ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 3, с. 413–427

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ В ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ L_∞[1)]

В. Л. Камынин

115409 Москва, Каширское шоссе, 31, Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Россия

e-mail: vlkamynin2008@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.
Переработанный вариант 17.09.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Доказаны теоремы существования и единственности решений обратных задач определения зависящего от времени коэффициента поглощения в вырождающемся параболическом уравнении с двумя независимыми переменными. В качестве дополнительного условия задается условие интегрального наблюдения. Неизвестный коэффициент поглощения ищется в классе ограниченных на $[0, T]$ функций. Приведены примеры обратных задач, для которых выполняются условия доказанных в работе теорем. Библ. 24.

Ключевые слова: обратные задачи, условие интегрального наблюдения, вырождающиеся параболические уравнения с недивергентной главной частью.

DOI: 10.31857/S004446692103011X

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются вопросы однозначной разрешимости обратных задач определения коэффициента $\gamma(t)$ в параболическом уравнении

$$u_t - a(t,x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x)u + \gamma(t)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1.1}$$

с начальным и граничными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

и дополнительным условием интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1.4}$$

Здесь $Q = [0,T] \times [0,l]$, T, l – некоторые числа, $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$, $\omega(x)$, $\varphi(t)$ – известные функции.

Обратная задача (1.1)–(1.4) рассматривается в двух вариантах постановки.

Постановка 1. Неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ ищется в классе функций из $L_\infty(0,T)$.

Постановка 2. Неизвестный коэффициент $\gamma(t)$ ищется в классе неотрицательных функций из $L_\infty(0,T)$.

Особенностью рассматриваемых постановок обратных задач является предположение о том, что уравнение (1.1) является вырожденным, а именно, выполнены условия

$$0 \le a(t,x) \le a_1, \quad 1/a(t,x) \in L_q(Q), \quad q > 1. \tag{1.5}$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности НИЯУ МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

Для случая равномерно параболических уравнений обратные задачи восстановления коэффициента поглощения с интегральным наблюдением вида (1.4) рассматривались при различных предположениях и для различных видов параболических уравнений (второго и высокого порядка, с дивергентной и недивергентной главной частью) в работах ряда авторов (см., например, [1]–[6] и др.). Отметим также работы [7]–[9] и др., где изучались обратные задачи определения младшего коэффициента в невырождающихся параболических уравнениях с другими, нежели (1.4), дополнительными условиями.

Ранее автором при предположении (1.5) и дополнительном условии (1.4) были исследованы обратные задачи восстановления зависящего от t источника в правой части вырождающегося параболического уравнения вида (1.1) (см. [10], [11]). Отметим еще работу [12], где при предположении типа (1.5) была рассмотрена обратная задача определения неизвестного, но зависящего от x источника в правой части неравномерно параболического уравнения. Наконец, в недавней работе [13] была рассмотрена обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении (1.1) с условием интегрального наблюдения (1.4), но в случае, когда старший коэффициент уравнения (1.1) сильно вырождается при $x = 0$: вместо условия (1.5) предполагается, что $a(t,x) \sim a_0x^{\alpha}$, $x \to 0$, $\alpha = \text{const} \geq 2$.

Отметим, что изучение как прямых, так и обратных задач для вырождающихся параболических уравнений имеет важные применения в различных прикладных задачах гидродинамики, климатологии, задачах изучения пористых сред, а также в финансовой математике (см., например, [14], [15] и дальнейшие ссылки в [14]). В связи с этим укажем еще работы [16]–[21] и др., где также рассматривались обратные задачи для вырождающихся параболических уравнений, но в постановках, отличных от представленных в данной работе.

Перейдем к точным формулировкам.

Все равенства и неравенства предполагаются выполненными почти всюду, все рассматриваемые в работе функции предполагаются, как минимум, измеримыми, производные понимаются в обобщенном смысле по Соболеву.

Используемые в работе пространства Лебега и Соболева с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [22], [23]). При этом для удобства будем использовать обозначения нормы: $\|\cdot\|_{L_2(0,l)} \equiv \|\cdot\|_2$.

Через $C^{0,\alpha}(Q)$, $\alpha = \text{const} \in (0,1)$, будем обозначать пространство Гёльдера непрерывных в Q функций, имеющих конечную норму

$$|u|_{C^{0,\alpha}(Q)} = \max_Q |u(t,x)| + \sup_{\substack{(t_1,x_1),(t_2,x_2)\in Q\\ (t_1,x_1)\neq(t_2,x_2)}} \frac{|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\alpha} + |t_1 - t_2|^{\alpha/2}}.$$

Положим

$$Q_\tau = [0,\tau]\times[0,l], \quad \tau \in (0,T], \quad Q_T \equiv Q; \quad L_\infty^+(0,T) = \{z(t) \in L_\infty(0,T) : z(t) \geq 0\},$$

$$B_R = \{z(t) \in L_\infty(0,T) : \|z\|_{L\infty(0,T)} \leq R\}, \quad B_R^+ = \{z(t) \in L_\infty^+(0,T) : \|z\|_{L\infty(0,T)} \leq R\}.$$

Нам понадобятся хорошо известные неравенства: арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.6}$$

а также неравенство Пуанкаре–Стеклова, которое при $n = 1$ может быть записано в виде

$$\|z\|_2 \leq \frac{l}{\pi}\|z_x\|_2, \quad z \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l). \tag{1.7}$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1.1)–(1.4), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

$$0 \leq a(t,x) \leq a_1, \quad (t,x) \in Q; \quad 1/a(t,x) \in L_q(Q), \quad q > 1, \quad \|1/a\|_{L_q(Q)} \leq a_2;$$

$$a_x(t,x), a_x^2(t,x)/a(t,x) \in L_\infty(Q), \quad \|a_x^2/a\|_{L_\infty(Q)} \leq K_a^*; \tag{A}$$

$$b^2(t,x)/a(t,x), c^2(t,x)/a(t,x) \in L_\infty(Q), \quad \left\|b^2/a\right\|_{L_\infty(Q)} \le K_{b,a}, \quad \left\|c^2/a\right\|_{L_\infty(Q)} \le K_{c,a}; \qquad (B)$$

$$u_0(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \quad \|u_0'\|_2 \le M_1; \qquad (C)$$

$$f^2(t,x)/a(t,x) \in L_1(Q), \quad \left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)} \le K_{f,a}; \qquad (D)$$

$$\omega(x) \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,l), \quad |\omega(x)| \le K_\omega, \quad x \in [0,l], \quad \|\omega\|_2 \le K_\omega^*; \qquad (E)$$

$$\varphi(t) \in W_\infty^1(0,T), \quad |\varphi(t)| \le K_\varphi, \quad |\varphi'(t)| \le K_\varphi^*, \quad |\varphi(t)| \ge \varphi_0 > 0, \quad t \in [0,T]; \qquad (F)$$

$$\varphi(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx; \qquad (G)$$

здесь $a_1, a_2, K_\omega, K_\omega^*, K_\varphi, \varphi_0 = \text{const} > 0$, $K_a^*, K_{b,a}, K_{c,a}, K_{f,a}, K_\phi^* = \text{const} \ge 0$.

Замечание 1.1. Из условий (A) и (B) следует, что $b(t,x), c(t,x) \in L_\infty(Q)$, причем

$$\|b\|_{L_\infty(Q)} \le K_b \equiv \sqrt{a_1 \cdot K_{b,a}}, \quad \|c\|_{L_\infty(Q)} \le K_c \equiv \sqrt{a_1 \cdot K_{c,a}}. \qquad (1.8)$$

Как было отмечено выше, обратная задача (1.1)–(1.4) рассматривается в двух постановках.

Обратная задача 1 (ОЗ.1).

