

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

ТЕЧЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ СУСПЕНЗИИ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ¹⁾

© 2021 г. О. Б. Гуськов

125040 Москва, Ленинградский пр-т, 7/1, Институт прикладной механики РАН, Россия

e-mail: ogskv@mail.ru

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.
Переработанный вариант 06.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

На основе ранее разработанного метода самосогласованного поля рассмотрена задача о движении любого конечного числа идентичных сферических частиц произвольной плотности в заданном на бесконечности однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости при наличии плоской твердой поверхности. Получены выражения для скоростей частиц и жидкости при заданном начальном расположении частиц в пространстве с учетом коллективного гидродинамического взаимодействия частиц друг с другом и с заданной твердой поверхностью. Для случая статистически равномерного распределения частиц в пространстве получены в аналитическом виде усредненные профили скорости частиц и жидкости, образующих полубезграничную невязкую суспензию, в первом приближении по объемной доле частиц в суспензии. Библ. 27. Фиг. 4.

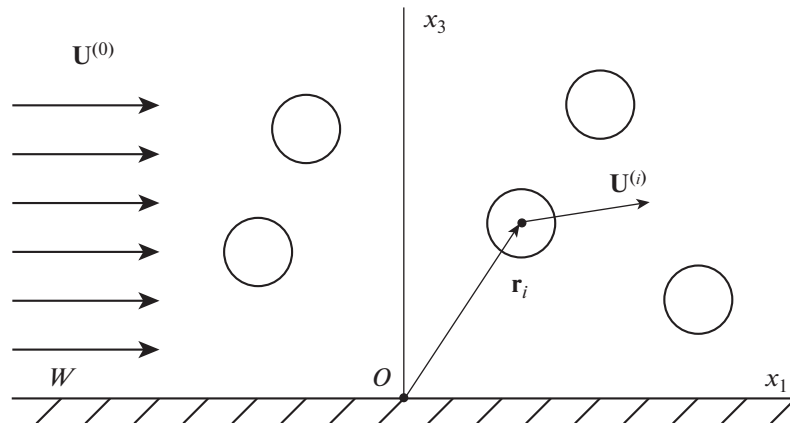
Ключевые слова: гидродинамическое взаимодействие, идеальная жидкость, потенциальное течение, дисперсная частица, суспензия, метод самосогласованного поля.

DOI: 10.31857/S0044466921030091

Одной из ключевых проблем при описании динамики дисперсных потоков с повышенной концентрацией дисперсной фазы является учет эффектов коллективного гидродинамического взаимодействия большого количества дисперсных частиц во внешнем потоке несущей сплошной среды. Исследование этой проблемы для случая идеальной жидкости началось с решения задачи о движении двух сфер [1], [2]. Задача о движении большого количества частиц оказалась чрезвычайно сложной, поскольку является разновидностью известной в науке фундаментальной проблемы многих тел, которая до сих пор не имеет точного решения даже в классической механике. В связи с этим предпринимались попытки приближенного решения этой проблемы на основе построения разного рода физических моделей. Одной из первых была так называемая ячеечная модель, разработанная Каннингэмом [3] применительно к вязкой жидкости, а впоследствии использованная Зубером [4] для определения присоединенной массы газовых пузырьков, образующих в идеальной жидкости безграничную невязкую пузырьковую эмульсию. В рамках этой модели безграничная однородная суспензия (эмульсия) рассматривается как среда, состоящая из множества одинаковых единичных ячеек, каждая из которых содержит одну дисперсную частицу, окруженную жидкой оболочкой, на поверхности которой постулируются те или иные граничные условия. По сути, эта модель носит эвристический характер, поскольку допускает различные формы жидких оболочек и разные виды граничных условий на их поверхности. Результат Зубера [4] впоследствии был уточнен Вейнгаарденом и Джеффри [5] на основе физически более строгой модели, учитывающей гидродинамическое взаимодействие пузырьков в эмульсии. Затем Фельдерхофом было получено [6] обобщение этого результата на случай частиц произвольной массы, однако, решение имеет неявный вид и требует численных расчетов для каждого конкретного значения параметра, характеризующего соотношение плотностей частиц и несущей жидкости.

В середине 1980-х годов научной группой В.В. Струминского был разработан новый метод [7] решения задач о движении многих тел сферической формы в идеальной жидкости на базе известной в физике концепции самосогласованного поля. Метод позволяет описывать эффекты коллективного гидродинамического взаимодействия при движении большой группы частиц в

¹⁾Работа выполнена в рамках Государственного задания, номер гос. регистрации темы: АААА-А19-119012290136-7.



Фиг. 1. Схема течения жидкости вдоль плоской твердой поверхности W при наличии в потоке системы идентичных твердых сферических частиц в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ (ось Ox_2 направлена перпендикулярно плоскости фигуры). $U^{(0)} = \{U_1, 0, 0\}$ – скорость заданного на бесконечности однородного потока, $U^{(i)} = \{U_1^{(i)}, U_2^{(i)}, U_3^{(i)}\}$ – скорость i -й частицы, $r^{(i)} = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\}$ – радиус-вектор центра i -й частицы.

потенциальных потоках идеальной жидкости и определять средние динамические характеристики как пространственно ограниченных дисперсных структур, так и безграничных суспензий. Впоследствии этот метод позволил получить ряд принципиально новых результатов [8]–[14] по динамике невязких суспензий, в том числе при наличии внешних границ, в виде явных аналитических зависимостей от определяющих параметров.

