

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956

БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОВОРОТОМ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹⁾

© 2021 г. Е. П. Кубышкин^{1,*}, В. А. Куликов^{1,**}

¹ 150000 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ, матем. ф-т, Россия

*e-mail: kubysh.e@yandex.ru

**e-mail: kulikov7677@gmail.com

Поступила в редакцию 13.02.2020 г.

Переработанный вариант 26.09.2020 г.

Принята к публикации 18.11.2020 г.

Изучаются бифуркации автоколебательных решений из однородных состояний равновесия начально-краевой задачи в круге для нелинейного уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента на заданный угол и временным запаздыванием, возникающей в нелинейной оптике. В плоскости основных параметров уравнения построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия, изучена динамика областей устойчивости в зависимости от величины запаздывания. Исследованы механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия, возможные при этом бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений и их устойчивость, а также динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости основных параметров уравнения. Библ. 25. Фиг. 9.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, пространственно неоднородные решения, бифуркация мультистабильности.

DOI: 10.31857/S0044466921030121

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] приведены результаты экспериментального и теоретического исследования образования пространственно неоднородных структур в световых пучках нелинейного оптического генератора со специальным контуром двумерной обратной связи. Такие структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды, и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В [1] также предложена математическая модель рассматриваемой системы, описывающая пространственное и временное изменение фазы электромагнитной волны и представляющая собой начально-краевую задачу с краевыми условиями Неймана для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргумента. Начально-краевая задача рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения. В [1]–[3] также приведены результаты аналитического и численного интегрирования предложенной математической модели на окружности для оператора поворота пространственного аргумента. Эта начально-краевая задача и различные ее обобщения изучались в достаточно большом количестве работ. Отметим некоторые из них. В большинстве работ начально-краевая задача рассматривается на окружности [4]–[6] и с оператором поворота пространственного аргумента на фиксированный угол. Изучается возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородного периодического решения (бифуркации Андронова-Хопфа), исследуется его устойчивость. В работе [7] указанная краевая задача изучается в предположении малости коэффициента диффузии, где строится асимптотика бегущих волн. В [8] также рассмотрен случай малости коэффициента диффузии. Задача построения бегущих

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-31-90133).

волн сводится к решению аналогичной задачи для некоторой более простой параболической системы, названной квазинормальной формой. При этом реализуется бесконечномерный “критический случай”, в связи с чем остается открытой проблема строгого обоснования предложенного метода. В работе [9] рассматривается возможность бифуркации неоднородных по пространственной переменной периодических решений в начально-краевой задаче с оператором поворота в круге. Показана возможность бифуркации ротационных волн. В [10], [11] начально-краевая задача рассмотрена в многомерной области с оператором преобразования достаточно общего вида. Сформулированы условия на возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородного периодического решения, предложен алгоритм построения такого решения. Модель работы [1] не учитывает фактор временного запаздывания в контуре обратной связи. Учет временного запаздывания рассмотрен в работах [12], [13], где для математической модели работы [1] с запаздывающим аргументом в функционале обратной связи на окружности показана возможность бифуркации из однородного состояния равновесия пространственно неоднородных бегущих волн, и исследуется их устойчивость. Аналогичная задача для кольцевой области рассмотрена в [14].

Настоящая работа посвящена изучению бифуркаций автоколебательных решений из однородных состояний равновесия указанной выше начально-краевой задачи в круге для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента на заданный угол относительно центра круга и временным запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Изучены динамика однородных состояний равновесия и их устойчивость в зависимости от параметров начально-краевой задачи. В плоскости параметров управления (коэффициента усиления и угла поворота) с использованием метода D -разбиений в его специальной параметризации построены области устойчивости (неустойчивости) однородных состояний равновесия. Исследована динамика областей устойчивости в зависимости от величины запаздывания и других параметров начально-краевой задачи, изучены возможные механизмы потери устойчивости однородными состояниями равновесия. С использованием метода центральных многообразий и теории бифуркаций исследованы возможные бифуркации пространственно неоднородных автоколебательных решений при изменении параметров управления, а также их устойчивость. Изучена динамика таких решений в окрестности границы области устойчивости в плоскости управляющих параметров.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + K(1 + \gamma \cos(u_\theta(\rho, \phi, t - T))) \quad (2.1)$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s)$, заданной в полярных координатах $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ($R > 0$) и $t \geq 0$, $-T \leq s \leq 0$ ($T > 0$), в котором $\Delta_{\rho\phi}$ – оператор Лапласа в полярных координатах, $u_\theta(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, (\phi + \theta) \bmod(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) – оператор поворота пространственного аргумента, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (2.2)$$

В (2.2) пространство начальных условий $H_0(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [-T, 0]), u(\rho, 0, s) = u(\rho, 2\pi, s), u_\phi(\rho, 0, s) = u_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s \text{ } u(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$, где пространство функций $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$ и получено замыканием множества функций $\{u(\rho, \phi) : u(\rho, \phi) \in C^2(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0, u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), u_\phi(\rho, 0) = u_\phi(\rho, 2\pi)\}$ в метрике пространства функций $W_2^2(K_R)$. В дальнейшем $L_2(K_R)$ – пространство вещественнозначных определенных в K_R функций $u(\rho, \phi)$, для которых $\|u(\rho, \phi)\|_{L_2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{L_2}^{1/2} < \infty$, $(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = \int_{K_R} \rho u(\rho, \phi)v(\rho, \phi) d\rho d\phi$, здесь и в дальнейшем $W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R)$, $W_2^2(K_R) = \{u(\rho, \phi) : \|u(\rho, \phi)\|_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty$,

$(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{W^2} = (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi), \Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi))_{L_2}$, $C(\bar{K}_R)$ и $C^2(\bar{K}_R)$ -пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в \bar{K}_R функций, для которых определена норма $\|u(\rho, \phi)\|_C = \max_{\rho, \phi} |u(\rho, \phi)|$, $\|u(\rho, \phi)\|_{C^2} = \|u(\rho, \phi)\|_C + \|\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi)\|_C < \infty$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (2.1), (2.2) является пространство $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } -T \leq s \leq 0, \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([-T, 0])\}$, норму в котором определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_H = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2}$. Областью определения правой части уравнения (2.1) является пространство $H_0(K_R; -T, 0)$. Норму в $H_0(K_R; -T, 0)$ определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_{H_0} = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{W^2}$.

Под решением начально-краевой задачи (2.1), (2.2), определенным при $t > 0$, будем понимать функцию $u(\rho, \phi, t + s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ (при каждом $t > 0$), непрерывно дифференцируемую по t при $t > 0$, обращающую уравнение (2.1) в тождество и удовлетворяющую начальным условиям (2.2).

Решение начально-краевой задачи (2.1), (2.2) может быть построено методом шагов следующим образом. Решение $u(\rho, \phi, t + s)$ начально-краевой задачи (2.1), (2.2) построим последовательно на отрезках $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $t_k = Tk$, $k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$. Значения $u(\rho, \phi, t)$ на указанных отрезках обозначим соответственно через $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$. В результате для определения $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$ получим рекуррентную последовательность начально-краевых задач вида

$$u_t^{(k)} + u^{(k)} - D\Delta_{\rho\phi}u^{(k)} = K(1 + \gamma \cos(u_\theta^{(k-1)}(\rho, \phi, t - T))) \equiv f^{(k)}(\rho, \phi, t) (t_{k-1} \leq t \leq t_k), \tag{2.3}$$

$$u_\rho^{(k)}(R, \phi, t) = 0, u^{(k)}(\rho, 0, t) = u^{(k)}(\rho, 2\pi, t), u_\phi^{(k)}(\rho, 0, t) = u_\phi^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \tag{2.4}$$

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t_{k-1}) = u^{(k-1)}(\rho, \phi, t_{k-1}), u^{(1)}(\rho, \phi, 0) = u_0(\rho, \phi, 0), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.5}$$

в которых правая часть уравнений (2.3) и начальные условия (2.5) на каждом шаге вполне определенные функции. Решения (2.3)–(2.5) задаются формулой

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t) = \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1) u^{(k-1)}(\rho_1, \phi_1, t_{k-1}) d\rho_1 d\phi_1 + \int_0^t \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t - \tau, \rho_1, \phi_1) f^{(k)}(\rho_1, \phi_1, \tau) d\rho_1 d\phi_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.6}$$

где $G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1)$ – функция Грина однородной части (при $f^{(k)}(\rho, \phi, t) \equiv 0$) краевой задачи (2.3), (2.4). Из (2.6) также следуют единственность решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) и его непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнения, т.е. корректность поставленной начально-краевой задачи, а также нарастание гладкости решения по переменной t при $t \rightarrow \infty$, свойственное решениям уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе изучается динамика однородных состояний равновесия (2.1), (2.2) в зависимости от параметров K, θ, γ, T, D , их устойчивость, а также характер потери устойчивости и бифурцирующие при этом автоколебательные решения.

3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТИ

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ начально-краевой задачи (2.1), (2.2) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma \cos(u)). \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) в зависимости от K и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуем условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров уравнения (2.1).

Выберем одно из решений $u_* = u_*(K, \gamma)$ уравнения (3.1) и запишем начально-краевую задачу (2.1), (2.2) в его окрестности, заменив $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$. В результате получим начально-краевую задачу

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T) + b_2u_\theta^2(\rho, \phi, t - T)/2 + bu_\theta^3(\rho, \phi, t - T)/6 + \dots, \quad (3.2)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \quad u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \quad (3.3)$$

$$b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma)), \quad b_2 = -K\gamma \cos(u_*(K, \gamma)), \quad (3.4)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по $u_0(\rho, \phi, t - T)$ более высокий порядок малости.

