Au,u) < +\infty, \quad \gamma^2 > 0,$$

поэтому $u \in H_{1/2}(-1,1)$. Что и требовалось доказать.

Аналитическое обращение с помощью ортонормированных систем можно построить и для других одномерных операторов в пространствах Соболева (см. [11]). Остановимся на интегральном операторе L. Введем систему функций

$$\psi_n(\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi \ln 2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \dfrac{\cos(n \arccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n \ge 1, \end{cases} \tag{20}$$

которая является ортонормированной в следующем смысле (см. [12, с. 236]):

$$(L\psi_n)(\tau) = \begin{cases} \ln 2\sqrt{1-\tau^2}\psi_0(\tau), & n = 0, \\ \dfrac{1}{n}\sqrt{1-\tau^2}\psi_n(\tau), & n \ge 1, \end{cases} \tag{21}$$

$$(L\psi_n, \psi_m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \ne n. \end{cases} \tag{22}$$

Согласно (21), оператор L переводит функции, определенные формулой (20), в многочлены. Аналогично теореме 1, доказывается

Теорема 3. *Оператор* L *непрерывно отображает пространство* $H_{-1/2}(-1,1)$ *на все пространство* $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$, *обратный оператор* L^{-1} *ограничен, задается формулой*

$$(L^{-1}g)(\tau) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}\,g'(t)}{\tau - t} dt + \frac{1}{\pi \ln 2\sqrt{1-\tau^2}} \int_{-1}^{1} \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \tag{23}$$

и отображает пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ *на все пространство* $H_{-1/2}(-1,1)$.

Замечание 1. Формула (23) получена многими авторами (см., в частности, [13, с. 591], [12, с. 224]). Новым является положение о том, что оператор L^{-1} отображает ограниченно пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ на все пространство $H_{-1/2}(-1,1)$.

Замечание 2. В формулу (23) входит производная $f'(t)$. В связи с этим отметим важный факт из теории пространств Соболева: пространство $\tilde{H}_{1/2}(-1,1)$ совпадает с пространством $H_{1/2}(-1,1)$ (см. [14, с. 71]), в котором плотно множество $C_0^\infty(-1,1)$. Поэтому оператор L^{-1} корректно определен на плотном в пространстве $H_{1/2}(-1,1)$множестве и далее продолжается по непрерывности.

Замечание 3. Для оператора L имеет место также аналог теоремы 2. Как и A, оператор L является положительно-определенным. Это свойство является следствием положительности и ограниченной обратимости (см. [15, с. 49]).

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим оператор

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}A & a_{12}SL \\ a_{21}SA & a_{22}L \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} H_{1/2}(-1,1) \\ H_{-1/2}(-1,1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \tilde{H}_{-1/2}(-1,1) \\ \tilde{H}_{1/2}(-1,1) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

который отображает прямую сумму гильбертовых пространств $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$ в $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$.

Все операторы A: $H_{1/2} \to \tilde{H}_{-1/2}$, SL: $H_{-1/2} \to \tilde{H}_{-1/2}$, SA: $H_{1/2} \to \tilde{H}_{1/2}$, L: $H_{-1/2} \to \tilde{H}_{1/2}$ являются ограниченными (см. [6, с. 45]).

Заметим, что $L-$ интегральный оператор с логарифмической особенностью в ядре; A – гиперсингулярный оператор, ядро этого оператора получается из ядра оператора L в результате двойного дифференцирования; SL и SA – сингулярные операторы I рода.