В последнее время получили широкое распространение численные методы исследований динамики дисперсных сред и процессов переноса в них (например, [15]–[19] и др.). Такие методы, очевидно, имеют ряд достоинств по сравнению с чисто теоретическими подходами. К ним можно отнести возможность исследования задач со сложной геометрией потоков и в широком диапазоне значений определяющих гидродинамических критериев (в том числе, по числу Рейнольдса). Однако они имеют и ряд недостатков. Математически априори довольно сложно определить степень достоверности результатов численных расчетов, что нередко приводит к необходимости проведения параллельных экспериментальных исследований. Кроме того, любой расчет производится для дискретного набора значений определяющих параметров. Поэтому выявление зависимостей физических характеристик дисперсных потоков от всего комплекса определяющих параметров является чрезвычайно трудоемкой задачей. В этом плане аналитические результаты теоретических методов более информативны.

Ниже на основе метода самосогласованного поля рассмотрена задача о движении невязкой суспензии сферических частиц вдоль плоской твердой границы в заданном на бесконечности однородном потоке идеальной несжимаемой жидкости. В результате в аналитическом виде получены зависимости усредненных профилей скорости частиц и жидкости от определяющих параметров задачи.

1. КОНЕЧНАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ

Рассмотрим систему из любого, но конечного числа N идентичных сферических частиц радиуса a , погруженных в первоначально покоящуюся идеальную несжимаемую жидкость, занимающую полупространство $x_3 > 0$, ограниченное плоской твердой поверхностью W , заданной условием $x_3 = 0$ (см. фиг. 1). Центры частиц имеют координаты $x_\gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, а их скорости $U_\gamma^{(i)}$ первоначально равны нулю. В некоторый момент времени $t = 0$ жидкость на бесконечности из состояния покоя импульсно приводится в состояние движения со скоростью $U_\gamma^{(0)} = \{U^{(0)}, 0, 0\}$ в направлении, параллельном плоскости W .

Классическая постановка этой задачи в предположении потенциальности течения жидкости, как известно, состоит в решении уравнения Лапласа для потенциала скорости ϕ и удовлетворении граничных условий непротекания на границе W и на поверхности всех частиц.

В рамках метода самосогласованного поля [7]–[9] граничные задачи динамики N сфер в идеальной жидкости в предположении потенциальности течения сведены к формальному решению системы уравнений для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$, входящих в полученное точное решение таких задач. Для сформулированной выше задачи точное решение для безразмерного потенциала скоростей φ , описывающего течение жидкости сразу после внешнего воздействия и удовлетворяющего граничным условиям на поверхности частиц и стенки W , как показано в работе [7], имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} \frac{X_{\gamma_1}^{(i)} \dots X_{\gamma_n}^{(i)}}{R_i^{2n+1}} + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha^{2n+1}}{n+1} T_{\beta_1 \gamma_1} \dots T_{\beta_n \gamma_n} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)} \frac{\tilde{X}_{\gamma_1}^{(i)} \dots \tilde{X}_{\gamma_n}^{(i)}}{\tilde{R}_i^{2n+1}}, \quad (1.1)$$

где

$$\varphi_0 = U_{\gamma}^{(0)} x_{\gamma}, \quad X_{\gamma}^{(i)} = x_{\gamma} - x_{\gamma}^{(i)}, \quad \tilde{X}_{\gamma}^{(i)} = x_{\gamma} - T_{\beta\gamma} x_{\beta}^{(i)}, \quad R_i = \sqrt{X_{\gamma}^{(i)} X_{\gamma}^{(i)}},$$

$$\tilde{R}_i = \sqrt{\tilde{X}_{\gamma}^{(i)} \tilde{X}_{\gamma}^{(i)}}, \quad \alpha = a/L, \quad T_{\beta\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Формула (1.1) является точным решением для потенциала скоростей при условии, что тензорные коэффициенты $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ удовлетворяют системе уравнений [7]:

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_n}} \left\{ (U_{\beta}^{(0)} - U_{\beta}^{(i)}) X_{\beta}^{(i)} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha^{2n+1}}{k+1} C_{\beta_1 \dots \beta_k}^{(j)} \frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_k}^{(j)}}{R_j^{2k+1}} + \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\alpha^{2n+1}}{k+1} T_{\delta_1 \beta_1} \dots T_{\delta_k \beta_k} C_{\delta_1 \dots \delta_k}^{(j)} \frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_k}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2k+1}} \right\}_{R_i=0}, \quad (\lambda - 1)U_{\beta}^{(i)} = \frac{3}{2} C_{\beta}^{(i)}, \quad (1.2)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, $U_{\beta}^{(0)} = \{1, 0, 0\}$, $U_{\beta}^{(i)}$ – скорость i -й частицы, $\lambda = \rho_p/\rho$, ρ_p и ρ – плотность частиц и жидкости соответственно.

Формулы (1.1) и (1.2) записаны в безразмерном виде. В качестве масштабов величин в них приняты заданная на бесконечности скорость жидкости $U^{(0)}$ и характерное расстояние между центрами соседних частиц L . Здесь и далее приняты тензорные обозначения переменных с условием о суммировании по повторяющимся нижним координатным индексам, принимающим значения от 1 до 3. Это условие не распространяется только на переменную R_i . Верхние индексы относятся к частицам, и чтобы отличать их от показателя степени, они заключены в круглые скобки.