Рассмотрим линейную часть (3.2), (3.3)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T), \quad (3.5)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t), \quad u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (3.6)$$

Определяя решения (3.5), (3.6) вида $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (решения Эйлера), получаем пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi) + bu_\theta(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (3.7)$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$, точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (3.5), (3.6), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Здесь и в дальнейшем знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщаются стандартным образом. Представим $u(\rho, \phi)$ в виде

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\rho, n\phi)v_{nj}, \quad u_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}, \quad u_j(\rho, n\phi) = \frac{R_{nj}(\rho)e^{in\phi}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/RJ_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2} |J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho), \quad u_j(\rho, 0) \equiv u_j(\rho), \quad (3.8)$$

$$(R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho)) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho)R_{np}(\rho)d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad v_{00}, v_{0j} \in \mathbb{R}, \quad v_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj},$$

где $J_n(\rho)$ – функции Бесселя I рода n -го порядка, γ_{nj} есть j -й положительный ноль функции $J'_n(\rho)$, $\gamma_{00} = 0$, а δ_{jp} – символ Кронекера. Функции $u_j(\rho, n\phi)$, являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в $\tilde{H}^2(K_R)$ и ортонормированный в $\tilde{L}_2(K_R)$. Подставим (3.8) в (3.7). В результате получим последовательность уравнений

$$(\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T})v_{nj} = 0,$$

из которых ненулевые $v_{00}, v_{nj}, n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$, могут быть выбраны лишь при условии

$$P_{nj}(\lambda) \equiv \lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T} = 0. \quad (3.9)$$

Корни уравнений (3.9) и комплексно сопряженные им величины определяют все множество точек спектра пучка операторов (3.7) и отвечают за устойчивость решений (3.5), (3.6).

Построим в пространстве параметров K, θ, T, D, γ области устойчивости решений (3.5), (3.6). Для этого воспользуемся методом D -разбиений [15], в соответствии с которым в уравнениях (3.9) положим $\lambda = i\omega, -\infty < \omega < \infty$, и приравняем нулю вещественную и мнимую части каждого уравнения. В результате получим выражения

$$1 + D\gamma_{nj}^2 + b \cos(n\theta - \omega T) = 0, \quad \omega + b \sin(n\theta - \omega T) = 0, \quad (3.10)$$

которые эквивалентны равенствам

$$b = -(1 + D\gamma_{nj}^2)/\cos(n\theta - \omega T), \quad \text{tg}(\theta - \omega T) = \omega/(1 + D\gamma_{nj}^2). \quad (3.11)$$

Выразив теперь из второго равенства (3.11) $n\theta - \omega T$ и подставив в первое, а также, разрешив его относительно θ , получим последовательность выражений

$$b = b_n(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(\arctg(\omega/(1 + D\gamma_{nj}^2))), \quad (3.12)$$

$$\theta = \theta_n(D, T, \omega) = (T\omega + \arctg(\omega/(1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k)/n, \quad (3.13)$$

$n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots, \text{и}$

$$b = b_0(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{0j}^2) / \cos(\arctg(\omega/(1 + D\gamma_{0j}^2))), \quad (3.14)$$

$$T = T_0(D, \omega) = \omega^{-1} (\pi k - \arctg(\omega/(1 + D\gamma_{0j}^2))), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Изменяя теперь в (3.12), (3.13) параметр $-\infty < \omega < \infty$ (при фиксированных других параметрах), получаем в области $\{b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (b, θ) семейство кривых, на которых пучок операторов (3.7) имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Это семейство дополнится прямыми $b = \text{const}$, определяемыми выражениями (3.14), (3.15). Здесь при фиксированном T из равенства (3.15) находим значения ω_{*jk} и подставляем в (3.14). В результате получим искомые значения b . Совокупность таких кривых и прямых позволяет выделить в плоскости (b, θ) (при фиксированных других параметрах) области устойчивости решений начально-краевой задачи (3.5), (3.6). Однако нас интересуют области устойчивости состояний равновесия начально-краевой задачи (2.1), (2.2) в пространстве параметров уравнения (2.1). Выберем в качестве основных параметры K и θ и построим области устойчивости состояний равновесия (2.1), (2.2) в плоскости этих параметров, считая другие параметры уравнения (2.1) фиксированными.

Рассмотрим выражения

$$K = K(u_*, \gamma) = u_*/(1 + \gamma \cos(u_*)), \quad b = b(u_*, \gamma) = \gamma u_* \sin(u_*) / (1 + \gamma \cos(u_*)) \quad (3.16)$$

как функции состояния равновесия $u_* > 0$. Заметим, что

$$dK/du_* = (1 + \gamma u_* \sin(u_*) / (1 + \gamma \cos(u_*))) / (1 + \gamma \cos(u_*)) = (1 + b(u_*, \gamma)) / (1 + \gamma \cos(u_*)).$$

Обозначим через $0 < u_{*1}(\gamma) < u_{*2}(\gamma) < \dots < u_{*j}(\gamma) < \dots$ последовательность корней уравнения $b(u_*, \gamma) = -1$ и рассмотрим интервалы $U_j(\gamma) = \{u_* : u_{*j-1}(\gamma) < u_* < u_{*j}(\gamma)\}$, $j = 1, 2, \dots, u_{*0} = 0$. При $u_* \in U_{2k}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, $b(u_*, \gamma) < -1$. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет, как следует из (3.9) при $n = 0$, вещественную положительную точку спектра, которой отвечает собственная функция $u_0(\rho)$, т.е. такие состояния равновесия (2.1), (2.2) всегда неустойчивы, при $u_* \in U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, $b(u_*, \gamma) > -1$. В этом случае состояния равновесия могут быть как устойчивы, так и неустойчивы, причем неустойчивость может наступить, как следует из первого равенства (3.10), лишь при условии $b(u_*, \gamma) > 1$. В связи с этим в выражениях (3.12)–(3.15) в дальнейшем будем рассматривать лишь нечетные значения k . Этот случай и представляет интерес с точки зрения теории бифуркаций. Отметим, что в точках $u_* = u_{*j}(\gamma)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет кратные состояния равновесия (здесь сливаются и исчезают либо возникают устойчивое и неустойчивое состояния равновесия). Обозначим $K_j(\gamma) = K(u_{*j}(\gamma), \gamma)$, $j = 0, 1, \dots$. На $U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, функция $K(u_*, \gamma)$ монотонно возрастает, а на $U_{2k}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, монотонно убывает.

Равенства (3.12) являются четными функциями параметра ω , а (3.13) нечетными функциями параметра ω . При этом (3.12) при нечетных k монотонно возрастают при $\omega \geq 0$. Считая $\omega \geq 0$, из равенства (3.12) выразим

$$\omega = \omega(b) = (1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b)) = \omega(b(u_*, \gamma)) \quad (3.17)$$

и подставим в равенство (3.13), разделив его на два (для $\omega \geq 0$ и $\omega \leq 0$). В результате имеем

$$\theta^\pm = \theta_n^\pm(u_*, D, \gamma) = (T(1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma))) + \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k)/n, \quad (3.18)$$

$$\theta^- = \theta_n^-(u_*, D, \gamma) = (-T(1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma))) - \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k)/n, \quad (3.19)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 3, \dots, 2n - 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Изменяя теперь $0 \leq u_* < \infty$, $u_* \in U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, в (3.16), (3.18), (3.19) при фиксированных значениях T, D, γ, n построим в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (K, θ) кривые, на которых пучок операторов (3.7), построенный для соответствующего состояния равновесия u_* , имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Кроме этого, при $n = 0$ из (3.14), (3.15) имеем последовательность уравнений

$$T(1 + D\gamma_{0j}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))) = (\pi k - \arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))), \quad (3.20)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 3, \dots,$$

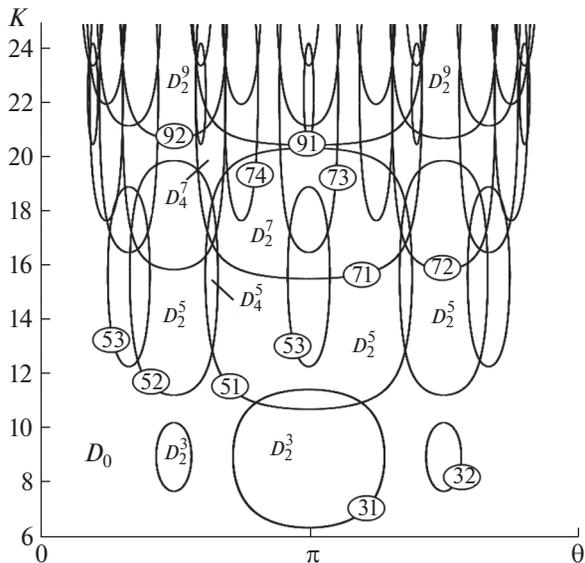
положительные нули которых $u_{*kp} \in U_{2k-1}(\gamma)$, $k = 1, 2, \dots$, определяют в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ последовательность прямых $K = K(u_{*kp}, \gamma)$, на которых пучок операторов (3.7), построенный для состояния равновесия u_{*kp} , имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, которым отвечают собственные функции вида $u_j(\rho)$. Для определения направления движения точек спектра (из левой комплексной полуплоскости в правую или наоборот) при пересечении построенных кривых и прямых поступим следующим образом. Пусть (K_*, θ_*) – точка кривой или прямой, которая получена при некотором u_* и которой соответствует точка спектра $i\omega_*$, определяемая согласно (3.16), (3.17). Обозначим через $\lambda(K, \theta)$ точку спектра пучка операторов (3.7), удовлетворяющую условию $\lambda(K_*, \theta_*) = i\omega_*$. Вычислим производные $\lambda_K(K_*, \theta_*)$, $\lambda_\theta(K_*, \theta_*)$, воспользовавшись (3.9), (3.16) и теоремой о неявной функции. Направление движения точки спектра определяют величины

$$\operatorname{Re} \lambda_K(K_*, \theta_*) = (\gamma \sin(u_*) + u_* \gamma \cos(u_*) / (1 + b(u_*, \gamma))) (\cos(n\theta_* - \omega_* T) - b(u_*, \gamma) T) / \Delta, \quad (3.21)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_\theta(K_*, \theta_*) = nb(u_*, \gamma) \sin(n\theta_* - \omega_* T) / \Delta, \quad \Delta = 1 - 2b(u_*, \gamma) T \cos(n\theta_* - \omega_* T) + b^2(u_*, \gamma) T^2.$$

Таким образом, построим картину D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и получим границы областей устойчивости различных состояний равновесия начально-краевой задачи (2.1), (2.2), а также изучим характер потери устойчивости соответствующих состояний равновесия. При этом через D_j обозначается область параметров, при которых пучок операторов (3.7) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости.