Определение 1.1. Обобщенным решением задачи (ОЗ.1) будем называть пару функций $\{u(t,x), \gamma(t)\}$ таких, что

$$u(t,x) \in L_\infty(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0,1), \quad \gamma(t) \in L_\infty(0,T),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1.1) п.в. в Q, а функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) в классическом смысле.

Обратная задача 2 (ОЗ.2).

Определение 1.2. Обобщенным решением задачи (ОЗ.2) будем называть пару функций $\{u(t,x), \gamma(t)\}$ таких, что

$$u(t,x) \in L_\infty(0,T; \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)) \cap W_s^{1,2}(Q) \cap C^{0,\alpha}(Q), \quad s > 1, \quad \alpha \in (0,1), \quad \gamma(t) \in L_\infty^+(0,T),$$

эти функции удовлетворяют уравнению (1.1) п.в. в Q, а функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (1.2)–(1.4) в классическом смысле.

Структура работы следующая. В разд. 3 и 4 доказываются теоремы существования и единственности решений задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2) соответственно. Эти результаты базируются на доказательстве однозначной разрешимости прямой задачи (1.1)–(1.3) (функция $\gamma(t)$ в уравнении (1.1) предполагается известной) и явно выписанных оценках решения этой задачи. Соответствующие результаты получены в разд. 2. Наконец, в разд. 5 проводится обсуждение полученных результатов и приводятся примеры обратных задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2), для которых справедливы доказанные в разд. 3 и 4 теоремы.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямую задачу (1.1)–(1.3). Будем предполагать, что коэффициент $\gamma(t) \in L_\infty(0,T)$ известен и

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0,T)} \le K_\gamma. \qquad (2.1)$$

Решение $u(t,x)$ прямой задачи (1.1)–(1.3) будем понимать в смысле определения 1.1.

Докажем теоремы существования и единственности решения задачи (1.1)–(1.3), при этом воспользуемся идеями доказательства аналогичных теорем из работы [12].

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (A)–(D) *и* (2.1). *Тогда обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $u^{(1)}(t,x)$ и $u^{(2)}(t,x)$ этой задачи. Положим $v(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$. Тогда функция $v(t,x)$ является решением уравнения

$$v_t - a(t,x)v_{xx} + \sqrt{a(t,x)}\frac{b(t,x)}{a(t,x)}v_x + c(t,x)v + \gamma(t)v = 0, \tag{2.2}$$

с однородными краевыми условиями

$$v(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \quad v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.3}$$

Умножим уравнение (2.2) на $e^{-\lambda t}v$ (где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже) и проинтегрируем получившееся равенство по Q. Учитывая условие (2.3), после интегрирования по частям приходим к неравенству

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int_0^l v^2(T,x)dx + \frac{\lambda}{2}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt + \int_Q e^{-\lambda t}av_x^2dxdt \le \int_Q (e^{-\lambda t/2}|\sqrt{a}v_x|)\left(e^{-\lambda t/2}\left|\frac{a_x}{\sqrt{a}}v\right|\right)dxdt +$$
$$+ \int_Q (e^{-\lambda t/2}|\sqrt{a}v_x|)\left(e^{-\lambda t/2}\left|\frac{b}{\sqrt{a}}v\right|\right)dxdt + \int_Q e^{-\lambda t}|c|v^2dxdt + \int_Q e^{-\lambda t}|\gamma|v^2dxdt.$$

Для оценки первых двух слагаемых в правой части этого неравенства применим неравенство (1.6), относя $\varepsilon = 1/2$ к множителям $e^{-\lambda t/2}|\sqrt{a}v_x|$. Тогда приходим к соотношению

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int_0^l v^2(T,x)dx + \frac{\lambda}{2}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{-\lambda t}av_x^2dxdt \le \int_Q e^{-\lambda t}\left(\frac{a_x^2}{a} + \frac{b^2}{a} + |c| + |\gamma|\right)v^2dxdt,$$

откуда с учетом условий (A), (B), (2.1) и (1.8) получим неравенство

$$\lambda\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt \le C\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt,$$

где $C = \text{const} > 0$ не зависит от λ.

Выбирая $\lambda > C$, получаем, что $\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt \le 0$, откуда следует, что $v(t,x) = 0$ в Q, т.е. $u^{(1)}(t,x) = u^{(2)}(t,x)$. Теорема доказана.

Теперь докажем теорему существования обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) и установим ряд оценок для такого решения, которые будут использованы в следующих разделах при исследовании обратных задач (ОЗ.1) и (ОЗ.2). В этих оценках через C с индексом будем обозначать положительные константы, зависящие только от l, T, a_1, a_2, K_a^*, $K_{b,a}$, $K_{c,a}$, K_γ, $K_{f,a}$ и M_1.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (A)–(D) *и* (2.1). *Положим*

$$q^* = \frac{2q}{q+1}, \quad \lambda_1 \equiv \lambda_1(\gamma) = 3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a} + K_\gamma. \tag{2.4}$$

Тогда существует обобщенное решение $u(t,x)$ *прямой задачи* (1.1)–(1.3) *при* $s = q^*$ *и выполнены оценки*

$$\sup_{0\le t\le T}\|u_x(t,\cdot)\|_2^2 \le e^{\lambda_1 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right), \tag{2.5}$$

$$\left\|au_{xx}^2\right\|_{L_1(Q)}^2 \le e^{\lambda_1 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right), \tag{2.6}$$

$$\|u_{xx}\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \le a_2e^{\lambda_1 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right), \tag{2.7}$$

$$\|u_t\|_{L_2(Q)}^2 \le C_1, \tag{2.8}$$

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \le C_2|x_1 - x_2|^{1/2} + C_3|t_1 - t_2|^{1/6}, \quad (t_1,x_1),(t_2,x_2) \in Q. \tag{2.9}$$

Доказательство. Используем схему доказательства теоремы 2.2 из [13]. Положим $a_n(t,x) = a(t,x) + 1/n$, $n = 1,2,\ldots$, $h = 1/n$ и введем средние функции $(b/\sqrt{a})^h$, $(c/\sqrt{a})^h$, $(f/\sqrt{a})^h$ для функций $b/\sqrt{a}$, $c/\sqrt{a}$, $f/\sqrt{a}$ соответственно (продолжив предварительно эти функции вне Q, например, нулем).

Отметим, что из известных свойств средних функций и предположений (B), (D) следует, что

$$\left\|(b/\sqrt{a})^h\right\|_{L_\infty(Q)} \le \left\|b/\sqrt{a}\right\|_{L_\infty(Q)} \le \sqrt{K_{b,a}}, \quad \left\|(c/\sqrt{a})^h\right\|_{L_\infty(Q)} \le \left\|c/\sqrt{a}\right\|_{L_\infty(Q)} \le \sqrt{K_{c,a}},$$
$$\left\|(f/\sqrt{a})^h\right\|_{L_2(Q)} \le \left\|f/\sqrt{a}\right\|_{L_2(Q)} \le \sqrt{K_{f,a}}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим в Q первую краевую задачу для уравнения

$$u_t^n - a_n u_{xx}^n + \sqrt{a_n}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u_x^n + \sqrt{a_n}\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n + \gamma(t)u^n = \sqrt{a_n}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h \tag{2.11}$$

с краевыми условиями

$$u^n(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l], \quad u^n(t,0) = u^n(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.11) является равномерно параболическим, поэтому в силу [22] первая краевая задача (2.11), (2.12) имеет единственное решение $u^n(t,x) \in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)) \cap W_2^{1,2}(Q)$.