Следует отметить, что структура точного решения уравнения Лапласа для потенциала скоростей жидкости (1.1), полученного в работе [7], такова, что это решение изначально удовлетворяет граничному условию непротекания жидкости на плоской стенке W при любых значениях тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$. В свою очередь, первое равенство в (1.2), напрямую вытекающее из граничных условий на поверхности всех сферических частиц, связывает между собой заранее неизвестные тензорные коэффициенты, относящиеся к разным частицам. С физической точки зрения первое равенство в (1.2) по существу представляет собой условие взаимного согласования между собой гидродинамических полей возмущений от всех частиц в заданном внешнем потоке. Второе равенство в (1.2) представляет собой второй закон Ньютона, в котором для записи гидродинамической силы, действующей на i -ю частицу, использована теорема Бика [20], описывающая движение частиц при известном нестационарном внешнем воздействии на них со стороны жидкости. Таким образом, решение системы (1.2) для тензорных коэффициентов $C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)}$ после их подстановки в выражение (1.1) для потенциала скоростей определяет самосогласованное гидродинамическое поле, возникающее сразу после импульсного приведения жидкости на бесконечности из состояния покоя в состояние движения с заданной постоянной скоростью $U_{\beta}^{(0)} = \{1, 0, 0\}$ и удовлетворяющее граничным условиям непротекания на стенке W и на поверхности всех частиц.

Если принять условие о малости характерного параметра задачи $\alpha \ll 1$, т.е. ограничиться случаем разбавленных суспензий, то при решении системы уравнений (1.2) все неизвестные функции можно искать в виде разложений по степеням этого параметра

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C_{\gamma_1 \dots \gamma_n}^{(i)(k)}, \quad U_{\gamma}^{(i)} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k U_{\gamma}^{(i)(k)}, \quad \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \Phi^{(k)}. \tag{1.3}$$

Подстановка (1.3) в (1.2) приводит к следующей системе уравнений:

$$C_{\gamma}^{(i)(0)} = \frac{2(\lambda - 1)}{1 + 2\lambda} U_{\gamma}^{(0)}, \quad U_{\gamma}^{(0)} = \{1, 0, 0\}, \quad C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(0)} = 0 \quad \text{при} \quad m > 1,$$

$$C_{\gamma_1 \dots \gamma_m}^{(i)(k)} = \left(1 - \frac{3}{1 + 2\lambda} \delta_{lm}\right) \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{n}{n+1} C_{\beta_1 \dots \beta_n}^{(i)(k-2n-1)} D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)}, \quad (\lambda - 1) U_{\gamma}^{(i)(k)} = \frac{3}{2} C_{\gamma}^{(i)(k)},$$

$$D_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = (1 - \delta_{ji}) Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} + T_{\delta_{l\beta_1}} \dots T_{\delta_{l\beta_n}} G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \delta_1 \dots \delta_n}^{(j,i)}, \tag{1.4}$$

$$Q_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{X_{\beta_1}^{(j)} \dots X_{\beta_n}^{(j)}}{R_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_j=0},$$

$$G_{\gamma_1 \dots \gamma_m, \beta_1 \dots \beta_n}^{(j,i)} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\gamma_1} \dots \partial x_{\gamma_m}} \left(\frac{\tilde{X}_{\beta_1}^{(j)} \dots \tilde{X}_{\beta_n}^{(j)}}{\tilde{R}_j^{2n+1}} \right) \Big|_{R_j=0},$$

где δ_{ji} — символ Кронекера, а квадратные скобки над знаком суммы обозначают целую часть числа.

Соотношения (1.4) представляют собой рекуррентную систему алгебраических уравнений, где каждое последующее приближение по малому параметру α для всех функций определяется через предыдущие. Таким образом, зная нулевое приближение, с помощью системы (1.4) можно определить все функции в аналитическом виде в любом заданном приближении по малому параметру и, соответственно, найти решение исходной задачи в этом приближении. Решение системы (1.4) с точностью до $O(\alpha^8)$ для продольных (в проекции на ось Ox_1) компонент скоростей частиц $U_1^{(i)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ и жидкости $U_1(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид

$$U_1^{(i)}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}) = \frac{3}{1 + 2\lambda} (1 + \alpha^3 U_1^{(i)(3)} + \alpha^6 U_1^{(i)(6)} + \alpha^8 U_1^{(i)(8)}),$$

$$U_1^{(i)(3)} = -\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left\{ \frac{1}{(2x_3^{(i)})^3} + \sum_{j \neq i} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) \right\},$$

$$U_1^{(i)(6)} = \left(\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{1}{(2x_3^{(i)})^6} + \frac{1}{(2x_3^{(i)})^3} \sum_{j \neq i} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) + \sum_{j \neq i} \frac{1}{(2x_3^{(j)})^3} (B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq i} \left((B_{ij}^{(3)} - 3X_1^{(ji)2} B_{ij}^{(5)})^2 + 9X_1^{(ji)2} X_2^{(ji)2} B_{ij}^{(5)2} + 9X_1^{(ji)2} \left(\frac{X_3^{(ji)}}{R_{ij}^5} + \frac{\tilde{X}_3^{(ji)}}{\tilde{R}_{ij}^5} \right)^2 \right) \right\}, \tag{1.5}$$

$$U_1^{(i)(8)} = -\frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left\{ \frac{1}{128(x_3^{(i)})^8} + \frac{1}{8(x_3^{(i)})^4} \sum_{j \neq i} \left(-X_3^{(ji)} \left(\frac{1}{R_{ij}^5} - 5 \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^7} \right) + \tilde{X}_3^{(ji)} \left(\frac{1}{\tilde{R}_{ij}^5} - 5 \frac{X_1^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^7} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \neq i} \left(\frac{2}{R_{ij}^8} - \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^5 \tilde{R}_{ij}^5} + 2 \frac{(\rho_{ij}^2 + 3X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)})}{R_{ij}^5 \tilde{R}_{ij}^5} - \frac{10}{R_{ij}^7 \tilde{R}_{ij}^5} X_1^{(ji)2} (\rho_{ij}^2 + 3X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)}) B_{ij}^{(2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{25}{R_{ij}^7 \tilde{R}_{ij}^7} X_1^{(ji)2} (\rho_{ij}^2 - X_3^{(ji)} \tilde{X}_3^{(ji)})^2 + 4 \frac{X_1^{(ji)2}}{R_{ij}^{10}} + 4 \frac{\tilde{X}_3^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^{10}} + 60 \frac{X_1^{(ji)2} \tilde{X}_3^{(ji)2}}{\tilde{R}_{ij}^{12}} - 100 \frac{X_1^{(ji)2} \tilde{X}_3^{(ji)4}}{\tilde{R}_{ij}^{14}} \right) \right\},$$