На фиг. 1–8 для различных значений параметров T, D, γ приведены картины D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Каждая замкнутая кривая, форма которой похожа на эллипс, представляет собой совокупность точек рассматриваемой области, на которых пучок операторов (3.7) имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$. При этом, при изменении параметров K, θ внутрь области, ограниченной замкнутой кривой, указанные точки спектра переходят в правую комплексную полуплоскость, и наоборот. Отметим, что некоторые замкнутые кривые представлены на фигурах лишь своей частью в силу ограничений на K и θ . Каждая замкнутая кривая имеет маркер из двух индексов, первый из которых характеризует область $U_k(\gamma)$, к которой относится исследуемое состояние равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$, второй индекс характеризует номер n , фигурирующий в определяющих замкнутую кривую функциях (3.16), (3.19) и являющийся индексом собственных функций пучка операторов (3.7), соответствующих точкам спектра $\pm i\omega_*$. На приведенных фигурах маркеры проставлены не на всех кривых в силу их плотности. Через D_j^p обозначены области (области неустойчивости), при значении параметров из которых пучок операторов (3.7), построенный по состоянию равновесия $u_* = u_*(K, \gamma) \in U_p(\gamma)$ имеет j точек спектра, принадлежащих правой открытой комплексной полуплоскости. Областью D_0 обозначена область, при значении параметров из которой устойчивы все имеющиеся состояния равновесия $u_* \in U_p(\gamma)$, $k = 1, 3, \dots$. Из фиг. 1, 3, 7 видно, что при $T = 0$ и малых θ (близких к 2π) области D_0 принадлежат точки, имеющие большие значения K . Применительно к начально-краевой задаче (2.1), (2.2) это означает, что при малых θ или близких к 2π бифуркация пространственно неоднородных автоколебательных решений возможна при достаточно больших значениях K . При увеличении T область D_0

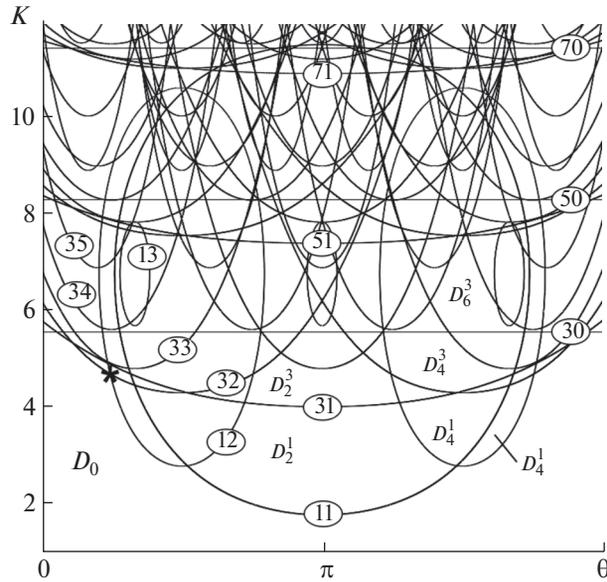


Фиг. 1. $D = 0.1, T = 0, \gamma = 0.25.$

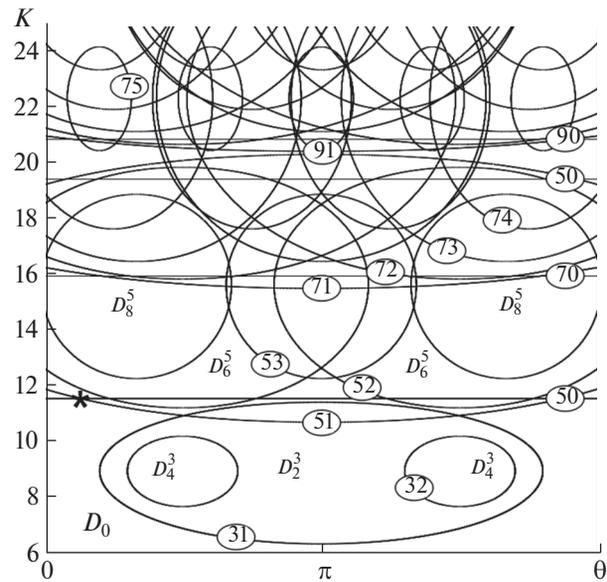
уменьшается, а области неустойчивости D_j^p увеличиваются в размерах. При этом появляются дополнительные области неустойчивости, обусловленные потерей устойчивости однородными состояниями равновесия по собственным функциям $u_j(\rho), j = 0, 1, \dots$, т.е. не зависящим от n , чего нет при $T = 0$. На фигурах эти области определяются горизонтальными прямыми. Эти прямые появляются парами при некоторых значениях K_{*j} , зависящих от T, D, γ . При увеличении T эти прямые расходятся — одна идет вверх, другая вниз, образуя область неустойчивости. При этом сначала потеря устойчивости происходит по собственной функции $u_0(\rho)$, т.е. не зависящей от ρ . Отметим, что при больших значениях T потеря устойчивости однородными состояниями равновесия возможна лишь по собственной функции $u_0(\rho)$. При уменьшении параметра D происходит увеличение количества областей неустойчивости (фиг. 7, 8). Из приведенных фигур видно, что потеря устойчивости однородным состоянием равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ может происходить с одновременным прохождением двух пар комплексно-сопряженных точек спектра пучка операторов (3.7) через мнимую ось комплексной плоскости. Это могут, например, быть точки, отмеченные на фиг. 3 знаком *. При этом одна из собственных функций может быть $u_0(\rho)$. Такая точка отмечена * на фиг. 5. Возможна также одновременная потеря устойчивости двумя состояниями равновесия. Такая точка отмечена * на фиг. 4. При уменьшении D таких состояний равновесия может быть больше.

4. БИФУРКАЦИИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (2.1), (2.2)

Изучим возможные бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (2.1), (2.2) из однородных состояний равновесия, обусловленные потерей их устойчивости. Воспользуемся для этого методом инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем [16]–[18] и теорией нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия [19]. При фиксированных T, D, γ выберем параметры K_*, θ_* таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия u_* начально-краевой задачи (2.1), (2.2) и при этом пучок операторов (3.7) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, где $\omega_* > 0$ определяется согласно (3.17). Пусть для определенности точка спектра $\lambda = i\omega_*$ удовлетворяет уравнению (3.9) при некотором $n > 0$. Это означает, что точка K_*, θ_* удовлетворяет уравнению (3.18) и находится на правой ветви замкнутой кривой, определяющей границу области устойчивости,



Фиг. 4. $D = 0.1, T = 0.5, \gamma = 0.75.$



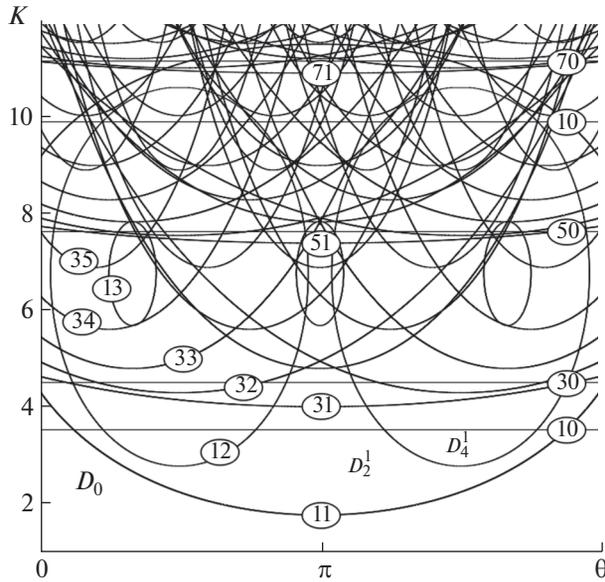
Фиг. 5. $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.25.$

$$b_2 = b_2(\varepsilon) = -(K_* + \varepsilon)\gamma \cos(u_*(\varepsilon)), \tag{4.3}$$

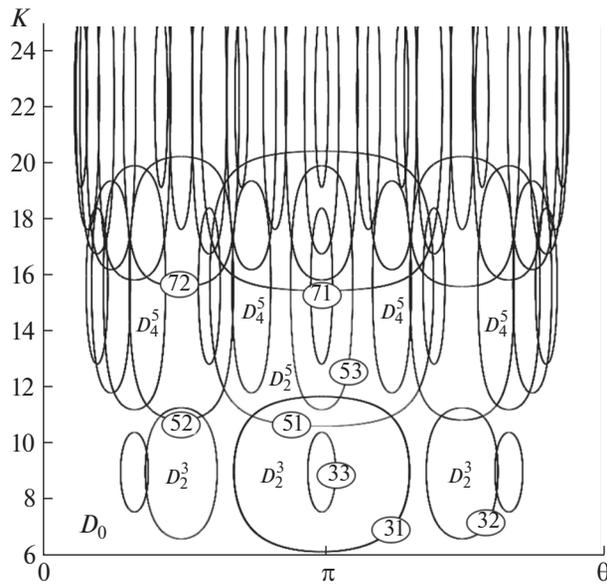
соответственно в дальнейшем будем использовать обозначение пучка операторов (3.7) $P(\lambda; \varepsilon)$ и уравнений (3.9) $P_{ij}(\lambda; \varepsilon)$.

