ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.61

О ВЫЧИСЛЕНИИ *T*-КОНГРУЭНТНОГО ЦЕНТРАЛИЗАТОРА

Х. Д. Икрамов

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 10.02.2020 г.
Переработанный вариант 24.07.2020 г.
Принята к публикации 16.09.2020 г.

Пусть A – комплексная $n \times n$-матрица. Множество $\mathcal{L}$ матриц X, удовлетворяющих соотношению $X^T AX = A$, называется T-конгруэнтным централизатором матрицы A. Показано, что вычисление матриц из нелинейного многообразия $\mathcal{L}$ можно свести к решению линейного матричного уравнения. Библ. 3.

Ключевые слова: *-конгруэнция, T-конгруэнция, T-конгруэнтный централизатор, дробно-линейная функция, матричное уравнение типа Сильвестра.

DOI: 10.31857/S0044466921030108

1. В пространстве $M_n(\mathbf{C})$ комплексных $n \times n$-матриц рассматриваются два типа конгруэнтных преобразований: T-конгруэнции как преобразования вида

$$A \to P^\top AP$$

и *-конгруэнции

$$A \to P^* AP.$$

В обоих случаях P – произвольная невырожденная матрица. В этой статье речь пойдет о преобразованиях первого типа.

Множество $\mathcal{L}$ матриц X, удовлетворяющих соотношению

$$X^\top AX = A, \tag{1}$$

мы называем T-конгруэнтным централизатором матрицы A по той причине, что оно есть аналог классического централизатора в том случае, когда группа $GL_n(\mathbf{C})$ действует на пространстве $M_n(\mathbf{C})$ конгруэнциями вместо подобий.

Хорошо известно, как вычисляется обычный централизатор, задаваемый линейным условием коммутирования с матрицей A. Напротив, решение квадратичного уравнения (1) представляет собой непростую задачу, решенную до конца лишь для небольшого числа матриц A. Нелегко даже просто определить размерность многообразия (1).

Цель настоящей заметки – показать, что вычисление матриц из $\mathcal{L}$, спектр которых не содержит хотя бы одного из чисел 1 и –1, можно свести к решению линейного матричного уравнения. Как это делается, показано в п. 2. В п. 3 описанный прием редукции применяется к некоторым конкретным матрицам A.

2. Найдем дробно-линейные функции

$$\phi(\lambda) = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

такие, что

$$\phi(\lambda) = -\phi(\lambda^{-1}), \tag{2}$$

т.е.

$$\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} = -\frac{b\lambda + a}{d\lambda + c}.(3) \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что равенство (3) невозможно, если хотя бы один из коэффициентов a, b, c, d равен нулю. Оно эквивалентно соотношениям

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = -\frac{c}{d} = -\frac{d}{c}$$

или

$$a^2 = b^2, \quad c^2 = d^2, \quad ac = -bd, \quad ad = -bc.$$

Варианты $a = b$, $c = d$ и $a = -b$, $c = -d$ соответствуют несовместным системам. Поэтому (3) имеет два семейства решений: функции вида

$$\phi_C(\lambda) = C\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \tag{4}$$

получающиеся при выборе $a = b, c = -d$, и функции

$$\psi_D(\lambda) = D\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \tag{5}$$

отвечающие выбору $a = -b$, $c = d$. Здесь C и D – произвольные ненулевые константы.

3. Очевидно, что невырожденные решения уравнения (1) образуют мультипликативную группу. Если X – такое решение, то (1) можно переписать в виде

$$X^\top A = AX^{-1}. \tag{6}$$

При любом натуральном k матрица X^k также является решением (1), а потому

$$(X^k)^\top A = A(X^{-1})^k. \tag{7}$$

Рассматривая произвольную линейную комбинацию соотношений (7) для одной и той же матрицы X, заключаем, что

$$[f(X)]^\top A = Af(X^{-1}) \tag{8}$$

для всякого многочлена f от матрицы X. Для любой аналитической функции f, определенной на спектре матрицы X, матрица $f(X)$ может интерпретироваться как многочлен от X; поэтому равенство (8) имеет место и для всех таких функций.

Выберем многочлен f для формулы (8) так, чтобы матрица $f(X)$ совпала с $\phi(X) \equiv \phi_1(X)$, где $\phi_1(\lambda)$ – функция из семейства (4). Тогда

$$[\phi(X)]^\top A = A\phi(X^{-1}).$$

Согласно (2),

$$\phi(X^{-1}) = -\phi(X).$$

Полагая

$$Y = \phi(X) = (X + I)(X - I)^{-1}, \tag{9}$$

видим, что матрица Y есть решение однородного матричного уравнения типа Сильвестра:

$$AY + Y^\top A = 0. \tag{10}$$

При этом она не может иметь собственного значения 1.