Для обращения оператора T рассмотрим уравнение

$$T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

или соответствующую систему уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}(Au)(\tau) + a_{12}(SLv)(\tau) &= f(\tau), \\ a_{21}(SAu)(\tau) + a_{22}(Lv)(\tau) &= g(\tau). \end{aligned} \tag{25}$$

Коэффициенты a_{ij} – постоянны. Потребуем, чтобы выполнялись условия $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. Разложим неизвестные функции в ряды

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m\varphi_m(\tau), \quad v(\tau) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m\psi_m(\tau) \tag{26}$$

и подставим в (25). Отметим, что наряду со свойствами ортонормированности (14) и (22),

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{mn}, \quad (L\psi_n, \psi_m) = \delta_{mn}, \tag{27}$$

имеют место равенства

$$(SL\psi_n, \varphi_m) = \delta_{mn}, \quad (SA\varphi_n, \psi_m) = \delta_{mn}. \tag{28}$$

После подстановки (26) в (25) первое уравнение умножим на φ_n (точнее воздействуем), а второе на ψ_n. В результате получим системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}c_n + a_{12}d_n &= (f, \varphi_n), \\ a_{21}c_n + a_{22}d_n &= (g, \psi_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{29}$$

$$a_{22}d_0 = (g, \psi_0). \tag{30}$$

Решив эти системы для каждого индекса, найдем решение системы (25):

$$u(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(f, \varphi_m)\varphi_m(\tau) - \frac{a_{12}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(g, \psi_m)\varphi_m(\tau), \tag{31}$$

$$v(\tau) = \frac{1}{a_{22}}(g, \psi_0)\psi_0(\tau) + \frac{a_{11}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(g, \psi_m)\psi_m(\tau) - \frac{a_{21}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(f, \varphi_m)\psi_m(\tau). \tag{32}$$

Оператор T ограничен. Далее для любого элемента из пространства $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$ построили функцию по формулам (31) и (32), которая согласно теореме 2 принадлежит пространству $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$. Следовательно, оператор T сюръективен. Он также инъективен, если $f = g = 0$, то непременно $u = v = 0$. Применяя теорему Банаха об обратном операторе, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Оператор T непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{1/2} \oplus H_{-1/2}$ на все пространство $\tilde{H}_{-1/2} \oplus \tilde{H}_{1/2}$, и обратный оператор T^{-1} ограничен.*

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕРЕЗ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Обратный оператор T^{-1} представим в виде операторной матрицы:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}f + R_{12}g \\ R_{21}f + R_{22}g \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где

$$(R_{11}f)(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(f,\varphi_m)\varphi_m(\tau), \tag{34}$$

$$(R_{12}g)(\tau) = -\frac{a_{12}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(g,\psi_m)\varphi_m(\tau), \tag{35}$$

$$(R_{21}f)(\tau) = -\frac{a_{21}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(f,\varphi_m)\psi_m(\tau), \tag{36}$$

$$(R_{22}g)(\tau) = \frac{1}{a_{22}}(g,\psi_0)\psi_0(\tau) + \frac{a_{11}}{\Delta}\sum_{m=1}^{+\infty}(g,\psi_m)\psi_m(\tau). \tag{37}$$

Для преобразования формул (34)–(37) поменяем порядок суммирования и интегрирования, затем воспользуемся формулами (см. [16, с. 52])

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\cos(m\varphi)\cos(m\theta) = -\frac{1}{2}\ln\left|2(\cos\varphi - \cos\theta)\right|, \tag{38}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\cos(m\varphi)\cos(m\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi - \cos\theta}. \tag{39}$$

После несложных преобразований получим

$$(R_{11}f)(\tau) = \frac{a_{22}}{\Delta\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\ln\left|\frac{\tau - t}{1 - \tau t + \sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right|dt, \tag{40}$$

$$(R_{12}g)(\tau) = \frac{a_{12}\sqrt{1-\tau^2}}{\Delta\pi}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}(\tau - t)}, \tag{41}$$

$$(R_{21}f)(\tau) = -\frac{a_{21}}{\Delta\pi\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)dt}{(\tau - t)}, \tag{42}$$

$$(R_{22}g)(\tau) = \frac{a_{11}}{\Delta\pi\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}g'(t)}{\tau - t}dt + \frac{1}{a_{22}\pi\ln 2\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt. \tag{43}$$