Обозначим через $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon)$ точки спектра пучка операторов $P(\lambda; \varepsilon)$, удовлетворяющие условию $\lambda(0) = i\omega_*$. Им будут соответствовать собственные функции $u_1(\rho, n\phi), \bar{u}_1(\rho, n\phi)$; $\lambda(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε и

$$\begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \chi(\varepsilon) + i(\omega_* + \sigma(\varepsilon)) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + \dots = i\omega_* + \varepsilon(\chi_1 + i\sigma_1) + \dots, \\ \lambda_1 &= -b_1(u_*, \gamma)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)} / (1 - b(u_*, \gamma)Te^{i(n\theta_* - \omega_*T)}). \end{aligned} \tag{4.4}$$



Фиг. 6. $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.75$.



Фиг. 7. $D = 0.05, T = 0, \gamma = 0.25$.

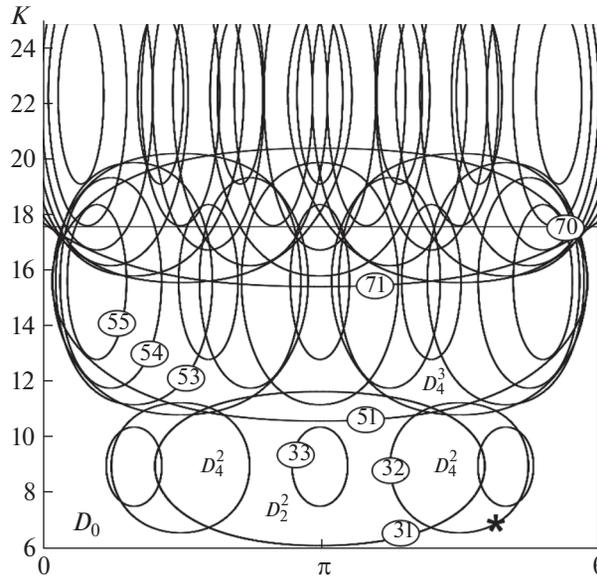
Рассмотрим присоединенную к (3.5), (3.6) (формально-сопряженную [20] с (3.5), (3.6)) начально-краевую задачу

$$v_t(\rho, \phi, t) - v(\rho, \phi, t) = -D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi, t) + bv_{-\theta}(\rho, \phi, t + T), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} v_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad v(\rho, 0, t) = v(\rho, 2\pi, t), \quad v_\phi(\rho, 0, t) = v_\phi(\rho, 2\pi, t), \\ v(\rho, \phi, s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; 0, T) \end{aligned} \tag{4.6}$$

относительно функции $v(\rho, \phi, t + s)$ в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^- = \{t : -\infty < t \leq 0\}$, $0 \leq s \leq T$ ($T > 0$), $v_{-\theta}(\rho, \phi, t) \equiv v(\rho, (\phi - \theta) \bmod(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Фазовым пространством начально-краевой задачи (4.5), (4.6) является пространство $H(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } 0 \leq s \leq T, \|v(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([0, T])\}$, обла-



Фиг. 8. $D = 0.05, T = 0/5, \gamma = 0.25.$

стью определения правой части уравнения (4.5) является пространство $H_0(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [0, T]), v(\rho, 0, s) = v(\rho, 2\pi, s), v_\phi(\rho, 0, s) = v_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s v(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$. Нормы в указанных пространствах вводятся по аналогии с $H(K_R; -T, 0), H_0(K_R; -T, 0)$. Начально-краевая задача (4.5), (4.6) корректно поставлена (и разрешима) в сторону убывания t .

Между элементами пространств $u(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ и $v(\rho, \phi, s) \in H(K_R; 0, T)$ введем скалярное произведение

$$\langle u(\rho, \phi, s), v(\rho, \phi, s) \rangle = (u(\rho, \phi, 0), v(\rho, \phi, 0))_{L_2} - b \int_{-T}^0 (u_\theta(\rho, \phi, \xi), v(\rho, \phi, \xi + T))_{L_2} d\xi. \tag{4.7}$$

Решения (3.5), (3.6) и (4.5), (4.6) связаны между собой следующим образом. Обозначим через $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$ решения (3.5), (3.6) и (4.5), (4.6) соответственно, определенные при $t > \tau_1, u(\rho, \phi, \tau_1 + s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ и $t < \tau_2, v(\rho, \phi, \tau_2 + s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; 0, T)$, и пусть при этом $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при $\tau_1 < t < \tau_2$ справедливо равенство

$$\langle u(\rho, \phi, t + s), v(\rho, \phi, t + s) \rangle = c \quad (c = \text{const}), \tag{4.8}$$

которое легко доказывается дифференцированием по t . В частности, для решений $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$, определенных при $-\infty < t < \infty$, равенства (4.8) выполнены при всех t .

Определяя теперь решения (4.5), (4.6) вида $v(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{pt}, p \in \mathbb{C}$, получаем характеристический пучок операторов

$$Q(p)v(\rho, \phi) \equiv pv(\rho, \phi) - v(\rho, \phi) + D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) - bv_{-\theta}(\rho, \phi)e^{pT}, \tag{4.9}$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Точки спектра (4.9) и точки спектра (3.7) могут быть упорядочены таким образом, что будут выполнены соотношения $p_j = -\bar{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots$. Таким образом, пучок операторов $Q(p; \epsilon)$ имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $p(\epsilon) = -\bar{\lambda}(\epsilon), \bar{p}(\epsilon)$, которым отвечают собственные функции $v_1(\rho, n\phi) = R_{n1}(\rho)e^{-in\phi}/(2\pi)^{1/2}, \bar{v}_1(\rho, n\phi)$.

Введем в рассмотрение функции

$$e_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{\lambda(\epsilon)s}, \quad \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \epsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0),$$

$$h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{p(\varepsilon)s} / P_{-n_1}^1(-p(\varepsilon); \varepsilon), \quad \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; 0, T), \quad (4.10)$$

$$\langle e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon), h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 1, \quad \langle e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0.$$

Обозначим через $H_+(\varepsilon)$ линейную оболочку функций (4.10), т.е. множество функций вида

$$u_+(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4.11)$$

а через $H_-(\varepsilon)$ множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0$, $\langle u_-(\rho, \phi), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0$. Очевидно $H_+(\varepsilon) \oplus H_-(\varepsilon) = H_0(K_R, -T, 0)$; $H_+(\varepsilon)$ определяет двумерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (3.5), (3.6) вида (4.11), в котором $z = z(t)$ – решение уравнения

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z. \quad (4.12)$$

Обозначим через $S_{u_*}(R) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \|u(\rho, \phi, s) - u_*\|_{H_0} < R\}$ шар радиуса R с центром в $u_* = u_*(K, \gamma)$ пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. В случае $u_* = 0$ будем использовать обозначение $S(R) = S_0(R)$. В дальнейшем $S_{\pm}(R; \varepsilon) = S(R) \cap H_{\pm}(\varepsilon)$.

Множество $M(\varepsilon) \subset S(R)$ будем называть инвариантным многообразием начально-краевой задачи (3.2), (3.3), если для ее решений $u(\rho, \phi, t + s)$ с начальными условиями $u(\rho, \phi, t_0 + s) \in M(\varepsilon)$ при некотором t_0 следует, что $u(\rho, \phi, t + s) \in M(\varepsilon)$ при всех $t > t_0$ пока $u(\rho, \phi, t + s) \in S(R)$.

Результаты работы [16] и монографий [17], [18] применительно к начально-краевой задаче (3.2), (3.3) позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $R > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет инвариантное многообразие $M(\varepsilon) \subset S(R)$, которое может быть представлено в виде*

$$u_- = G(u_+; \varepsilon), \quad u_{\pm} \in S_{\pm}(R; \varepsilon), \quad (4.13)$$

где нелинейный оператор $G(u_+; \varepsilon) (G(0; \varepsilon) \equiv 0)$ действует из $S_+(R; \varepsilon) \oplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_-(R; \varepsilon)$ и гладко зависит от входящих переменных (в смысле дифференцирования по Фреше).

Обозначим через $d(u(\rho, \phi, s); \varepsilon)$ расстояние от точки $u(\rho, \phi, s) \in S(R)$ до множества $M(\varepsilon)$ в метрике пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $u_0(\rho, \phi, s) \in S(R)$ – начальное условие решения $u(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (3.2), (3.3) ($u(\rho, \phi, s; \varepsilon) = u_0(\rho, \phi, s)$). Тогда $t > 0$*

$$d(u(\rho, \phi, t + s; \varepsilon); \varepsilon) < Kd(u_0(\rho, \phi, s); \varepsilon)e^{-\alpha t}, \quad (4.14)$$

где $K, \alpha > 0$ – некоторые постоянные.