Выведем для $u^n(t,x)$ ряд равномерных по n оценок. Для этого умножим уравнение (2.11) на $-e^{-\lambda_1 t}u_{xx}^n$, где λ_1 определена в (2.4), и проинтегрируем результат по Q_τ, $0 < \tau \le T$. В результате после интегрирования по частям получим соотношение

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{-\lambda_1\tau}\int_0^l \left|u_x^n(\tau,x)\right|^2 dx + \frac{\lambda_1}{2}\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}\left|u_x^n\right|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}a_n\left|u_{xx}^n\right|^2 dxdt = \frac{1}{2}\|u_0'\|_2^2 + \int_{Q_\tau}[e^{-\lambda_1 t/2}\sqrt{a_n}u_{xx}^n]\times\\ \times\left[e^{-\lambda_1 t/2}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u_x^n\right]dxdt + \int_{Q_\tau}[e^{-\lambda_1 t/2}\sqrt{a_n}u_{xx}^n]\left[e^{-\lambda_1 t/2}\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n\right]dxdt -\\ - \int_{Q_\tau} e^{\lambda_1 t}\gamma(t)\left|u_x^n\right|^2 dxdt + \int_{Q_\tau}[e^{-\lambda_1 t/2}\sqrt{a_n}u_{xx}^n]\left[e^{-\lambda_1 t/2}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h\right]dxdt.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Для оценки второго, третьего и пятого слагаемых в правой части соотношения (2.13) применим неравенство (1.6), относя множитель $\varepsilon = 1/3$ к слагаемым $\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}a_n\left|u_{xx}^n\right|^2 dxdt$. В результате с учетом условий (B), (2.1), оценок (2.10) и неравенства Пуанкаре–Стеклова (1.7) находим, что

$$\begin{aligned}e^{-\lambda_1\tau}\left\|u_x^n(\tau,\cdot)\right\|_2^2 + \lambda_1\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}\left|u_x^n\right|^2 dxdt + \int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}a_n\left|u_{xx}^n\right|^2 dxdt \le\\ \le \|u_0'\|_2^2 + \left(3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a} + K_\gamma\right)\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}|u_x^n|^2 dxdt + 3\int_{Q_\tau} e^{-\lambda_1 t}\left|\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Принимая во внимание определение λ_1 в (2.4) и оценку (2.10), из (2.14) получаем равномерную по n оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|u_x^n(t,\cdot)\right\|_2^2 + \left\|\sqrt{a_n}u_{xx}^n\right\|_{L_2(Q)}^2 \le e^{\lambda_1 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right). \tag{2.15}$$

В силу неравенства Гёльдера с учетом определения q^* в (2.4) и условия (A), получаем (подробнее см. [11]):

$$\left\|u_{xx}^n\right\|_{L_{q^*}(Q)}^2 = \left(\int_Q\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{q^*}\left|\sqrt{a_n}u_{xx}^n\right|^{q^*} dxdt\right)^{2/q^*} \le \|1/a_n\|_{L_q(Q)}\int_Q a_n\left|u_{xx}^n\right|^2 dxdt \le a_2\left\|\sqrt{a_n}u_{xx}^n\right\|_{L_2(Q)}^2,$$

откуда в силу (2.15) получаем оценку

$$\left\|u_{xx}^n\right\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \le a_2 e^{\lambda_1 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right). \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.11) имеем

$$u_t^n = a_n(t,x)u_{xx}^n - \sqrt{a_n}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u_x^n - \sqrt{a_n}\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n - \gamma(t)u^n + \sqrt{a_n}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h,$$

а тогда, применяя уже доказанную оценку (2.15), условия (A)–(D), (2.1) и оценки (2.10), получаем оценку

$$\left\|u_t^n\right\|_{L_2(Q)}^2 \le C_1, \tag{2.17}$$

где константа $C_1 > 0$ не зависит от n.

На основании оценок (2.15), (2.17) и оценки (2.9) из [23, с. 79] получаем равномерную по n оценку

$$\left|u^n(t_2,x_2) - u^n(t_1,x_1)\right| \le C_2\left|x_2 - x_1\right|^{1/2} + C_3\left|t_2 - t_1\right|^{1/6}, \tag{2.18}$$

где $C_2, C_3 > 0$ не зависят от n. Подробное доказательство приведено в [13], теорема 2.2.

В силу оценок (2.15)–(2.18) найдутся подпоследовательность $n_k \to \infty$, $k \to \infty$, а также функция $u(t,x) \in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)) \cap W_{q^*}^{1,2}(Q) \cap C^{0,1/3}(Q)$, такие, что при $k \to \infty$

$$u^{n_k}(t,x) \rightrightarrows u(t,x) \quad \text{равномерно на } Q, \tag{2.19}$$

$$u_x^{n_k}(t,x) \to u_x(t,x) \quad \text{в норме } L_{q^*}(Q) \text{ и } *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_2(0,l)), \tag{2.20}$$

$$u_t^{n_k}(t,x) \rightharpoonup u_t(t,x) \quad \text{слабо в } L_2(Q). \tag{2.21}$$

$$u_{xx}^{n_k}(t,x) \rightharpoonup u_{xx}(t,x) \quad \text{слабо в } L_{q^*}(Q). \tag{2.22}$$

Пусть $\psi(t,x) \in C^\infty(Q)$ – пробная функция, $h_k = 1/n_k$. Тогда в силу (2.11) справедливо интегральное тождество

$$\int_Q\left[u_t^{n_k} - a_{n_k}u_{xx}^{n_k} + \sqrt{a_{n_k}}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^{h_k}u_x^{n_k} + \sqrt{a_{n_k}}\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^{h_k}u^{n_k} + \gamma(t)u^{n_k} - \sqrt{a_{n_k}}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^{h_k}\right]\psi dxdt = 0.$$

В силу соотношений (2.19)–(2.22) в этом интегральном тождестве можно перейти к пределу при $k \to \infty$. В результате получим, что $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) п.в. в Q.

На основании оценок (2.15)–(2.18) и условий (2.19)–(2.22) получаем, что для $u(t,x)$ справедливы оценки (2.5)–(2.9). Кроме того, в силу (2.19) функция $u(t,x)$ удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3).

Таким образом, $u(t,x)$ – обобщенное решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Теорема 2.2 доказана.

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2.2 дополнительно известно, что $\gamma(t) \ge 0$. Положим

$$\lambda_2 = 3K_{b,a} + 3\frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a}. \tag{2.23}$$

Тогда решение $u(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет оценкам

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|u_x(t,\cdot)\right\|_2^2 \le e^{\lambda_2 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right), \tag{2.24}$$

$$\left\|au_{xx}^2\right\|_{L_1(Q)}^2 \le e^{\lambda_2 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right), \tag{2.25}$$

$$\left\|u_{xx}\right\|_{L_{q^*}(Q)}^2 \le a_2 e^{\lambda_2 T}\left(M_1^2 + 3\left\|f^2/a\right\|_{L_1(Q)}\right). \tag{2.26}$$

Доказательство. Будем проводить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2.2, но вместо умножения уравнения (2.11) на $-e^{-\lambda_1 t}u^n_{xx}$ умножим его на $-e^{-\lambda_2 t}u^n_{xx}$. Поскольку $\gamma(t) \geq 0$, то

$$\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_2 t}\gamma(t)\left|u^n_x\right|^2 dxdt \geq 0.$$

Поэтому вместо соотношения (2.13) мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda_2\tau}\int\limits_0^l\left|u^n_x(\tau,x)\right|^2 dx + \frac{\lambda_2}{2}\int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_2 t}\left|u^n_x\right|^2 dxdt + \int\limits_{Q_\tau} e^{-\lambda_2 t}a_n\left|u^n_{xx}\right|^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\|u_0'\|_2^2 + \int\limits_{Q_\tau}[e^{-\lambda_2 t/2}\sqrt{a_n}u^n_{xx}]\times$$
$$\times\left[e^{-\lambda_2 t/2}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^h u^n_x\right]dxdt + \int\limits_{Q_\tau}[e^{-\lambda_2 t/2}\sqrt{a_n}u^n_{xx}]\left[e^{-\lambda_2 t/2}\left(\frac{c}{\sqrt{a}}\right)^h u^n\right]dxdt + \int\limits_{Q_\tau}[e^{-\lambda_2 t/2}\sqrt{a_n}u^n_{xx}]\left[e^{-\lambda_2 t/2}\left(\frac{f}{\sqrt{a}}\right)^h\right]dxdt.$$

Далее дословно повторяем доказательство теоремы 2.2 и получаем, что решение $u(t,x)$ задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет оценкам (2.24)–(2.26), которые отличаются от оценок (2.5)–(2.7) заменой λ_1 на λ_2.