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = 1 - \alpha^3 \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^6}{8} \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^3} \times \left(\frac{1}{R_i^3} + \frac{1}{\tilde{R}_i^3} - 3X_1^{(i)2} \left(\frac{1}{R_i^5} + \frac{1}{\tilde{R}_i^5} \right) \right) + \frac{\alpha^8}{8} \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(x_3^{(i)})^4} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^5} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^5} - 5X_1^{(i)2} \left(\frac{X_3^{(i)}}{R_i^7} - \frac{\tilde{X}_3^{(i)}}{\tilde{R}_i^7} \right) \right), \tag{1.6}$$

где приняты обозначения

$$B_{ij}^{(n)} = \frac{1}{R_{ij}^n} + \frac{1}{\tilde{R}_{ij}^n}, \quad X_\gamma^{(ji)} = x_\gamma^{(j)} - x_\gamma^{(i)}, \quad \tilde{X}_\gamma^{(ji)} = x_\gamma^{(j)} - T_{\beta\gamma} x_\beta^{(i)}, \quad \gamma = 1, 2, 3,$$

$$R_{ij} = \sqrt{\rho_{ij}^2 + X_3^{(ji)2}}, \quad \tilde{R}_{ij} = \sqrt{\rho_{ij}^2 + \tilde{X}_3^{(ji)2}}, \quad \rho_{ij} = \sqrt{X_1^{(ji)2} + X_2^{(ji)2}},$$

а переменные $X_\gamma^{(i)}$, $\tilde{X}_\gamma^{(i)}$, R_i и \tilde{R}_i определены в описании формулы (1.1).

Таким образом, если заданы координаты центров всех частиц $\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, формулы (1.5) позволяют вычислить их скорости, а формулы (1.6) – скорость жидкости в любой заданной точке $\{x_1, x_2, x_3\}$ пространства с точностью до $O(\alpha^8)$.

В формулах (1.5) и (1.6) приведены выражения только для одной компоненты скоростей частиц и жидкости в направлении заданного на бесконечности однородного потока. Структура функций, описывающих две другие компоненты этих скоростей таковы, что после применения к ним последующей процедуры усреднения они дают нулевое значение. Поэтому выражения для этих компонент скорости в (1.5) и (1.6) опущены.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТОКА

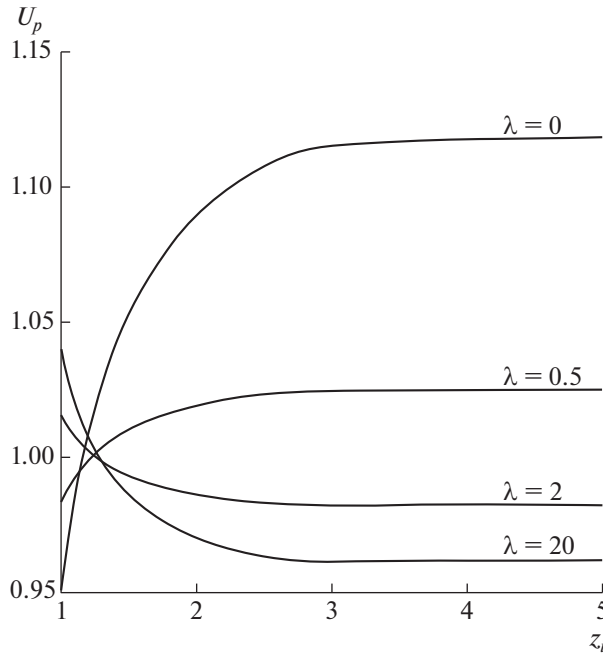
Формулы (1.5) и (1.6) позволяют с высокой точностью вычислять скорости частиц и жидкости для разбавленных дисперсных систем, состоящих из конечного числа частиц. Однако при описании динамики больших систем целесообразен переход к осредненному описанию. В этом случае при вычислении средних значений скоростей с учетом наличия внешней границы W применима процедура осреднения [21]–[23] по различным возможным конфигурациям дисперсных частиц в пространстве. В рамках этой процедуры суммирование известных функций в соотношениях (1.5) и (1.6) фактически заменяется интегрированием по переменным $x_\gamma^{(j)}$ при условии, что частицы не пересекаются друг с другом (либо с точкой пространства, в которой вычисляется среднее значение скорости жидкости) и не выходят за границы объема, занимаемого системой частиц. Весовой функцией в процедуре усреднения является числовая концентрация частиц.