Таким образом, поведение решений начально-краевой задачи (3.2), (3.3) с начальными условиями из $S(R)$ полностью определяется поведением решений на инвариантном многообразии $M(\varepsilon)$, которое может быть описано поведением решений некоторой двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Многообразие $M(\varepsilon)$, следуя [17], [18], будем называть центральным многообразием начально-краевой задачи (3.2), (3.3).

На основании представления (4.11) оператор $G(u_+; \varepsilon)$ будем рассматривать как оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$ ($G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv G(\rho, n\phi + 2\pi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$, $G(\rho, n\phi, s, 0, 0; \varepsilon) \equiv 0$), действующий из $\mathbb{C}^2 \oplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_+(R)$ и гладко зависящий от входящих переменных. С учетом этого и (4.12) представим оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$ и систему дифференциальных уравнений траекторий на $M(\varepsilon)$ в виде разложений

$$G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)\bar{z} + v_{20}(\cdot)z^2 + v_{11}(\cdot)z\bar{z} + v_{02}(\cdot)\bar{z}^2 + v_{30}(\cdot)z^3 + v_{21}(\cdot)z^2\bar{z} + v_{12}(\cdot)z\bar{z}^2 + v_{03}(\cdot)\bar{z}^3 + g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon), \quad (4.15)$$

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z + d(\varepsilon)z^2\bar{z} + Z(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv Z^*(z, \bar{z}; \varepsilon), \quad (4.16)$$

где $v_{kj}(\cdot) = v_{kj}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$, $v_{jk} = \bar{v}_{kj}(\cdot)$, $\|g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)\|_{H_1} = o(|z|^3)$, $|Z(z, \bar{z}; \varepsilon)| = o(|z|^3)$. Система (4.16) представлена в нормализованном до кубических слагаемых виде [16].

Отметим следующее. Пусть $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ – решение начально-краевой задачи (3.2), (3.3). Продолжим его периодически по ϕ на \mathbb{R} . Функция $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon)$, где c – произвольное вещественное число, также является решением (3.2), (3.3), в чем легко убедиться непосредственно, обозначив $\phi_1 = \phi + c$ и с учетом равенства $\Delta_{\rho, \phi} u^* = \Delta_{\rho, \phi_1} u^*$. При этом, если $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, то $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, так как согласно (3.8), (4.10), (4.11) $u^*_+(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in H_+(\varepsilon)$, где $u^*_+(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ – проекция $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ на $H_+(\varepsilon)$ по направлению $H_-(\varepsilon)$. Следствием этого являются справедливые для любого вещественного c тождества

$$g(\rho, n(\phi + c), s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv g(\rho, n\phi, s, ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon), \quad Z(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv zZ_1(z, \bar{z}; \varepsilon), \tag{4.17}$$

$$Z_1(ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon) \equiv Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon).$$

Для построения центрального многообразия и системы дифференциальных уравнений траекторий на нем воспользуемся подходом, используемым в работах [21], [22]. Отметим, что близкая к указанному подходу схема построения уравнений траекторий на центральном многообразии для дифференциально-разностных уравнений приведена в [18]. В соответствии со сказанным перейдем от (3.2), (3.3) к эквивалентной начально-краевой задаче в области $\bar{K}_R \times [-T, 0] \times \mathbb{R}^+$, положив $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$,

$$w_t(\rho, \phi, s, t) = w_s(\rho, \phi, s, t),$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D\Delta_{\rho\phi} w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)w_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, t) + b_2(\varepsilon)w_{\theta_*}^2(\rho, \phi, -T, t) + b(\varepsilon)w_{\theta_*}^3(\rho, \phi, -T, t)/6 + \dots, \tag{4.18}$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, \quad w(\rho, 0, s, t) = w(\rho, 2\pi, s, t), \quad w_\phi(\rho, 0, s, t) = w_\phi(\rho, 2\pi, s, t),$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0). \tag{4.19}$$

Условие принадлежности траекторий (4.16) краевой задаче (4.18), (4.19) в силу многообразия (4.15) определяет тождества

$$\frac{dG(\cdot)}{dt} \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial z} Z^*(z, \bar{z}; \varepsilon) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}} \bar{Z}^*(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s}, \tag{4.20}$$

$$G_s(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv -G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi} G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) - b(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^2/2 + b(\varepsilon)G_{\theta_*}(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^3/6 + \dots, \tag{4.21}$$

для определения коэффициентов разложений (4.15), (4.16). Приравнивая в (4.20), (4.21) коэффициенты при одинаковых степенях z, \bar{z} получаем рекуррентную последовательность краевых задач для определения входящих в (4.15), (4.16) функций $v_{jk}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0)$ и $d(\varepsilon)$, гладко зависящих от ε . При первых степенях равенства выполнены в силу (4.11), (4.12). Приравняв коэффициенты при z^2 , получим для определения $v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$2\lambda(\varepsilon)v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{20s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{20s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi} v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{20\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T} R_{n1}^2(\rho)e^{i2n\phi}/(4\pi), \tag{4.22}$$

которая имеет единственное решение

$$v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = w_{20}(\rho; \varepsilon)e^{i2n\phi + 2\lambda(\varepsilon)s}/(2\pi), \quad w_{20}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\varepsilon)R_{2nj}(\rho),$$

$$p_{2nj}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T} (R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho))/(2\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T})/2.$$

Аналогично для определения $v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ имеем краевую задачу

$$(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{11s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{11s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi} v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{11\theta_*}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T} R_{n1}^2(\rho)/(2\pi), \tag{4.23}$$

единственное решение которой имеет вид

$$v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \equiv w_{11}(\rho; \varepsilon)e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s} / (2\pi)w_{11}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\varepsilon)R_{0j}(\rho),$$

$$p_{0j}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}).$$

С учетом равенства $v_{02}(\rho, n\phi; \varepsilon) = \bar{v}_{20}(\rho, n\phi; \varepsilon)$, приравняем теперь в (4.20), (4.21) коэффициенты при z^3 . В результате получим для определения $v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$3\lambda(\varepsilon)v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{30s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad v_{30s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{30\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6)e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T} e^{i3n\phi} / (2\pi)^{3/2}, \quad (4.24)$$

которая имеет единственное решение

$$v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = w_{30}(\rho; \varepsilon)e^{i3n\phi+3\lambda(\varepsilon)s} / (2\pi)^{3/2}, \quad w_{30}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{3nj}(\varepsilon)R_{3nj}(\rho),$$

$$p_{3nj}(\varepsilon) = e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T} (b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6, R_{3nj}(\rho)) / (3\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{3nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i3n\theta_*-3\lambda(\varepsilon)T}).$$

Приравняв теперь в (4.20), (4.21) коэффициенты при $z^2\bar{z}$, получим краевую задачу вида

$$e_1(\rho, n\phi, s)d(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{21s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad (4.25)$$

$$v_{21s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = -v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{21\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2}. \quad (4.26)$$

При $d(\varepsilon) \equiv 0$ краевая задача (4.25), (4.26) не разрешима в точке $\varepsilon = 0$. Разрешимости добиваемся выбором $d(\varepsilon)$. Общее решение уравнения (4.25) имеет вид

$$v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s} (w_{21}(\rho)e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2} + d(\varepsilon) \int_0^s e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s_1} e_{n1}(\rho, \phi, s_1) ds_1), \quad (4.27)$$

где $w_{21}(\rho)e^{in\phi} / (2\pi)^{3/2} \in \tilde{H}_1(K_R)$ произвольная функция. Подставив (4.27) в (4.26), получим

$$L(\varepsilon)w_{21} \equiv (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))w_{21} + w_{21} - D \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dw_{21}}{d\rho} \right) + \frac{n^2}{\rho^2} w_{21} - b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} w_{21} = f_{21}(\rho; \varepsilon) \equiv -R_{n1}(\rho)(1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)))d(\varepsilon)2\pi + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}. \quad (4.28)$$

Краевая задача (4.28) разрешима не всегда, так как $L(0)R_{n1}(\rho) = 0$, а также $L^*(0)R_{n1}(\rho) = 0$, где $L^*(0)$ – сопряженный с $L(0)$ в смысле скалярного произведения (3.8) оператор. Необходимым и достаточным условием разрешимости является равенство $(f_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$, из которого находим

$$d(\varepsilon) = a(\varepsilon) + ic(\varepsilon) = e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho)) / (1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T} (1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)))) / (2\pi) \quad (4.29)$$

и решение

$$w_{21}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=2}^{\infty} p_{nj}(\varepsilon)R_{nj}(\rho), \quad p_{nj}(\varepsilon) = ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}, R_{nj}(\rho)) / (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{nj}^2 + b(\varepsilon)e^{in\theta_*(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}),$$

которое определяется однозначно и удовлетворяет условию $(w_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$.