Замечание 2.1. Величина λ_2, в отличие от λ_1, не зависит от γ.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ОЗ.1)

В данном разделе в дополнение к условиям (A)–(G) будем предполагать, что

$$f(t,x) \in L_\infty(0,T;L_1(0,l)), \quad \|f\|_{L_\infty(0,T;L_1(0,l))} \leq K_f. \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$K_{\omega,a} = \sqrt{K_a^* a_1}K_\omega, \quad K_{\omega,b} = \sqrt{K_{b,a}a_1}K_\omega, \quad K_{\omega,c} = \sqrt{K_{c,a}a_1}K_\omega, \quad F(t) = \int\limits_0^l f(t,x)\omega(x)dx, \tag{3.2}$$

где K_ω из (E), K_a^*, a_1 из (A), $K_{b,a}$, $K_{c,a}$ из (B).

Рассмотрим обратную задачу (ОЗ.1) и выведем операторное уравнение для нахождения неизвестной функции $\gamma(t) \in L_\infty(0,T)$. Для этого умножим уравнение (1.1) на $\omega(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,l]$. Учитывая условие наблюдения (1.4) и предположения (A), (E), (F), после интегрирования по частям получим равенство

$$\gamma(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\left[F(t) - \varphi'(t) - \int\limits_0^l((a\omega)_x + b\omega)u_x dx - \int\limits_0^l c\omega u dx\right]. \tag{3.3}$$

Введем оператор $\mathscr{A}: L_\infty(0,T) \to L_\infty(0,T)$ по формуле

$$\mathscr{A}(\gamma)(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\left[F(t) - \varphi'(t) - \int\limits_0^l((a\omega)_x + b\omega)u_x dx - \int\limits_0^l c\omega u dx\right], \tag{3.4}$$

где $\gamma(t)$ – произвольная функция из $L_\infty(0,T)$, а $u(t,x) \equiv u(t,x;\gamma)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с данной $\gamma(t)$ в уравнении (1.1). Такое решение существует и единственно в силу теорем 2.1 и 2.2 из предыдущего раздела.

Тогда соотношение (3.3) может быть записано в виде

$$\gamma = \mathscr{A}(\gamma). \tag{3.5}$$

Замечание 3.1. В силу условий (A)–(F), (3.1) и теорем 2.1, 2.2 оператор $\mathscr{A}$ определен корректно и действует из $L_\infty(0,T)$ в $L_\infty(0,T)$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (A)–(G) *и* (3.1). *Тогда операторное уравнение* (3.5) *эквивалентно обратной задаче* (*ОЗ.1*) *в следующем смысле. Если пара* $\{u(t,x),\gamma(t)\}$ *является решением обратной задачи, то* $\gamma(t)$ *удовлетворяет соотношению* (3.5). *Обратно, если* $\gamma^*(t) \in L_\infty(0,T)$ *является решением операторного уравнения* (3.5), *а* $u^*(t,x)$ *– решение прямой задачи* (1.1)–(1.3) *с данной* $\gamma^*(t)$ *в уравнении* (1.1), *то пара* $\{u^*(t,x),\gamma^*(t)\}$ *является обобщенным решением обратной задачи* (*ОЗ.1*).

Доказательство. Первое утверждение леммы доказано выше при выводе соотношения (3.3).

Докажем второе утверждение. Пусть $\gamma^*(t) \in L_\infty(0,T)$ является решением уравнения (3.5). Рассмотрим функцию $u^*(t,x)$ как единственное обобщенное решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с выбранной функцией $\gamma(t) \equiv \gamma^*(t)$ в уравнении (1.1). Положим

$$\varphi^*(t) = \int_0^l u^*(t,x)\omega(x)dx. \tag{3.6}$$

Тогда $\varphi^*(t) \in W_2^1(0,T)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше при выводе (3.3) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(t) \in W_2^1(0,T)$), приходим к соотношению

$$\gamma^*(t)\varphi^*(t) = F(t) - \varphi^{*\prime}(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega)u_x^* dx - \int_0^l c\omega u^* dx. \tag{3.7}$$

Поскольку $\gamma^*(t)$ – решение уравнения (3.5), то в силу определения оператора $\mathcal{A}$ в (3.4), получаем, что справедливо также соотношение

$$\gamma^*(t)\varphi(t) = F(t) - \varphi'(t) - \int_0^l ((a\omega)_x + b\omega)u_x^* dx - \int_0^l c\omega u^* dx. \tag{3.8}$$

Вычитая (3.8) из (3.7), получаем, что

$$\gamma^*(t)(\varphi - \varphi^*) + (\varphi - \varphi^*)' = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

В силу определения $\varphi^*(t)$ в (3.6) и условия (G) имеем

$$\varphi^*(0) = \int_0^l u_0(x)\omega(x)dx = \varphi(0). \tag{3.10}$$

Из (3.9), (3.10) получаем, что $\varphi(t) = \varphi^*(t)$ на $[0,T]$, а следовательно, пара $\{u^*(t,x), \gamma^*(t)\}$ является обобщенным решением обратной задачи (ОЗ.1). Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (A)–(G) *и* (3.1). *Положим*

$$R_\gamma = \frac{2}{T}, \tag{3.11}$$

и предположим, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_0}\Bigg\{K_f K_\omega + K_\varphi^* + \exp\left\{1 + \frac{3}{2}\left(K_{b,a} + \frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a}\right)T\right\}\times \\ \times\left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2}(K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right][M_1^2 + 3K_{f,a}]^{1/2}\Bigg\} \le \frac{2}{T}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Тогда оператор $\mathcal{A}$, *определенный формулой* (3.4), *переводит шар* B_{R_γ} *из пространства* $L_\infty(0,T)$ *в себя.*

Доказательство. Пусть $\gamma(t) \in B_{R_\gamma}$. Тогда в силу определения $\mathcal{A}(\gamma)$ имеем

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0,T)} \le \frac{1}{\varphi_0}\Bigg\{K_f K_\omega + K_\varphi^* + \Bigg[\left(\int_0^l |a\omega'|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_0^l |a_x\omega|^2 dx\right)^{1/2} + \\ + \left(\int_0^l |b\omega|^2 dx\right)^{1/2}\Bigg]\sup_{0\le t\le T}\|u_x(t,\cdot)\|_2 + \left(\int_0^l |c\omega|^2 dx\right)^{1/2}\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot)\|_2\Bigg\}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись оценкой (2.5), определением λ_1 в (2.4) и неравенством (1.7), из последнего неравенства получаем, что

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0,T)} \le \frac{1}{\varphi_0}\left\{K_f K_\omega + K_\varphi^* + \exp\left\{\left(\frac{3}{2}K_{b,a} + \frac{3l^2}{2\pi^2}K_{c,a} + \frac{R_\gamma}{2}\right)T\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2}(K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right][M_1^2 + 3K_{f,a}]^{1/2}\right\},$$

откуда в силу определения R_γ в (3.11) и условия (3.12), получаем, что

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\|_{L_\infty(0,T)} \le R_\gamma.$$

Лемма 3.2 доказана.