Все операторы $R_{11}\colon \tilde{H}_{-1/2} \to H_{1/2}$, $R_{12}\colon \tilde{H}_{1/2} \to H_{1/2}$, $R_{21}\colon \tilde{H}_{-1/2} \to H_{-1/2}$, $R_{22}\colon \tilde{H}_{1/2} \to H_{-1/2}$ являются ограниченными, поскольку они получаются из ограниченного оператора T^{-1} в результате двух операций: сужения на подпространство и проектирования на подпространство. Поэтому имеет место

Теорема 5. *Интегральные операторы* (40)–(43) *являются ограниченными операторами в соответствующих пространствах.*

Замечание 4. Формулы (40)–(43) правильно передают поведение неизвестных функций на границах отрезка, поскольку решения строятся по функциям, учитывающим поведение на границе или условия Мейкснера на ребре. Кроме того, они несут в себе дополнительную глубокую информацию о неизвестных, с их помощью можно строить численно-аналитические методы решения интегральных уравнений (см. [17]).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Оператор T естественным образом возникает в векторной задаче дифракции электромагнитных волн на отрезке цилиндра. После разложения неизвестных функций и правых частей в ряды Фурье система двумерных интегродифференциальных уравнений сводится к системам одномерных уравнений, зависящих от индекса разложения n. Оператор T не зависит от этого индекса, т.е. он един для всех систем. На самом деле оператор T точно также возникает в задаче дифракции на произвольной поверхности вращения (см. [18]).

Оператор указанной выше системы B представляется в виде суммы оператора T и вполне непрерывного оператора K. Обратный к оператору B можно представить в виде суммы оператора T^{-1} и некоторого вполне непрерывного оператора.

Структура вполне непрерывного оператора в базисе (12) для скалярной задачи подробно исследована в [19]. Матрица оператора сильно разряжена, отличны от нуля лишь элементы, расположенные вблизи главной диагонали. Эти результаты могут быть перенесены на векторную задачу. Из этих результатов следует, что свойства неизвестных, поверхностных токов могут быть получены из анализа интегральных операторов, составляющих матрицу оператора T^{-1}. Поэтому формулы (40)–(43) имеют как теоретическое фундаментальное, так и прикладное значение.

В работе получены следующие результаты.

1. Развит метод аналитического обращения операторов дифракции на основе полных ортонормированных систем.

2. Впервые получены формулы аналитического обращения главного непрерывно обратимого оператора задачи дифракции на отрезке цилиндра в виде рядов и в замкнутой форме: элементы обратной матрицы представляют собой интегральные или интегродифференциальные операторы. Как следствие, получены свойства ограниченности указанных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сочилин А.В., Эминов С.И.* Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции на толстом вибраторе // Ж. теор. физ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 96–101.
2. *Stephan E.P.* Boundary Integral Equations for Screen Problem in R3 // Integral Equations and Operator Theory. 1987. V. 10. P. 236–257.
3. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Интегральные уравнения для задач дифракции волн на экранах // Радиотехн. и электроника. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–31.
4. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: ИПРЖР, 1996.
5. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Информационно-издательский центр ПензГУ, 2009.
6. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973.
7. *Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001.
8. *Баландин М.Ю., Шурина Э.П.* Векторный метод конечных элементов: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001.
9. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М: Изд-во Мехмат МГУ, 2001.
10. *Эминов С.И., Эминова В.С.* Обоснование метода Галеркина для гиперсингулярных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 432–440.
11. *Эминов С.И.* Ортонормированный базис в пространствах Соболева–Слободецкого на отрезке// Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 4. С. 558–560.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
13. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
14. *Лионс Ж-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
15. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
17. *Сочилин А.В., Эминов С.И.* Численно-аналитический метод решения интегральных уравнений вибраторных антенн // Радиотехн. и электроника. 2008. Т. 53. № 5. С. 553–558.
18. *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.
19. *Эминов С.И.* Структура интегральных уравнений дифракции на полосе и отрезке кругового цилиндра // Изв. высш. уч. заведений. Радиофиз. 2017. Т. 60. № 12. С. 1093–1103.