Проанализируем поведение решений уравнения (4.16). Для выбранной точки (K_*, θ_*) значение $\pi/n < \theta_* < 3\pi/(2n)$. Поэтому $\cos(n\theta_*) < 0$. Знак $b_1(u_*, \gamma)$ в (4.5), (4.4) определяется знаком про-

изводной $b_{u_*}(u_*, \gamma)$. Поэтому $b_1(u_*, \gamma) > 0$ на нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (3.5), (3.6) (области D_0), $b_1(u_*, \gamma) < 0$ на верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области D_0 . Аналогичный знак имеет величина χ_1 в (4.4). Численный анализ, выполненный для различных значений параметров D, T, γ , показал, что в точках K_*, θ_* границы области устойчивости решений (3.5), (3.6) $a(0) < 0$. Поэтому при прохождении нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости в сторону увеличения параметра $K(\varepsilon > 0)$ в уравнении (4.16) происходит рождение устойчивого периодического решения (прямая бифуркация Андронова-Хопфа). Положим в (4.16) $z = re^{i\tau}$. В результате с учетом (4.17) будем иметь систему уравнений

$$\dot{r} = r(\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(r^2; \varepsilon)), \quad \dot{\tau} = \omega_* + \sigma(\varepsilon) + c(\varepsilon)r^2 + T(r^2; \varepsilon), \tag{4.30}$$

где $Z_1(re^{i\tau}, re^{-i\tau}; \varepsilon) \equiv Z_1(r, r; \varepsilon) \equiv Z_1(r^2; \varepsilon) \equiv R(r^2; \varepsilon) + iT(r^2; \varepsilon)$, $|Z_1(r^2; \varepsilon)| = a(r^2) -$ гладкие по r^2 и ε функции. Из первого уравнения (4.30) находим асимптотически устойчивое состояние равновесия $r^2(\varepsilon) = r_*^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ($r_*^2 = -\chi_1/a(0)$) и подставляем во второе уравнение. В результате имеем асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение уравнения (4.16)

$$z_*(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} r_* (1 + O(\varepsilon)) e^{i\tau}, \quad \dot{\tau} = \omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon^2) \quad (\omega_{*1} = \sigma_1 + c(0)r_*^2) \tag{4.31}$$

периода $2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$.

На верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости бифуркация рождения устойчивого периодического решения происходит при уменьшении параметра $K(\varepsilon < 0)$, т.е. при переходе из области неустойчивости в область устойчивости (при увеличении K происходит “влипание” устойчивого периодического решения в неустойчивое состояние равновесия (обратная бифуркация Андронова-Хопфа). Аналогичная ситуация наблюдается и при прохождении левой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (3.5), (3.6). В этом случае уравнению (3.9) при выбранных K_*, θ_* , n удовлетворяет корень $\lambda = -i\omega_*$, $\omega_* > 0$.

Подставив (4.31) в (4.15), получим периодическое решение $w_*(\rho, n\phi, s, \tau; \varepsilon^{1/2})$ начально-краевой задачи (4.18), (4.19), которое с учетом (4.17) может быть записано в виде $w_*(\rho, n\phi + \tau, s; \varepsilon^{1/2})$, а согласно (4.18) в виде $u_*(\rho, n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s); \varepsilon^{1/2})$. Покажем, что это решение может быть представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Выпишем в явном виде с учетом (4.15), (4.18), (4.31) коэффициенты разложения $u_*(\cdot)$ при $\varepsilon^{1/2}$ и ε . В результате получим

$$u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} r_* R_{nl}(\rho)(e^{i\psi} + e^{-i\psi})/(2\pi)^{1/2} + \varepsilon r_*^2 (w_{11}(\rho; 0) + w_{21}(\rho; 0)e^{i2\psi} + \bar{w}_{21}(\rho; 0)e^{-i2\psi})/(2\pi) + \varepsilon^{3/2} w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}), \quad \psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1})(t + s). \tag{4.32}$$

Введем в рассмотрение пространство $H_{an}(K_R) \subset H^2(K_R)$ вещественных аналитических функций, состоящее из таких бесконечно дифференцируемых функций $u(\rho, \psi)$, $\partial^k u(\rho, 0)/\partial \psi^k = \partial^k u(\rho, 2\pi)/\partial \psi^k$, $k = 0, 1, \dots$, для которых конечна норма

$$\|u(\rho, \psi)\|_{H_{an}} = \sup_{k=1,2,\dots} \left(\|u(\rho, \psi)\|_C, \left(1/(k!) \left\| \partial^k u(\rho, \psi) / \partial \rho^{k_1} \partial \psi^{k_2} \right\|_C \right)^{1/k} \right) < \infty.$$

Очевидно, что $H_{an}(K_R)$ – банахово пространство. Продолжим функции $u(\rho, \psi)$ по переменной ψ на \mathbb{R} 2π -периодически. Соответствующее пространство 2π -периодических по ψ функций $u(\rho, \psi)$ обозначим $H_{an}(K_R^*)$.

В (4.32) обозначим $\rho_* = \rho_1$, $\omega_{*1} = \omega_1$ и считая $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = w(\rho, s) \in H_{an}(K_R^*)$ искомой функцией, а ρ_1, ω_1 параметрами, подставим (4.32) в (3.2). Слагаемые при степенях $\varepsilon^{1/2}$ и ε сократятся в

силу выбора функций $w_{jk}(\rho; \varepsilon)$. Сократив полученное равенство на $\varepsilon^{3/2}$, получим для определения $w(\rho, s)$ следующее операторное уравнение в $H_{an}(K_R^*)$:

$$\begin{aligned}
 Bw &\equiv w_\psi(\rho, \psi)\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \psi}w(\rho, \psi) + b(0)w(\rho, \psi + n\theta - \omega_*T) = \Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \varepsilon^{1/2}) \equiv \\
 &\equiv f_1(\rho)e^{i\psi} + \bar{f}_1(\rho)e^{-i\psi} + f_3(\rho)e^{i3\psi} + \bar{f}_3(\rho)e^{-i3\psi} + \mu r_1 F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), \\
 f_1(\rho) &= -((1 - Tb(0)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)})i\omega_1 + b_1(u_*, \gamma)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)}r_1 R_{n1}(\rho)/(2\pi)^{1/2} + \\
 &+ r_1^3(b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; 0) + w_{11}(\rho; 0))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)}/(2\pi)^{3/2},
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

где $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $f_3(\rho)$, $f_{3p}(R) = 0$ – аналитическая функция ρ , $F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) : H_{an}(K_R^*) \rightarrow H_{an}(K_R^*)$ – нелинейный ограниченный аналитический по w и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор (определение см., например, в [23]).

Функции $w_1(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{i\psi}/(2\pi)^{1/2}$, $w_{-1}(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{-i\psi}/(2\pi)^{1/2}$ и только они (с точностью до их линейной комбинации) удовлетворяют уравнению $Bw_j(\rho, \psi) = 0$, $j = -1, 1$, а также уравнению $B^*w_j(\rho, s) = 0$, $j = -1, 1$, где $B^*w \equiv -w_\psi\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \psi}w + b(0)w(\rho, \psi - n\theta + \omega T)$ сопряженный с B оператор: $(Bw_2, w_3)_{L_2} = (w_2, B^*w_3)_{L_2}$, $w_2, w_3 \in H_{an}(K_R^*)$. В связи с этим операторное уравнение $Bw = G(\rho, \psi)$, $G(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $(G(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $j = -1, 1$. Решение, удовлетворяющее условию $(w(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $j = -1, 1$, будет единственным и будет определяться в виде $w(\rho, \psi) = B^{-1}G(\rho, \psi)$. При этом обратный оператор B^{-1} будет вполне непрерывным. Условия разрешимости операторного уравнения (4.33)

$$(\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0, \quad j = -1, 1,
 \tag{4.34}$$

однозначно определяют аналитические по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) нелинейные функционалы

$$\rho_1(w; \mu) = \rho_* + \mu\rho_{*1}(w(\rho, \psi); \mu), \omega_1(w; \mu) = \omega_{*1} + \mu\omega_{*2}(w(\rho, \psi); \mu).
 \tag{4.35}$$

Подставим (4.35) в правую часть уравнения (4.33). В результате будем иметь удовлетворяющий условиям (4.35) нелинейный ограниченный аналитический по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu)$, $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); 0) \equiv \Phi_0(\rho, \psi)$. Это позволяет записать операторное уравнение (4.33) в виде

$$w(\rho, \psi) = B^{-1}\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) \quad w(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*) \quad (w(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0, \quad j = -1, 1.
 \tag{4.36}$$

Осталось применить к (4.33) теорему о неявной функции для нелинейных уравнений в банаховых пространствах, доказательство которой см., например, в [23]. Полученное решение $w(\rho, \psi; \mu)$ будет аналитической функцией при $|\mu| < \mu_0$. Подставив $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$ в (4.32), получим периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, которое представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$

$$\begin{aligned}
 u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon^{1/2}u_1(\rho, \psi) + \varepsilon u_2(\rho, \psi) + \varepsilon^{3/2}u_3(\rho, \psi) + \dots, \\
 \psi &= n\varphi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + \varepsilon^2\omega_{*2} + \dots)(t + s), \quad u_1(\rho, \psi) = (2/\pi)^{1/2}r_*R_{n1}(\rho)\cos(\psi).
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Функции $u_j(\rho, \psi)$ и величины ω_{*j} , входящие в (4.37), могут быть получены до любого порядка непосредственно. Для этого в (4.37) необходимо заменить $r_* \rightarrow r_* + \varepsilon r_{*1} + \varepsilon^2 r_{*2} + \dots$ и подставить в начально-краевую задачу (3.2), (3.3). Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, получаем рекуррентную последовательность операторных уравнений $Bu_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi)$, где $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi))$ при $j = 2k$ и $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi), r_{*k}, \omega_{*k})$ при $j = 2k + 1$, $k = 1, 2, \dots$. При $j = 2k$ операторные уравнения однозначно разрешимы, при $j = 2k + 1$ условия разрешимости $(G_j(\rho, \psi), w_p(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$, однозначно определяют r_{*k} , ω_{*k} , а решение, удовлетворяющее условиям $(u_j(\rho, \psi), w_p(\rho, s))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$, определяется однозначно. При этом $u_{2k}(\rho, \psi)$ содержат лишь четные гармоники по ψ до порядка $2k$ включительно, а $u_{2k+1}(\rho, \psi)$ – лишь нечетные гармоники по ψ до порядка $2k + 1$ включительно.