Рассмотрим случай безграничной суспензии, в которой дисперсные частицы статистически равномерно распределены в полупространстве $x_3^{(i)} \geq \alpha$, а их объемная доля ϕ в суспензии мала. В этом случае весовой функцией в процедуре усреднения по объему будет безразмерная числовая концентрация частиц, равная единице при выбранном линейном масштабе задачи L . Если при вычислении средних величин ограничиться первым приближением по объемной доле частиц в суспензии, то при решении системы уравнений (1.4) достаточно учесть лишь члены, описывающие парное взаимодействие частиц. Взаимодействия более высокого порядка в рамках последующей процедуры усреднения вносят вклад только в коэффициенты при более высоких степенях объемной доли. Поэтому в формулах (1.5) и (1.6) они заранее опущены. Для решения задачи с точностью до $O(\phi^n)$ перед процедурой усреднения необходимо при решении системы (1.4) учесть все члены, описывающие взаимодействие частиц до порядка $n + 1$.

Применение процедуры усреднения к правым частям формул (1.5) и (1.6) в итоге с точностью до $O(\phi)$ приводит к следующим выражениям для средних значений скоростей частиц $\langle U_1^{(i)} \rangle$ и жидкости $\langle U_1 \rangle$:

$$\langle U_1^{(i)} \rangle = U_p^{(0)} \left(1 + \frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \left(-\frac{1}{8z_i^3} - \frac{1}{128z_i^8} + q_p(z_i)\phi \right) + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 \left(\frac{1}{64z_i^6} + k_p(z_i)\phi \right) \right), \tag{2.1}$$

$$U_1 = 1 + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} q_f(z) + \left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 k_f(z) \right) \phi,$$



Фиг. 2. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости частиц $U_p = \langle U_1^{(i)} \rangle / U_p^{(0)}$ от их расстояния до стенки z_i при различных значениях параметра $\lambda = \rho_p / \rho$ (см. описание переменных к формулам (1.2) и (2.1)) и заданном значении объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.1$.

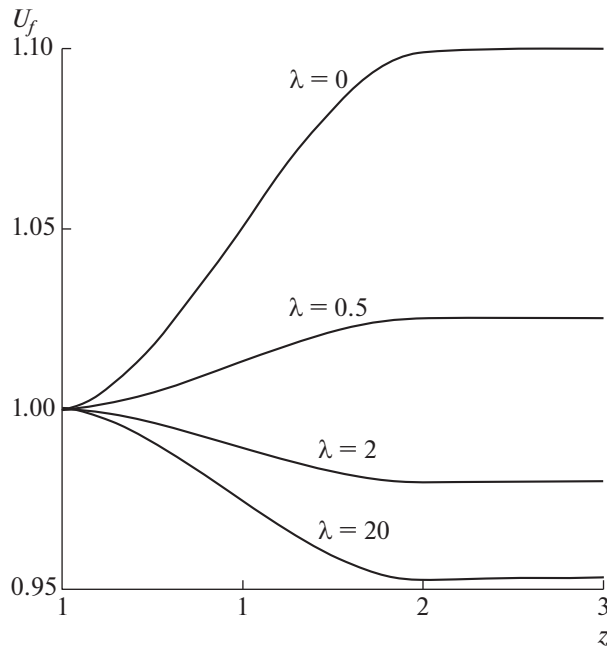
где $U_p^{(0)} = 3/(1 + 2\lambda)$ – характерная безразмерная величина скорости, которую обретает *одиночная* частица в *безграничной* жидкости при том же внешнем воздействии [24], а $z_i = x_3^{(i)} / \alpha = x_3^{(i)*} / a$ и $z = x_3 / \alpha = x_3^* / a$ – нормированные на радиус частиц расстояния от плоской границы W до центра выбранной частицы $x_3^{(i)*}$ и точки пространства x_3^* соответственно. Выражения для функций $q_p(z_i)$, $k_p(z_i)$, $q_f(z)$ и $k_f(z)$ приведены в приложении ниже.

Из формул (2.1) следует, что вдали от границы величины средних скоростей частиц и жидкости выходят на свое постоянное значение, равное

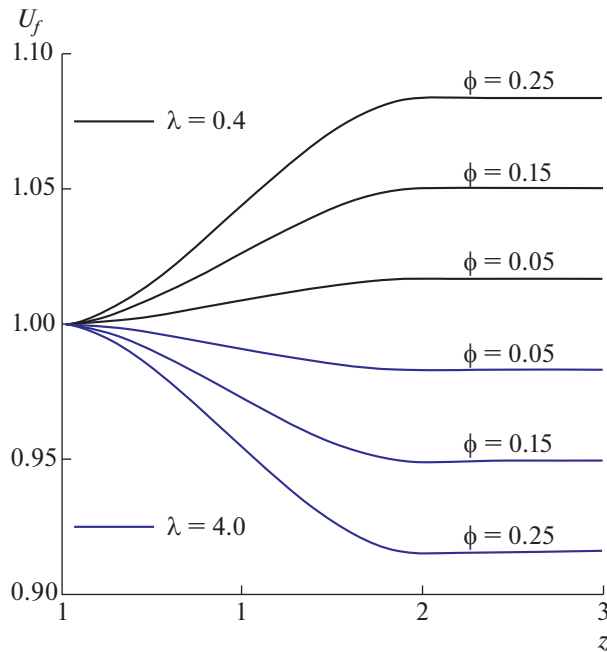
$$\lim_{z_i \rightarrow \infty} \langle U_1^{(i)} \rangle = \frac{3}{1 + 2\lambda} \left(1 + \frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{41 + 2\lambda} \right) \phi \right), \tag{2.2}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} U_1 = 1 + \frac{1 - \lambda}{1 + 2\lambda} \phi.$$