Замечание 3.2. Условие (3.12) заведомо выполняется при малых T.

Лемма 3.3. *Пусть выполнены условия леммы* 3.2, *величина* R_γ *определена в* (3.11). *Тогда существует натуральное число* k *такое, что оператор* $\mathcal{A}^k$ (k*-я степень оператора* $\mathcal{A}$) *является сжимающим на шаре* B_{R_γ}.

Доказательство. Положим

$$\lambda_1^* = 2 + 3\left(K_{b,a} + \frac{l^2}{\pi^2}K_{c,a}\right).$$

Пусть $\gamma^{(1)}(t), \gamma^{(2)}(t) \in B_{R_\gamma}$, где R_γ определено в (3.11). Пусть $u^{(i)}(t,x)$, $i = 1,2$ — решения прямой задачи (1.1)–(1.3) с коэффициентами $\gamma^{(i)}(t)$ в уравнении (1.1) соответственно. Положим $v(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$, $\sigma(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда справедливы соотношения

$$v_t - a(t,x)v_{xx} + b(t,x)v_x + c(t,x)v + \gamma^{(1)}(t)v = -\sigma(t)u^{(2)}(t,x), \tag{3.13}$$

$$v(0,x) = 0, \quad x \in [0,l], \quad v(t,0) = v(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Учитывая условия леммы и определение оператора $\mathcal{A}$, имеем

$$\begin{gathered}\left|\mathcal{A}(\gamma^{(1)})(t) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})(t)\right|^2 \le \frac{1}{\varphi_0^2}\left[\int_0^l \left(|(a\omega)_x| + |b\omega|\right)|v_x|dx + \int_0^l |c\omega||v|\,dx\right]^2 \le \\ \le \frac{1}{\varphi_0^2}\left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2}(K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right]^2 \|v_x(t\cdot)\|_2^2.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Поскольку функция $v(t,x)$ удовлетворяет соотношениям (3.13), (3.14), а коэффициент $\gamma^{(1)}(t)$ удовлетворяет оценке $\gamma^{(1)}(t) \le 2/T$ (см. (3.11)), то оценка (2.5), примененная к $v(t,x)$, имеет вид

$$\|v_x(t,\cdot)\|_2^2 \le 3e^{\lambda_1^* T}\int_{Q_t}\frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau,x)}\left|u^{(2)}(\tau,x)\right|^2 dxd\tau. \tag{3.16}$$

Из (2.5) также вытекает оценка

$$\left|u^{(2)}(t,x)\right| \le M_0 \equiv M_0(T), \quad (t,x) \in Q. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.16), (3.17) в (3.15), получаем, что

$$\begin{gathered}\left|\mathcal{A}(\gamma^{(1)})(t) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})(t)\right|^2 \le \frac{3}{\varphi_0^2}e^{\lambda_1^* T}M_0^2(T)\left[a_1 K_\omega^* + l^{1/2}(K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right]^2 \times \\ \times \int_0^t\int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau,x)}dxd\tau \equiv m_1\int_0^t\int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau,x)}dxd\tau,\end{gathered} \tag{3.18}$$

где константа $m_1 > 0$ не зависит от t.

Заметим, что из оценки (3.18) следует непрерывность оператора $\mathcal{A}$ на B_{R_γ}.

Используя неравенство Гёльдера и условие (A), находим, что

$$\int_0^t\int_0^l \frac{\sigma^2(\tau)}{a(\tau,x)}dxd\tau \le a_2 l^{(q-1)/q} t^{(q-1)/q}\|\sigma\|^2_{L_\infty(0,T)},$$

а следовательно, из (3.18) получаем оценку

$$\left\|\mathcal{A}(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}(\gamma^{(2)})\right\|^2_{L_\infty(0,t)} \le m_1 a_2 l^{(q-1)/q} t^{(q-1)/q}\left\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\right\|^2_{L_\infty(0,t)}. \tag{3.19}$$

На основании оценки (3.19) по индукции доказывается оценка

$$\left\|\mathcal{A}^k(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}^k(\gamma^{(2)})\right\|^2_{L_\infty(0,t)} \le m_1^k a_2^k \frac{l^{k(q-1)/q} t^{k(q-1)/q}}{(k!)^{k(q-1)/q}}\left\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\right\|^2_{L_\infty(0,t)}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

а следовательно, справедлива оценка

$$\left\|\mathcal{A}^k(\gamma^{(1)}) - \mathcal{A}^k(\gamma^{(2)})\right\|^2_{L_\infty(0,T)} \le \frac{\left(m_1 a_2 l^{(q-1)/q} T^{(q-1)/q)}\right)^k}{(k!)^{(q-1)/q}}\left\|\gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}\right\|^2_{L_\infty(0,t)}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{3.20}$$

Из (3.20), очевидно, следует, что при достаточно большом k оператор $\mathcal{A}^k$ будет сжимающим на шаре B_{R_γ}. Лемма 3.3 доказана.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (A)–(G), (3.1), (3.12), *а* R_γ *определена в* (3.11). *Тогда существует решение* $\{u(t,x),\gamma(t)\}$ *обратной задачи* (*ОЗ.1*), *для него справедлива оценка*

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0,T)} \le R_\gamma \equiv \frac{2}{T}, \tag{3.21}$$

а также оценки (2.5)–(2.9) *с* $\lambda_1 = 3K_{b,a} + 3\dfrac{l^2}{\pi^2}K_{c,a} + \dfrac{2}{T}$. *При этом не существует двух различных решений* $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ *и* $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ *этой задачи, для которых одновременно выполнена оценка* (3.21).

Доказательство. В силу лемм 3.2 и 3.3 оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным на шаре B_{R_γ} и отображает этот шар в себя. Кроме того, некоторая степень оператора $\mathcal{A}$ является сжимающим оператором на шаре B_{R_γ}. Поэтому в силу обобщенного принципа сжатых отображений (см., например, [24], с. 82) уравнение (3.5) имеет единственное решение $\gamma(t)$, причем оно удовлетворяет оценке (3.21).

Пусть $u(t,x)$ – решение прямой задачи (1.1)–(1.3) с полученным $\gamma(t)$ в уравнении (1.1). Тогда в силу леммы 3.1 пара $\{u(t,x),\gamma(t)\}$ будет обобщенным решением обратной задачи (ОЗ.1), причем в силу теоремы 2.1 справедливы оценки (2.5)–(2.9) с $\lambda_1 = 3K_{b,a} + 3\dfrac{l^2}{\pi^2}K_{c,a} + \dfrac{2}{T}$.

Если предположить, что существует два различных решения $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (ОЗ.1), для которых функции $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma^{(2)}(t)$ одновременно удовлетворяют оценке (3.21), то обязательно $\gamma^{(1)}(t) \ne \gamma^{(2)}(t)$, поскольку если $\gamma^{(1)}(t) = \gamma^{(2)}(t)$, то и $u^{(1)}(t,x) = u^{(2)}(t,x)$ в силу теоремы 2.1. Однако соотношение $\gamma^{(1)}(t) \ne \gamma^{(2)}(t)$ противоречит доказанной выше единственности решения уравнения (3.5) в шаре B_{R_γ}.

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (A)–(G). *Тогда обратная задача* (*ОЗ.1*) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ этой обратной задачи. Предположим, что

$$\left|u^{(i)}(t,x)\right| \le K_u, (t,x)\in Q, \quad \left|\gamma^{(i)}(t)\right| \le K_\gamma, \quad t\in[0,T], \quad i = 1,2. \tag{3.22}$$

Ниже в доказательстве этой теоремы через C с индексом будем обозначать любые положительные константы, зависящие от T, l, констант, входящих в условия (A)–(F), а также от K_u и K_γ.