Напротив, пусть Y – произвольное решение уравнения (1), не имеющее собственного значения 1. Для такой матрицы Y формула (9) допускает обращение

$$X = (Y + I)(Y - I)^{-1} = \phi(Y).$$

Эта матрица X принадлежит T-конгруэнтному централизатору $\mathcal{L}$.

Если спектр матрицы $X \in C_A$ содержит 1, но не содержит –1, то функцию $\varphi_1(\lambda)$ в проведенных рассуждениях нужно заменить функцией $\psi_1(\lambda)$ (см. (5)).

Замечание 1. Идея приема, использованного в данном пункте, заимствована автором в книге Веддерберна “Лекции о матрицах” (см. [1]). Рецензент этой статьи указал, что хорошо известное дробно-рациональное преобразование типа (9), обсуждаемое в обзоре [2] и цитируемых там работах, позволяет значительно более простой и изящный переход от уравнения (1) к уравнению (10). Несложно проверить, что для любых квадратных матриц A и X справедливо равенство

$$(X^\top - I)A(X + I) + (X^\top + I)A(X - I) = 2(X^\top AX - A).$$

Если X — матрица из T-конгруэнтного централизатора $\mathcal{L}$, то правая часть этого равенства обращается в нуль. Тем самым, для такой матрицы X имеем

$$(X^\top - I)A(X + I) + (X^\top + I)A(X - I) = 0.$$

Умножая полученное соотношение слева на матрицу, обратную к $X^\top - I$, и справа на матрицу, обратную к $X - I$, находим

$$A(X + I)(X - I)^{-1} + (X^\top - I)^{-1}(X^\top + I)A = 0.$$

Учитывая (9), это и есть равенство (10).

Дополнительное достоинство этого рассуждения состоит в том, что оно не требует невырожденности от матрицы X.

4. Полное описание решений уравнения (10) для некоторых матриц A дано в [3]. Уравнение $ZA + AZ^{\mathrm{T}} = 0$, рассматриваемое в этой статье, переходит в наше уравнение (10), если положить $Z = Y^{\mathrm{T}}$.

Пусть A есть жорданова клетка $J_n(0)$ с нулем на главной диагонали. Вид решений Y уравнения (10) зависит от четности числа n. Покажем, например, как выглядят матрицы Y для четного $n = 2m$:

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & -y_3 & 0 & \cdots & -y_m & 0 \\ 0 & -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & 0 & -y_2 & 0 & \cdots & -y_{m-1} & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & \cdots & -y_{m-2} & 0 \\ 0 & y_3 & 0 & y_2 & 0 & -y_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & y_m & 0 & y_{m-1} & 0 & y_{m-2} & \cdots & 0 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что размерность пространства решений уравнения (10) равна $m = \frac{n}{2}$. Такова же (нелинейная) размерность T-конгруэнтного централизатора $\mathcal{L}$. При нечетном $n = 2m + 1$ обе размерности равны числу $m + 1$.

Положим теперь

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & & (-1)^{n+1} \\ & & & & & \cdots & (-1)^n \\ & & & & \cdots & \cdots & \\ & & & -1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & -1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

При любом n решения Y уравнения (10), соответствующего такой матрице A, являются верхнетреугольными тёплицевыми матрицами. Размерность пространства решений всегда равна $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Покажем, как выглядят матрицы Y для нечетного $n = 2m+1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & y_1 & 0 & y_2 & 0 & y_3 & \cdots & y_m & 0 \\ & 0 & y_1 & 0 & y_2 & 0 & \cdots & 0 & y_m \\ & & 0 & y_1 & 0 & y_2 & \cdots & y_{m-1} & 0 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & 0 & y_1 & 0 \\ & & & & & & 0 & y_1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Выбор именно таких матриц A, т.е. $J_n(0)$ и матрицы (11), обозначаемой в [3] как Γ_n, объясняется следующим обстоятельством. Каноническая форма произвольной $n \times n$-матрицы относительно T-конгруэнций есть прямая сумма блоков трех типов. Матрицы $J_k(0)$ и Γ_k (при различных порядках k) представляют два из этих типов.

В заключение я хотел бы поблагодарить рецензента первоначального варианта этой статьи за очень полезные замечания, в частности, на указание, что аналогичные приемы могут быть использованы для сведения квадратных и полуторалинейных матричных уравнений типа (1) к линейным и полулинейным уравнениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wedderburn J.H.M.* Lectures on Matrices. AMS, Providence, 1934.
2. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Review. 2016. V. 58. № 3. P. 377–441.
3. *De Terán F., Dopico F.M.* The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its application to the theory of orbits // Linear Algebra Appl. 2011. V. 434. P. 44–67.