Для иллюстрации полученных результатов (2.1), (2.2) на фиг. 2 и 3 представлены графики зависимости скоростей частиц $U_p(z_i) = \langle U_1^{(i)} \rangle / U_p^{(0)}$ и жидкости $U_f(z) = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до границы W , нормированного на радиус частиц, при заданном значении объемной доли частиц $\phi = 0.1$ и разных значениях параметра λ . Как и следовало ожидать, при равенстве плотностей частиц и жидкости ($\lambda = 1$) их скорости во всем пространстве совпадают с заданной на бесконечности скоростью внешнего потока. Из представленных графиков также видно, что характер зависимости скоростей частиц и жидкости в суспензии существенно зависит от значений параметра λ . В случае, если суспензия содержит “легкие” частицы ($0 \leq \lambda < 1$), то скорости частиц и жидкости в основном потоке превышают их скорости вблизи границы W . И наоборот – в случае “тяжелых” частиц в дисперсной фазе ($\lambda > 1$) скорости частиц и жидкости вдали от границы W меньше, чем их скорости вблизи этой границы. В пределе при $\lambda \rightarrow \infty$ скорости частиц (2.1), как и следовало ожидать, равны нулю. В этом случае неподвижные частицы образуют полу-безграничный стационарный зернистый слой, усредненная скорость жидкости в котором вдали от стенки (2.2) имеет значение $U_f(z \rightarrow \infty) = 1 - \phi/2$.



Фиг. 3. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_f = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до стенки z при различных значениях параметра $\lambda = \rho_p/\rho$ (см. описание переменных к формулам (1.2) и (2.1)) и заданном значении объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.1$.



Фиг. 4. Графики зависимости усредненной по ансамблю скорости жидкости $U_f = \langle U_1 \rangle$ от расстояния до стенки z для случаев “легких” ($\lambda = 0.4$) и “тяжелых” ($\lambda = 4.0$) частиц при различных значениях объемной доли частиц в суспензии $\phi = 0.05, 0.15$ и 0.25 .

Описанные выше характерные особенности зависимостей усредненных скоростей частиц и жидкости для случаев “легких” и “тяжелых” частиц становятся лишь более выраженными с ростом объемной доли частиц в суспензии. Это проиллюстрировано на фиг. 4 на примере зависи-

мостей скорости жидкости от расстояния до стенки W для двух значений параметра $\lambda = 0.4$ (“легкие” частицы) и $\lambda = 4.0$ (“тяжелые” частицы) при разных значениях объемной доли частиц в суспензии.

Функции, описывающие скорости частиц и жидкости, выходят на свое асимптотическое значение (2.2) на расстоянии от границы W порядка размера дисперсных частиц. Это означает, что в потоке суспензии существует узкая приграничная область, в которой наблюдаются сравнительно большие градиенты скоростей частиц и жидкости.

Следует также отметить, что решение системы (1.4) для скорости частиц (1.5) и жидкости (1.6) получено с точностью до $O(\alpha^8)$. Как показывает анализ членов $o(\alpha^8)$ в представлениях вида (1.5) и (1.6), после применения процедуры осреднения их вклад в результат (2.1) во всем интервале значений аргументов функций не превышает величины 5%.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе теоретически исследована задача о течении невязкой суспензии вдоль плоской поверхности в заданном однородном потоке идеальной жидкости с учетом коллективного гидродинамического взаимодействия частиц. Для случая статистически равномерного распределения частиц в пространстве получено аналитическое решение для усредненных профилей скоростей частиц и жидкости в первом приближении по объемной доле частиц в суспензии с учетом влияния внешней плоской границы. Показано, что характер полученных зависимостей существенно зависит от соотношения плотностей частиц и жидкости в суспензии.

Следует отметить, что в записи решений (1.5) и (1.6), полученных с точностью до $O(\alpha^8)$, учтены только те функции, которые описывают парное взаимодействие частиц, так как при осреднении только они дают вклад в коэффициент перед первой степенью объемной доли частиц в суспензии ϕ в формулах (2.1). Для получения решения вида (2.1) с точностью до более высоких степеней объемной доли ϕ необходимо в формулах (1.5) и (1.6) учитывать также функциональные члены, описывающие взаимодействия частиц более высокого порядка. Это возможно в рамках метода [7], [8], что может быть предметом дальнейших исследований.

Использованная в работе модель идеальной жидкости для несущей сплошной среды, как известно, приближенно описывает течение жидкостей и газов при больших числах Рейнольдса. Кроме того, результат (2.1) получен в первом приближении по объемной доле частиц в дисперсной среде, т.е. для малых значений этого параметра. Однако реальная точность и пределы применимости результата (2.1) по числу Рейнольдса и по объемной доле дисперсной фазы могут быть установлены только экспериментально.

Следует также отметить, что использованный в работе подход применим для теоретического исследования достаточно широкого класса задач динамики невязких дисперсных сред. К ним относятся задачи динамики как пространственно ограниченных ансамблей свободных дисперсных частиц, так и безграничных суспензий, в том числе при наличии внешних границ [7], [8]. Метод дает возможность исследовать задачи динамики жестких кластерных структур [12], задачи о движении тел произвольного размера сквозь дисперсную среду [10], [11], задачи о движении шероховатых тел в идеальной жидкости [14] и ряд других.