Положим $v(t,x) = u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x)$, $\sigma(t) = \gamma^{(1)}(t) - \gamma^{(2)}(t)$. Тогда для пары $\{v,\sigma\}$ справедливы соотношения (3.13), (3.14), а также соотношение

$$\int_0^l v(t,x)\omega(x)dx = 0. \tag{3.23}$$

Умножим (3.13) на $\omega(x)$ и проинтегрируем результат по $[0,l]$. Учитывая соотношения (3.23) и (1.4), после интегрирования по частям получаем, что

$$-\sigma(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\left\{\int_0^l [(a\omega)_x + b\omega]v_x dx + \int_0^l c\omega v dx\right\}. \tag{3.24}$$

Подставляя (3.24) в (3.13), придем к соотношению

$$v_t - a(t,x)v_{xx} + b(t,x)v_x + c(t,x)v + \gamma^{(1)}(t)v = \frac{1}{\varphi(t)}\left\{\int_0^l [(a\omega)_y + b\omega]v_y dy + \int_0^l c\omega v dy\right\}u^{(2)}(t,x). \tag{3.25}$$

Умножим (3.25) на $e^{-\lambda t}v(t,x)$, где $\lambda = \text{const} > 0$ будет выбрана ниже, и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований придем к соотношению

$$\begin{gathered}\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int_0^l v^2(T,x)dx + \frac{\lambda}{2}\int_Q e^{-\lambda t}v^2 dxdt + \int_Q e^{-\lambda t}av_x^2 dxdt = -\int_Q (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a}v_x)\left(e^{-\lambda t/2}\frac{a_x}{\sqrt{a}}v\right)dxdt - \\ - \int_Q (e^{-\lambda t/2}\sqrt{a}v_x)\left(e^{-\lambda t/2}\frac{b}{\sqrt{a}}v\right)dxdt - \int_Q e^{-\lambda t}cv^2 dxdt - \int_Q e^{-\lambda t}\gamma^{(1)}v^2 dxdt + \\ + \int_Q \frac{1}{\varphi}\left\{\int_0^l [(a\omega)_y + b\omega]v_y dy\right\}e^{-\lambda t}u^{(2)}v dxdt + \int_Q \frac{1}{\varphi}\left\{\int_0^l c\omega v dy\right\}e^{-\lambda t}u^{(2)}v dxdt.\end{gathered} \tag{3.26}$$

Применяя для оценки первых двух слагаемых в правой части (3.26) неравенство (1.6) при $\varepsilon = 1/2$, и учитывая условия (A), (B), (3.22), получаем, что

$$\begin{gathered}\frac{\lambda}{2}\int_Q e^{-\lambda t}v^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_Q e^{-\lambda t}av_x^2 dxdt \le C_1\int_Q e^{-\lambda t}v^2 dxdt + C_2\int_Q\left\{\int_0^l (|a_y\omega| + |a\omega'|)|v_y|\,dy\right\}e^{-\lambda t}|v|dxdt + \\ + C_3\int_Q\left\{\int_0^l (|c\omega||v|\,dy\right\}e^{-\lambda t}|v|dxdt \equiv C_1\int_Q e^{-\lambda t}v^2 dxdt + J_1 + J_2.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Оценим слагаемые J_1 и J_2. Используя неравенство (1.5), имеем

$$\begin{gathered}J_1 \le C_2\int_0^l\left\{\int_0^T\left(\int_0^l \frac{|a_y|}{\sqrt{a}}|\omega|\sqrt{a}e^{-\lambda t/2}|v_y(t,y)|dy\right)e^{-\lambda t/2}|v(t,x)|dt\right\}dx + \\ + C_2\int_0^l\left\{\int_0^T\left(\int_0^l \sqrt{a}|\omega'|\sqrt{a}e^{-\lambda t/2}|v_y(t,y)|dy\right)e^{-\lambda t/2}|v(t,x)|dt\right\}dx \le \\ \le C_4\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}\sqrt{a}|v_y(t,y)|dy\right)e^{-\lambda t/2}|v(t,x)|dtdx + \\ + C_5\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}|\omega'|\sqrt{a}|v_y(t,y)|dy\right)e^{-\lambda t/2}|v(t,x)|dtdx \le \frac{\varepsilon}{2}C_4\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}\sqrt{a}|v_y(t,y)|dy\right)^2 dtdx +\end{gathered} \tag{3.28}$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}C_4\int_Q e^{-\lambda t}|v|^2dxdt+\frac{\varepsilon}{2}C_5\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}|\omega'|\sqrt{a}|v_y(t,y)|dy\right)^2 dtdx+\frac{1}{2\varepsilon}C_5\int_Q e^{-\lambda t}|v|^2dxdt\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}C_6\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t}av_y^2dy\right)dtdx+\frac{C_7}{2\varepsilon}\int_Q e^{-\lambda t}|v|^2dxdt\le\frac{\varepsilon}{2}C_8\int_Q e^{-\lambda t}av_x^2dxdt+\frac{C_7}{2\varepsilon}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt.$$

Аналогично,

$$J_2\le C_9\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}|v(t,y)|dy\right)e^{-\lambda t/2}|v(t,x)|dtdx\le\frac{C_9}{2}\int_0^l\int_0^T\left(\int_0^l e^{-\lambda t/2}|v(t,y)|dy\right)^2dtdx+$$
$$+\frac{C_9}{2}\int_Q e^{-\lambda t}|v(t,x)|^2dxdt\le C_{10}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt. \tag{3.29}$$

Полагая в (3.28) $\varepsilon=\dfrac{1}{2C_8}$ и подставляя затем оценки (3.28), (3.29) в (3.27), получаем, что

$$\frac{\lambda}{2}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt+\frac{1}{4}\int_Q e^{-\lambda t}v_x^2dxdt\le C_{11}\int_Q e^{-\lambda t}v^2dxdt. \tag{3.30}$$

Выбирая теперь в (3.30) $\lambda>2C_{11}$, получаем, что $v(t,x)\equiv 0$ в Q. Но тогда из (3.24) следует, что и $\sigma(t)\equiv 0$ на $[0,T]$, т.е. решения $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ и $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ обратной задачи (ОЗ.1) совпадают. Теорема 3.2 доказана.

Замечание 3.3. Теорема единственности 3.2, в отличие от теоремы 3.1, не содержит условий малости типа (3.11), (3.12), т.е. носит глобальный характер.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (ОЗ.2)

В данном разделе будем предполагать выполненными условия (A)–(G), (3.1), а также дополнительно условие

$$\varphi'(t)\le-\varphi^*<0,\quad t\in[0,T],\quad \varphi^*=\text{const}>0. \tag{4.1}$$

Для функции $F(t)$ (см. (3.2)) будем предполагать выполненным условие

$$F(t)\ge F_0,\quad F_0=\text{const}\in(-\infty,+\infty). \tag{4.2}$$

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, заданный по формуле (3.4), однако, в данном разделе будем его рассматривать как оператор, действующий из $L_\infty^+(0,T)$ в $L_\infty(0,T)$.

В соответствии с леммой 3.1 обратная задача (ОЗ.2) эквивалентна операторному уравнению (3.5).

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия* (A)–(G), (3.1), (4.1), (4.2), λ_2 *определена в* (2.23). *Предположим, что*

$$e^{\lambda_2T/2}\left[a_1K_\omega^*+l^{1/2}(K_{\omega,a}+K_{\omega,b})+\frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right](M_1^2+3K_{f,a})^{1/2}\le F_0+\varphi^*. \tag{4.3}$$

Тогда для любой функции $\gamma(t)\in L_\infty^+(0,T)$ *имеем* $\mathcal{A}(\gamma)(t)\ge 0$.