Решение вида (4.37) представляет собой ротационную волну, вращающуюся по часовой стрелке.

Если точка K_* , θ_* будет находиться на границе области D_0 , соответствующей левой ветви замкнутой кривой, имеющей минимум в точке $\theta = \pi/n$, и при этом пучок операторов (3.7) имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, то все рассуждения почти дословно повторяются. В этом случае начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет при $\varepsilon > 0$ в окрестности нулевого состояния равновесия периодическое решение вида (4.37), в котором $\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$, т.е. это решение представляет собой ротационную волну, вращающуюся против часовой стрелки.

Пусть теперь $\theta_* = \pi/n$. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет двухкратную нулевую точку спектра, которой отвечают две собственные функции $u_{n1}(\rho, n\phi)$, $\bar{u}_{n1}(\rho, n\phi)$. В этом случае система уравнений (4.16) траекторий на центральном многообразии строится аналогично, при этом имеем, в чем легко убедиться непосредственно с учетом (4.17), $\text{Im } \lambda(\varepsilon) = 0$, $\text{Im } d(\varepsilon) = 0$, $\text{Im } Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon) = 0$. В результате, перейдя в (4.16) к полярным координатам $z = re^{it}$, имеем систему уравнений

$$\dot{r} = (\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(\rho^2; \varepsilon))r, \quad \dot{t} = 0(R(\rho^2; \varepsilon) \equiv Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon)), \quad (4.38)$$

которая имеет семейство устойчивых состояний равновесия $r(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} r_*(1 + O(\varepsilon))$, $t = c$, где c — произвольная постоянная, $\rho_* = (-\chi_1/a(0))^{1/2}$. Этому семейству состояний равновесия в начально-краевой задаче (3.2), (3.3) соответствует однопараметрическое семейство устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия, определяемых формулой (4.37), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv \text{const}$.

Таким образом, при изменении θ_* вдоль границы области D_0 при $K = K_* + \varepsilon$ и проходя точку $\theta_* = \pi/n$, в окрестности состояния равновесия $u_* = u_*(K_*(\theta), \gamma)$ устойчивая ротационная волна (пространственно неоднородное периодическое решение периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$) меняет направление вращения, проходя через однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. При этом период периодического решения $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \pi/n$.

Сказанное сформулируем окончательно в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть при выбранных D , T , γ параметры K_* , θ_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ и при этом уравнение (3.9) имеет решение $\lambda = i\omega_*(-i\omega_*)$, $\omega_* > 0$ при некотором $n > 0$, пусть также $\chi_1 > 0$ и $a(0) < 0$. Тогда существуют такие ε_0 , $R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет пространственно неоднородное периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) \in H_{an}(K_R)$, $\psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$ ($\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$), периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$ вида (4.37). Все остальные решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями из $S_{u_*}(R)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к этому периодическому решению в норме $H_0(K_R; -T, 0)$. Это решение является ротационной волной, вращающейся по часовой стрелке (против часовой стрелки). Если при этом $\theta_* = \pi/n$, то в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (2.1), (2.2) имеет однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия, задаваемых формулой (4.37), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv \text{const}$. При прохождении параметром θ_* точки π/n период периодического решения (4.37) — $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$, и ротационная волна меняет направление вращения.

Рассмотрим теперь случай, когда точка K_* , θ_* границы области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ (2.1), (2.2) является точкой пересечения замкнутых кривых, определяющих границу области D_0 и соответствующих различным значениям n . Это могут быть, например, точки, отмеченные * на фиг. 3. В этом случае пучок операторов (3.7) имеет две пары комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_{*j}$, $\omega_{*j} > 0$, $j = 1, 2$, которым отвечают собственные функции

$e_{n_j}(\rho, \phi), \bar{e}_{n_j}(\rho, \phi), j = 1, 2$, возможен также случай, когда одна из пар комплексно сопряженных точек спектра превращается в двухкратную нулевую точку. При этом n_1 и n_2 всегда связаны соотношением $n_1 = n, n_2 = n + 1$, а уравнению (3.9) может удовлетворять как $i\omega_{*j}$, так и $-i\omega_{*j}$. Отметим также, что между ω_{*1} и ω_{*2} невозможны резонансные соотношения $\omega_{*1}/\omega_{*2} = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$. Это несложно показать, предположив противное и получив противоречие из равенства выражений (3.18), (3.19) для разных n . Поэтому дальнейший анализ будет проводиться по “нерезонансной” схеме.

Рассмотрим сначала случай двух пар комплексно сопряженных точек спектра пучок операторов (3.7). При этом для определенности считаем, что уравнению (3.9) при n и $n + 1$ удовлетворяют соответственно $i\omega_{*1}$ и $i\omega_{*2}$ и $\omega_{*j} > 0, j = 1, 2$. Этому условию удовлетворяет, например, точка, отмеченная на фиг. 3 и имеющая большую координату θ . Положим $K = K_* + \epsilon_1, \theta = \theta_* + \epsilon_2$, где ϵ_1, ϵ_2 – малые параметры, в дальнейшем обозначим $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Из (3.9) находим

$$\begin{aligned} \lambda_j(\bar{\epsilon}) &= \chi_j(\bar{\epsilon}) + i(\omega_{*j} + \sigma_j(\bar{\epsilon})) = i\omega_{*j} + \epsilon_1\lambda_{1j}^{(1)} + \epsilon_2\lambda_{1j}^{(2)} + \dots, \\ \lambda_{1j}^{(1)} &= -b_1(u_*, \gamma)e^{iq\theta_*}, \quad \lambda_{1j}^{(2)} = -b(u_*, \gamma)ipe^{iq\theta_*}, \quad q = n + j - 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} e_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon}) &= u_1(\rho, q\phi)e^{\lambda_j(\bar{\epsilon})s}, \quad \bar{e}_{1j}(\rho, q\phi, s; \bar{\epsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; -T, 0), \\ h_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon}) &= u_1(\rho, q\phi)e^{p_j(\bar{\epsilon})s} / P'_{-q_1}(-p_j(\bar{\epsilon}); \bar{\epsilon}), \quad \bar{h}_{1j}(\rho, q\phi, s; \bar{\epsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; 0, T), \\ & q = n + j - 1, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.40}$$

В этом случае $H_+(\bar{\epsilon})$ есть множество функций вида

$$u_+(\rho, \phi, s) = e_{11}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})z_1 + \bar{e}_{11}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})\bar{z}_1 + e_{12}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})z_2 + \bar{e}_{12}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})\bar{z}_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{4.41}$$

а $H_-(\bar{\epsilon})$ – соответственно множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon}) \rangle = 0, \langle u_-(\rho, \phi, s), \bar{h}_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon}) \rangle = 0, j = 1, 2$ ($H_+(\bar{\epsilon}) \oplus H_-(\bar{\epsilon}) = H_0(K_R; -T, 0)$); $H_+(\bar{\epsilon})$ определяет четырехмерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, s, t; \bar{\epsilon})$ начально-краевой задачи (3.5), (3.6) вида (4.41), в котором $z_j = z_j(t)$ – решение уравнений

$$\dot{z}_j = \lambda_j(\bar{\epsilon})z_j, \quad j = 1, 2. \tag{4.42}$$

Пусть $S_{\pm}(R)(\bar{\epsilon}) = S(R) \cap H_{\pm}(\bar{\epsilon})$. В рассматриваемом случае начально-краевая задача (3.2), (3.3) имеет четырехмерное центральное (инвариантное) многообразие $M(\bar{\epsilon}) \subset S(R)$, которое определено теоремами 1, 2 применительно к рассматриваемому случаю и которое представимо в виде

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) &= e_{m1}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})z_1 + \bar{e}_{m1}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})\bar{z}_1 + e_{n+11}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})z_1 + \\ & + \bar{e}_{n+11}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon})\bar{z}_1 + v_{2000}(\cdot)z_1^2 + v_{1100}(\cdot)z_1\bar{z}_1 + v_{0200}(\cdot)\bar{z}_1^2 + \dots \\ & + v_{0030}(\cdot)z_2^3 + v_{0021}(\cdot)z_2^2\bar{z}_2 + v_{0012}(\cdot)z_2\bar{z}_2^2 + v_{0003}(\cdot)\bar{z}_2^3 + g(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}), \end{aligned} \tag{4.43}$$

где $v_{jk}(\cdot) = v_{jk}(\rho, \phi, s; \bar{\epsilon}), v_{jk}(\cdot) = \bar{v}_{kj}(\cdot), \|g(\rho, \phi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})\|_{H_1} = o(|z|^3), |z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая поведение траекторий (3.2), (3.3) на (4.43) и записанная в нормализованной форме до кубических слагаемых включительно [16], имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1(\bar{\epsilon})z_1 + d_{11}(\bar{\epsilon})|z_1|^2z_1 + d_{12}(\bar{\epsilon})|z_2|^2z_1 + Z_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) \equiv Z_1^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}), \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2(\bar{\epsilon})z_2 + d_{21}(\bar{\epsilon})|z_1|^2z_2 + d_{22}(\bar{\epsilon})|z_2|^2z_2 + Z_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) \equiv Z_2^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}), \end{aligned} \tag{4.44}$$