В работе для поставленной гидродинамической задачи в рамках модели идеальной жидкости получено *аналитическое решение* одного из классических уравнений, которое имеет отношение не только к гидродинамике, но и к целому ряду других областей физики. Полученное в работе *аналитическое решение гидродинамической задачи* может быть напрямую использовано, например, для теоретического исследования процессов переноса в дисперсной среде с учетом коллективного взаимодействия дисперсных частиц, так как решение такого рода задач также основано на решении уравнения Лапласа. Возможность такого подхода была обоснована Фельдерхофом в 1991 г. (см. [6]). В рамках такого подхода в работах Б.В. Бошенятова (например, [25]–[27]) были получены коэффициенты переноса (теплопроводности, электропроводности) для дисперсных сред (в том числе, сложноструктурированных) с учетом эффектов коллективного взаимодействия частиц. В этих работах были напрямую использованы результаты решения соответствующих гидродинамических задач в рамках модели идеальной жидкости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для функций $q_p(z_i)$, $k_p(z_i)$, $q_f(z)$ и $k_f(z)$, входящих в формулы (2.1) для усредненных скоростей частиц и жидкости суспензии:

$$q_p(z_i) = \begin{cases} q_{p1}(z_i), & 1 \ll z_i < 3, \\ q_{p2}(z_i), & 3 \ll z_i < \infty, \end{cases} \quad k_p(z_i) = \begin{cases} k_{p1}(z_i), & 1 \ll z_i < 3, \\ k_{p2}(z_i), & 3 \ll z_i < \infty, \end{cases}$$

$$q_{p1}(z_i) = \frac{406933}{573440} + \frac{z_i(547 + 189z_i - 63z_i^2)}{2048} - \frac{19 + 27z_i + 15z_i^2 + 3z_i^3}{1024(z_i + 1)^5} + \frac{1}{3440640z_i^8} (107520 -$$

$$- 1843200z_i - 1106700z_i^2 + 703878z_i^3 - 1117200z_i^4 + 1702365z_i^5 - 362600z_i^6 + 17535z_i^7) -$$

$$- \frac{\sqrt{z_i + 1}}{215040z_i^8} (6720 - 118560z_i - 7080z_i^2 + 31308z_i^3 - 43884z_i^4 +$$

$$+ 113148z_i^5 - 72625z_i^6 + 44030z_i^7 + 49875z_i^8 - 840z_i^9) + \frac{(75 + 1301z_i^2)}{8192z_i^7} \ln(z_i + 1),$$

$$q_{p2}(z_i) = \frac{15}{16} + \frac{5}{16z_i^5} \ln(z_i - 1) + \frac{3(25 + 7z_i^2)}{4096z_i^7} \ln\left(\frac{z_i + 1}{z_i - 1}\right) +$$

$$+ \frac{4480 - 76800z_i - 47425z_i^2 + 28672z_i^3 - 1610z_i^4 + 71680z_i^5 - 770z_i^6}{71680z_i^8} +$$

$$+ \frac{311 + 2632z_i^2 + 1302z_i^4 - 32z_i^6 + 11z_i^8}{1024(z_i^2 - 1)^5},$$

$$k_{p1}(z_i) = \frac{267}{512} + \frac{3(3 + 2z_i)}{128(z_i + 1)^3} - \frac{z_i(18 + 33z_i - 43z_i^2)}{1024} - \frac{64 + 20z_i^3 + 30z_i^4 + 15z_i^5}{1024z_i^6} +$$

$$+ \frac{\sqrt{z_i + 1}}{1024z_i^6} (64 - 32z_i + 24z_i^2 - 40z_i^3 + 32z_i^4 - 24z_i^5 - 336z_i^6 + 108z_i^7 + 30z_i^8 - 45z_i^9) -$$

$$- \frac{9z_i^2(12 - 5z_i^2)}{2048} \ln\left(\frac{(1 + \sqrt{z_i + 1})^2}{z_i + 2}\right) - \frac{3}{512z_i^3} \ln(z_i + 1) + \frac{3}{128} \ln(1 + \sqrt{z_i + 1}),$$

$$k_{p2}(z_i) = \frac{73}{256} - \frac{3}{64(z_i - 2)} - \frac{3(27 + 44z_i^2 + z_i^4)}{128(z_i^2 - 1)^3} - \frac{64 - 12z_i^4 + 45z_i^8}{512z_i^6} +$$

$$+ \frac{3}{128} \ln\left(\frac{z_i}{z_i - 2}\right) - \frac{3}{256z_i^3} \ln\left(\frac{z_i + 1}{z_i - 1}\right) - \frac{9z_i^2(12 - 5z_i^2)}{2048} \ln\left(\frac{z_i^2}{z_i^2 - 4}\right),$$

$$q_f(z) = \begin{cases} q_{f1}(z), & 0 \ll z < 2, \\ q_{f2}(z), & 2 \ll z < \infty, \end{cases} \quad k_f(z) = \begin{cases} k_{f1}(z), & 0 \ll z < 2, \\ k_{f2}(z), & 2 \ll z < \infty, \end{cases}$$

$$q_{f1}(z) = \frac{13 + 138z + 768z^2 - 176z^3 - 3349z^4 - 1274z^5 + 3780z^6 + 2520z^7}{64(z + 1)^2} +$$

$$+ \frac{67 + 182z - 1071z^2 - 2672z^3 + 5618z^4 + 16548z^5 - 6720z^6 - 20160z^7}{64(4z + 1)^{3/2}} -$$

$$- \frac{3}{32} \ln(z + 1) - \frac{3}{32} (1 - 60z^2 + 350z^4 - 420z^6) \ln\left(\frac{2z + 1 + \sqrt{4z + 1}}{2(z + 1)}\right) + \frac{(1 - (1 - 2z + 6z^2)\sqrt{4z + 1})}{16z^3},$$