Доказательство. Пусть $\gamma(t)\in L_\infty^+(0,T)$, а $u(t,x)\equiv u(t,x;\gamma)$ — соответствующее решение прямой задачи (1.1)–(1.3). Тогда в силу условий леммы, оценки (2.24) и неравенства (1.7) имеем для любого $t\in[0,T]$, что

$$\int_0^l[(a\omega)_x+b\omega]u_xdx+\int_0^l c\omega u dx\le\left[\left(\int_0^l|a\omega'|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_0^l|a_x\omega|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_0^l|b\omega|^2dx\right)^{1/2}\right]\|u_x(t,\cdot)\|_2+$$
$$+\left(\int_0^l|c\omega|^2dx\right)^{1/2}\|u(t,\cdot)\|_2\le\left[a_1K_\omega^*+l^{1/2}(K_{\omega,a}+K_{\omega,b})+\frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right]e^{\lambda_2T/2}(M_1^2+3K_{f,a})^{1/2}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу (4.1), (4.2)

$$F(t)-\varphi'(t)\ge F_0+\varphi^*. \tag{4.5}$$

Из (4.4), (4.5), определения оператора $\mathcal{A}(\gamma)$ и условия (4.3), очевидно, следует, что $\mathcal{A}(\gamma)(t) \geq 0$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* (A)–(G), (3.1), *константа* λ_2 *определена в* (2.23). *Тогда для любой функции* $\gamma(t) \in L^+_\infty(0,T)$ *имеем*

$$\|\mathcal{A}(\gamma)\| \leq \frac{e^{\lambda_2 T/2}}{\varphi_0}\left\{K_f K_\omega + K^*_\varphi + \left[a_1 K^*_\omega + l^{1/2}(K_{\omega,a} + K_{\omega,b}) + \frac{l^{3/2}}{\pi}K_{\omega,c}\right](M_1^2 + 3K_{f,a})^{1/2}\right\} \equiv R^*_\gamma. \quad (4.6)$$

Доказательство. Оценка (4.6) есть прямое следствие определения оператора $\mathcal{A}$ и оценки (2.24).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (A)–(G), (3.1), (4.1)–(4.3). *Тогда существует решение* $\{u(t,x),\gamma(t)\}$ *обратной задачи* (*ОЗ.2*) *и для него справедлива оценка*

$$\|\gamma\|_{L_\infty(0,T)} \leq R^*_\gamma, \quad (4.7)$$

где R^*_γ *определена в* (4.6), *а также оценки* (2.24)–(2.26). *При этом не существует двух различных решений* $\{u^{(1)},\gamma^{(1)}\}$ *и* $\{u^{(2)},\gamma^{(2)}\}$ *этой задачи, для которых одновременно выполнена оценка* (4.7).

Доказательство. В силу лемм 4.1 и 4.2 оператор $\mathcal{A}$ отображает множество $B_{R^*_\gamma}$ в себя. Так же, как в лемме 3.3 доказывается, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывен на $B_{R^*_\gamma}$ и некоторая его степень $\mathcal{A}^k$ является сжимающим оператором на множестве $B_{R^*_\gamma}$.

Дальнейшее доказательство теоремы 4.1 дословно повторяет доказательство теоремы 3.1. Оценки (2.24)–(2.26) для функции $u(t,x)$ вытекают из следствия к теореме 2.2.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (A)–(G). *Тогда обратная задача* (*ОЗ.2*) *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Данное утверждение есть прямое следствие теоремы 3.2 из предыдущего раздела.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

Обсудим выполнение наложенных в работе условий и приведем примеры конкретных обратных задач, для которых применимы доказанные теоремы.

Условия $a_x^2/a, b^2/a, c^2/a \in L_\infty(Q)$, $f^2/a \in L_1(Q)$ означают подчинение вырождаемости функций a_x, b, c, f вырождаемости старшего коэффициента a, и, очевидно, выполняются для широкого класса функций. В частности, условие $a_x^2/a \in L_\infty(Q)$ заведомо выполняется, если $a(t,x) \equiv a(t)$ не зависит от x.

Таким образом, теоремы единственности 3.2 и 4.2 справедливы для широкого класса рассматриваемых обратных задач.

Как было отмечено в замечании 3.2, условие (3.12) из теоремы 3.1 заведомо выполняется при малых T, поэтому и существование решения при малых T справедливо для широкого класса задач вида (ОЗ.1).

Приведем пример конкретной обратной задачи (ОЗ.1), для которой теорема 3.1 справедлива при произвольных значениях T (и при достаточно больших l).

Пример 5.1. Рассмотрим в Q обратную задачу (ОЗ.1):

$$u_t - t^\beta(x+1)u_{xx} + t^{\nu/2}b_1(t,x)u_x + \gamma(t)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \quad (5.1)$$

$$u(0,x) = x(l-x), \quad x \in [0,l]; \quad (5.2)$$

$$u(t,l) = u(t,l) = 0, \quad t \in [0,T]; \quad (5.3)$$

$$\int_0^l u(t,x)x(l-x)dx = \frac{l^5}{30}, \quad t \in [0,T]. \quad (5.4)$$

Здесь $\beta \in (0,1)$, $\nu \geq \beta$, $|b_1(t,x)| \leq K^*_b$, $|f(t,x)| \leq K^*_f$, где константы β, ν, K^*_b, K^*_f не зависят от l и T. Кроме того, имеем $\omega(x) = x(l-x)$, $\varphi(t) = l^5/30$.

Нетрудно проверить, что для задачи (5.1)–(5.4) выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Таким образом, для задачи (5.1)–(5.4) справедлива теорема единственности 3.2.

Непосредственными вычислениями получаем, что константы, входящие в условия (A)–(F), (3.1), (3.2), можно выбрать следующими:

$$a_1 = T^{\beta}(l+1), \quad K_a^* = T^{\beta}, \quad K_{b,a} = K_b^{*2}T^{\nu-\beta}, \quad K_{c,a} = 0, \quad K_{f,a} = K_f^{*2}\frac{T^{1-\beta}}{1-\beta}\ln(l+1),$$

$$M_1 = \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, \quad K_\omega = \frac{l^2}{4}, \quad K_\omega^* = \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_0 = \frac{l^5}{30}, \quad \varphi^* = 0, \quad K_{\omega,a} = \frac{T^{\beta}l^2}{4}(l+1)^{1/2},$$

$$K_{\omega,b} = K_b^*\frac{T^{\nu/2}l^2}{4}(l+1)^{1/2}, \quad K_{\omega,c} = 0, \quad K_f = lK_f^*.$$

Тогда условие (3.12) для задачи (5.1)–(5.4) имеет вид

$$\frac{30}{l^5}\left\{\frac{l^3}{4}K_f^* + \exp\left(1 + \frac{3}{2}T^{1+\nu-\beta}K_b^{*2}\right)\left[\frac{T^{\beta}}{\sqrt{3}}l^{3/2}(l+1) + \frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^{\beta} + T^{\nu/2}K_b^*)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{l^3}{3} + \frac{3\ln(l+1)}{1-\beta}T^{1-\beta}K_f^{*2}\right]^{1/2}\right\} \le \frac{2}{T}. \tag{5.5}$$

Легко видеть, что условие (5.5) будет выполнено при достаточно больших l (и фиксированном T). Таким образом, в этом случае применима теорема 3.1 и обратная задача (5.1)–(5.4) имеет решение $\{u(t,x), \gamma(t)\}$, причем справедлива оценка $|\gamma(t)| \le \dfrac{2}{T}$. Кроме того, как было отмечено выше, данное решение будет единственным в силу теоремы 3.2.

Приведем теперь пример обратной задачи (ОЗ.2), для которой справедливы теоремы 4.1 и 4.2.

Пример 5.2. Рассмотрим в Q обратную задачу (ОЗ.2) для уравнения

$$u_t - t^{\beta}(x+1)u_{xx} + t^{\nu/2}b_1(t,x)u_x + t^{\delta/2}c_1(t,x)u + \gamma(t)u = f(t,x) \tag{5.6}$$

с краевыми условиями (5.2), (5.3) и условием интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t,x)x(l-x)dx = \frac{(2T-t)l^5}{60T}. \tag{5.7}$$

Здесь $\beta \in (0,1)$, $\nu \ge \beta$, $\delta \ge \beta$, $|b_1(t,x)| \le K_b^*$, $|c_1(t,x)| \le K_c^*$, $|f(t,x)| \le K_f^*$, где константы β, ν, δ, K_b^*, K_c^*, K_f^* не зависят от l и T. Кроме того, имеем $\omega(x) = x(l-x)$, $\varphi(t) = \dfrac{(2T-t)l^5}{60T}$.

Как и в случае задачи (5.1)–(5.4) из примера 5.1, нетрудно проверить, что для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) выполнены условия (A)–(G) и (3.1). Таким образом, для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) справедлива теорема единственности 4.2.

Нетрудно проверить, что условия (4.1), (4.2) для рассматриваемой задачи также выполнены.

Снова непосредственными вычислениями получаем, что константы, входящие в условия (A)–(F), (3.1), (3.2), (4.1), (4.2), можно выбрать следующими:

$$a_1 = T^{\beta}(l+1), \quad K_a^* = T^{\beta}, \quad K_{b,a} = K_b^{*2}T^{\nu-\beta}, \quad K_{c,a} = K_c^{*2}T^{\delta-\beta}, \quad K_{f,a} = K_f^{*2}\frac{T^{1-\beta}}{1-\beta}\ln(l+1),$$

$$M_1 = \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, \quad K_\omega = \frac{l^2}{4}, \quad K_\omega^* = \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_0 = \frac{l^5}{30}, \quad \varphi^* = \frac{l^5}{60T}, \quad F_0 = -\frac{l^3}{4}K_f^*,$$

$$K_{\omega,a} = \frac{T^{\beta}l^2}{4}(l+1)^{1/2}, \quad K_{\omega,b} = K_b^*\frac{T^{\nu/2}l^2}{4}(l+1)^{1/2}, \quad K_{\omega,c} = K_c^*\frac{T^{\delta/2}l^2}{4}(l+1)^{1/2}.$$

Тогда условие (4.3) для задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) имеет вид

$$\exp\left(\frac{3}{2}T^{1+\nu-\beta}K_b^{*2} + \frac{3l^2}{2\pi^2}T^{1+\delta-\beta}K_c^{*2}\right)\left[T^{\beta}\frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}(l+1) + \frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^{\beta} + T^{\nu/2}K_b^*) + \frac{l^{7/2}}{4\pi}(l+1)^{1/2}T^{\delta/2}K_c^*\right]\times$$
$$\times\left[\frac{l^3}{3} + \frac{3\ln(1+l)}{1-\beta}T^{1-\beta}K_f^{*2}\right]^{1/2} \le \frac{l^5}{60T} - \frac{l^3}{4}K_f^*. \tag{5.8}$$

1. Если $l > 0$ фиксировано, то, очевидно, условие (5.8) выполнено при малых T. В этом случае в силу теоремы 4.1 будет существовать решение задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7).

2. Предположим теперь, что в уравнении (5.6) $c_1(t,x) \equiv 0$ (т.е. уравнение (5.6) совпадает с уравнением (5.1)). Тогда условие (5.8) будет иметь вид

$$\exp\left(\frac{3}{2}T^{1+\nu-\beta}K_b^{*2}\right)\left[T^{\beta}\frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}(l+1)+\frac{l^{5/2}}{4}(l+1)^{1/2}(T^{\beta}+T^{\nu/2}K_b^{*})\right]\left[\frac{l^3}{3}+\frac{3\ln(1+l)}{1-\beta}T^{1-\beta}K_f^{*2}\right]^{1/2}\le\frac{l^5}{60T}-\frac{l^3}{4}K_f^{*}. \quad (5.9)$$

Если фиксировать T, то условие (5.9) будет выполнено, если выбрать l достаточно большим. Таким образом, в этом случае в силу теоремы 4.1 решение обратной задачи также будет существовать.

Как было уже отмечено выше, в обоих рассмотренных случаях решение задачи (5.6), (5.2), (5.3), (5.7) будет единственным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики I // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 1. С. 119–129.
2. *Прилепко А.И., Орловский Д.Г.* Об определении параметра эволюционного уравнения и обратных задачах математической физики II // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 4. С. 694–700.
3. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in some quasilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 1. P. 35–45.
4. *Cannon J.R., Lin Y.* Determination of a parameter $p(t)$ in Holder classes for some semilinear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. V. 4. № 3. P. 596–606.
5. *Камынин В.Л., Саролди М.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 10. С. 1683–1691.
6. *Бухарова Т.И., Камынин В.Л.* Обратная задача определения коэффициента поглощения в многомерном уравнении теплопроводности с неограниченными младшими коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 7. С. 1183–1195.
7. *Прилепко А.И., Соловьев В.В.* О разрешимости обратных краевых задач определения коэффициента перед младшей производной в параболическом уравнении // Дифференц. ур-ния. 1987. Т. 23. № 1. С. 136–143.
8. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сборник. 1992. Т. 183. № 4. С. 49–68.
9. *Прилепко А.И., Костин А.Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I // Сиб. матем. ж. 1992. Т. 33. № 3. С. 146–155.
10. *Камынин В.Л.* О корректной разрешимости обратной задачи определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с условием интегрального наблюдения // Матем. заметки. 2015. Т. 98. Вып. 5. С. 710–724.
11. *Камынин В.Л.* Обратная задача определения правой части в вырождающемся параболическом уравнении с неограниченными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 5. С. 832–841.
12. *Prilepko A.I., Kamynin V.L., Kostin A.B.* Inverse source problem for parabolic equation with the condition of integral observation in time // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2018. V. 26. № 4. P. 523–539.
13. *Камынин В.Л.* Об обратных задачах для сильно вырождающихся параболических уравнений при условии интегрального наблюдения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 2075–2094.
14. *Cannarsa P., Martinez P., Vancostenoble J.* Global Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2016. V. 239. № 1133. P. 1–207.
15. *Bouchouev I., Isakov V.* Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 3. R. 95–116.
16. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2006. V. 14. № 5. P. 465–480.
17. *Cannarsa P., Tort J., Yamamoto M.* Determination of source terms in degenerate parabolic equation // Inverse Problems. 2010. V. 26. № 10. P. 105003.
18. *Zui-Cha Deng, Liu Yang.* An inverse problem of identifying the coefficient of first-order in a degenerate parabolic equation // J. Comp. Appl. Math. 2011. V. 235. P. 4404–4417.
19. *Zui-Cha Deng, Liu Yang.* An inverse problem of identifying the radiative coefficient in a degenerate parabolic equation // J. Chinese Annals of Mathematics. Ser. B. 2014. V. 35B. № 3. P. 355–382.
20. *Deng Z.C., Qian K., Rao X.B., Yang L.* An inverse problem of identifying the source coefficient in degenerate heat equation // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. V. 23. № 3. P. 498–517.
21. *Huzyk N.* Inverse problem of determining the coefficients in degenerate parabolic equation // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. V. 172. P. 1–11.
22. *Кружков С.Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды сем. им. И.Г. Петровского. 1979. Вып. 5. С. 217–272.
23. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
24. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.