$$q_{f2}(z) = 1 + \frac{1}{8z^3} - \frac{3}{16} \ln\left(\frac{z}{z - 1}\right) + \frac{15}{16} z^2 (6 - 35z^2 + 42z^4) \ln\left(\frac{z^2}{z^2 - 1}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{19 + 29z - 489z^2 - 495z^3 + 1680z^4 + 1680z^5 - 1260z^6 - 1260z^7}{32(z-1)(z+1)^2}, \\
k_{f1}(z) &= \frac{3}{64}(5 - 20z - 29z^2 + 60z^3) - \frac{3(3z+1)}{64\sqrt{4z+1}}(5 - 21z - 10z^2 + 40z^3) + \\
& + \frac{3}{32} \ln(z+1) + \frac{3}{32}(1 - 18z^2 + 30z^4) \ln\left(\frac{2z+1+\sqrt{4z+1}}{2(z+1)}\right), \\
k_{f2}(z) &= \frac{3(-5 + 3z + 30z^2 - 30z^3)}{32(z-1)} + \frac{3}{16} \ln\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{9}{16} z^2(3 - 5z^2) \ln\left(\frac{z^2}{z^2-1}\right).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hicks W.M.* On the motion of two spheres in a fluid // *Phil. Trans.* 1880. V. 171. P. 455–492.
2. *Basset A.B.* On the motion of two spheres in a liquid, and allied problems // *Proc. London Math. Soc.* 1886. V. 18. P. 369–377.
3. *Cunningham E.* On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium // *Proc. Roy. Soc. (London)*. 1910. Ser. A. V. 83. P. 357–365.
4. *Zuber N.* On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime // *Chem. Engng. Sci.* 1964. V. 19. P. 897–917.
5. *Wijngaarden L., Jeffrey D.J.* Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 77. Issue 1. P. 27–44.
6. *Felderhof B.U.* Virtual mass and drag in two-phase flow // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 225. P. 177–196.
7. *Струминский В.В., Гуськов О.Б., Корольков Г.А.* Гидродинамическое взаимодействие частиц в потенциальных потоках идеальной жидкости // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 290. № 4. С. 820–824.
8. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц в потоке невязкой жидкости // *Докл. АН*. 2011. Т. 438. № 5. С. 626–628.
9. *Гуськов О.Б., Бошенятов Б.В.* Взаимодействие фаз и присоединенная масса дисперсных частиц в потенциальных потоках жидкости // *Вестн. Нижегород. ун-та им. Лобачевского*. 2011. № 4–3. С. 740–741.
10. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе тела, движущегося в суспензии сферических частиц // *Докл. АН*. 2012. Т. 442. № 1. С. 50–53.
11. *Гуськов О.Б.* Присоединенная масса сферы в суспензии сферических частиц // *Прикл. матем. и механ.* 2012. Т. 76. Вып. 1. С. 134–139.
12. *Гуськов О.Б.* О движении кластера сферических частиц в идеальной жидкости // *Прикл. матем. и механ.* 2014. Т. 78. Вып. 2. С. 186–193.
13. *Гуськов О.Б.* Концепция самосогласованного поля применительно к динамике невязких суспензий // *Материалы X междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2014)*. 22–31 мая 2014 г. Алушта. М.: МАИ, 2014. С. 87–89.
14. *Гуськов О.Б.* О присоединенной массе шероховатой сферы // *Прикл. матем. и механ.* 2017. Т. 81. Вып. 4. С. 471–482.
15. *Zaripov S.K., Vanyunina M.V., Osiptsov A.N., Skvortsov E.V.* Calculation of concentration of aerosol particles around a slot sampler // *Atmospheric Environment*. 2007. V. 41. Issue 23. P. 4773–4780.
16. *Shuyan Wang, Jin Sun, Qian Yang, Yueqi Zhao, Jinsen Gao, Yang Liu.* Numerical simulation of flow behavior of particles in an inverse liquid–solid fluidized bed // *Powder Technology*. 2014. V. 261. P. 14–21.
17. *Shuai Wang, Huilin Lu, Qinghong Zhang, Guodong Liu, Feixiang Zhao, Liyan Sun.* Modeling of Bubble-Structure-Dependent Drag for Bubbling Fluidized Beds // *Ind. Engng. Chem. Res.* 2014. V. 53. Issue 40. P. 15776–15785.
18. *Shuyan Wang, Xiaoxue Jiang, Ruichen Wang, Xu Wang, Shanwen Yang, Jian Zhao, Yang Liu.* Numerical simulation of flow behavior of particles in a liquid–solid stirred vessel with baffles // *Advanced Powder Technology*. 2017. V. 28. P. 1611–1624.
19. *Wen-rui Wang, Zhao Li, Jia-ming Zhang, Han-lin Li.* Simulation study of particle–fluid two-phase coupling flow field and its influencing factors of crystallization process // *Chemical Papers*. 2018. V. 72. Issue 12. P. 3105–3117.
20. *Beek P. van.* A counterpart of Faxen’s formula in potential flow // *Int. J. Multiphase Flow*. 1985. V. 11. № 6. P. 873–879.
21. *Batchelor G.K.* Sedimentation in a dilute dispersion of spheres // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 52. Pt. 2. P. 245–268.
22. *Beenakker C.W.J., Mazur P.* Is sedimentation container-shape dependent? // *Phys. Fluids*. 1985. V. 28. No. 11. P. 3203–3206.

23. Гуськов О.Б., Золотов А.В. Об осаждении суспензии сферических частиц в цилиндре // Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 968–972.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
25. Бошнятов Б.В. К теории электро- и теплопроводности пузырьковых газожидкостных сред // Докл. АН. 2014. Т. 459. № 6. С. 693–695.
26. Boshenyatov B.V. The contribution of interactions of spherical inclusions into electrical and thermal conductivity of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. 2016. V. 7. № 2. С. 95–104.
27. Бошнятов Б.В. Роль взаимодействия частиц в кластерной модели теплопроводности наножидкости // Письма в ЖТФ. 2018. Т. 44. Вып. 3. С. 17–24.