где $|Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})| = o(|z|^3), j = 1, 2$. По аналогии с (4.17) имеем

$$\begin{aligned} g(\rho, \phi + c, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) &\equiv g(\rho, \phi, z_1e^{inc}, \bar{z}_1e^{-inc}, z_2e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2e^{-i(n+1)c}; \bar{\epsilon}), \\ Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) &\equiv z_j Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}), \\ Z_{j1}(z_1e^{inc}, \bar{z}_1e^{-inc}, z_2e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2e^{-i(n+1)c}; \bar{\epsilon}) &\equiv Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.45}$$

В рассматриваемом случае условие принадлежности траекторий системы уравнений (4.44) начально-краевой задачи (3.2), (3.3) в силу многообразия (4.43) определяют тождества

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial z_j} Z_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) \right) + G(\cdot) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s}, \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} G_s(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) &\equiv -G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + D\Delta_{\rho\phi} G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) - \\ &- b(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon}) + b_2(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})^2/2 + \\ &+ b(\epsilon_1)G_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\epsilon})^3/6 + \dots, \end{aligned} \tag{4.47}$$

для определения коэффициентов разложений (4.43), (4.44). Приравнявая в (4.46), (4.47) коэффициенты при одинаковых степенях $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$, получаем для определения функций, входящих в (4.43), рекуррентную последовательность краевых задач аналогичных (4.22), (4.26). Часть этих краевых задач однозначно разрешима автоматически, однозначной разрешимости другой части добиваемся выбором коэффициентов $d_{jk}(\bar{\epsilon})$ (однозначным) по аналогии с краевой задачей (4.26). Опуская громоздкие вычисления, приведем необходимые для бифуркационного анализа выражения для коэффициентов $d_{jk}(\bar{\epsilon}) = a_{jk}(\bar{\epsilon}) + ic_{jk}(\bar{\epsilon})$:

$$\begin{aligned} d_{11}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{2000}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n1}(\rho) + b(\epsilon_1)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho))/(2\pi), \\ d_{12}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (2\pi) / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon})R_{n1}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{1001}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n+11}(\rho)) + b(\epsilon_1)R_{n+11}^2(\rho)R_{n1}(\rho), R_{n1}(\rho)), \\ d_{21}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (2\pi) / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))) \times \\ &\times (b_2(\epsilon_1)(w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon})R_{n+11}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{0110}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n11}(\rho)) + b(\bar{\epsilon})R_{n1}^2(\rho)R_{n+11}(\rho), R_{n+11}(\rho)), \\ d_{22}(\bar{\epsilon}) &= e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (1 + b(\epsilon_1)e^{in(\theta_* + \epsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} (1 - e^{(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}) / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))) (b_2(\epsilon_1) \times \\ &\times (w_{0020}(\rho; \bar{\epsilon}) + w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon}))R_{n+11}(\rho) + b(\epsilon_1)R_{n+11}^3(\rho)/2, R_{n+11}(\rho))/(2\pi), \\ w_{2000}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\bar{\epsilon})R_{2nj}(\rho), \quad p_{2nj}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i2n(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\epsilon})T} / (2\lambda_1(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\epsilon_1)e^{i2n(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\epsilon})T})/2, \\ w_{1100}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\epsilon})R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{-(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\bar{\epsilon}_1)e^{-(\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\epsilon}))T}), \\ w_{0020}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2(n+1)j}(\bar{\epsilon})R_{2(n+1)j}(\rho), \quad p_{2(n+1)j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{2(n+1)j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i2(n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\epsilon})T} / (2\lambda_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2(n+1)j}^2 + b(\epsilon_1)e^{i2(n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\epsilon})T})/2, \\ w_{0011}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\epsilon})R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{-(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\epsilon_1)e^{-(\lambda_2(\bar{\epsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\epsilon}))T}), \\ w_{1010}(\rho; \bar{\epsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2n+1j}(\bar{\epsilon})R_{2n+1j}(\rho), \quad p_{2n+1j}(\bar{\epsilon}) = (R_{n1}(\rho)R_{n+11}(\rho), R_{2n+1j}(\rho)) \times \\ &\times b_2(\epsilon_1)e^{i(2n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}) + 1 + D\gamma_{2n+1j}^2 + b(\epsilon_1)e^{i(2n+1)(\theta_* + \epsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\epsilon}) + \lambda_2(\bar{\epsilon}))T}), \end{aligned}$$

$$w_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\bar{\varepsilon}) R_{1j}(\rho), \quad p_{1j}(\varepsilon) = (R_{n1}(\rho) R_{n+1}(\rho), R_{1j}(\rho)) \times \\ \times b_2(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T} / (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{1j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T}), \\ w_{1001}(\rho; \bar{\varepsilon}) = \bar{w}_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}).$$

Исследуем поведение решений системы уравнений (4.44). Перейдем в плоскости параметров $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и плоскостях z_1 и z_2 к полярным координатам, соответственно положив

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos(\alpha), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \sin(\alpha), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad (4.48)$$

и $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j e^{i\tau_j}$, $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Запишем систему уравнений (4.44) с учетом (4.39), (4.45), (4.48) в новых переменных и в зависимости от новых параметров

$$\dot{\rho}_j = \varepsilon(\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) + a_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + a_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon))\rho_j, \quad (4.49)$$

$$\dot{\tau}_j = \omega_{*j} + \varepsilon(\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) + b_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + b_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon T_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)), \quad j = 1, 2. \quad (4.50)$$

В (4.49), (4.50) имеем $\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) = \chi_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$, $\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) = \sigma_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$ – непрерывные при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функции,

$$a_{jk}(\alpha, \varepsilon) + ib_{jk}(\alpha, \varepsilon) = d_{jk}(\alpha, \varepsilon)(d_{jk}(\alpha, 0) = d_{jk}(0)), \quad \varepsilon^2(R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon) + iT_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)) = \\ = Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{-i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{i\tau_2}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{-i\tau_2}; \alpha, \varepsilon) \equiv Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_2, \varepsilon^{1/2}\rho_2; \alpha, \varepsilon).$$

Поведение решений системы уравнений (4.49), (4.50) при малых ε определяется в основном (см., например, [24]) поведением решений главной части уравнений “медленных” переменных (4.49)

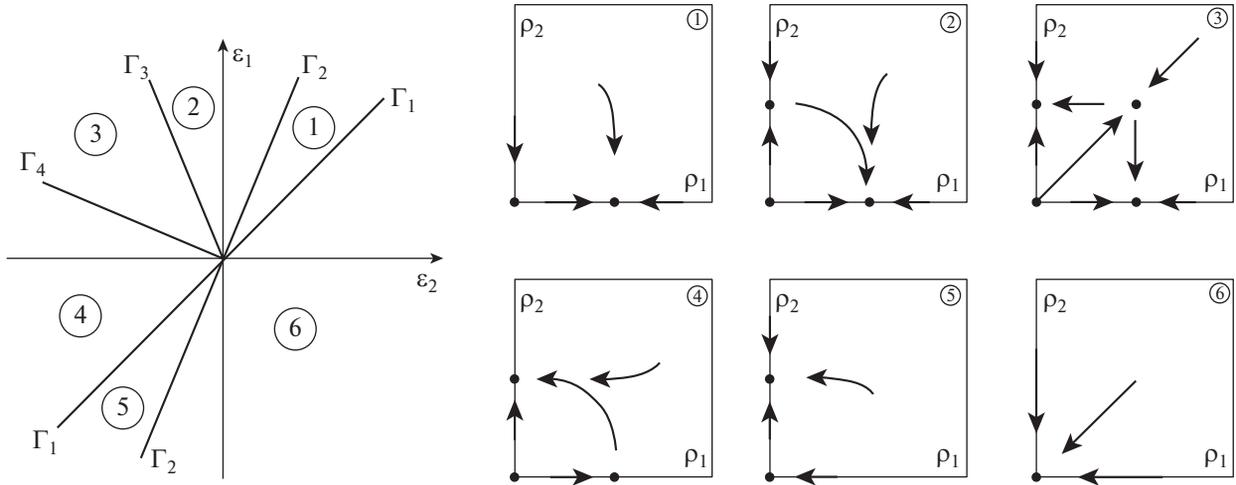
$$\dot{\rho}_j = (\chi_j^*(\alpha) + a_{j1}(0)\rho_1^2 + a_{j2}(0)\rho_2^2)\rho_j, \quad j = 1, 2, \quad (4.51)$$

где $\chi_j^*(\alpha) = \chi_j^1(\alpha, 0)$. Так, экспоненциально устойчивым состояниям равновесия (4.51) вида $(\rho_{*1}, 0)$ и $(0, \rho_{*2})$ при малых ε в (4.49), (4.50) и системе уравнений (4.44) соответствуют периодические решения с периодами, близкими к $2\pi/\omega_{*1}$ и $2\pi/\omega_{*2}$, соответственно, и того же характера устойчивости. Состоянию равновесия вида (ρ_{*1}, ρ_{*2}) , $\rho_{*j} > 0$ в (4.49), (4.50) и (4.44) соответствует двумерный инвариантный тор, характер устойчивости которого определяется устойчивостью (неустойчивостью) состояния равновесия. Отметим, что система уравнений (4.51) может иметь периодические решения лишь в исключительных (вырожденных) случаях. Численный анализ, выполненный для различных значений параметров T , D , γ показал, что в точках K_* , θ_* , являющихся точками пересечения замкнутых ветвей границы области D_0 , отвечающих различным значениям $n, n + 1$, всегда выполнены следующие неравенства: $a_{jk}(0) < 0$, $j, k = 1, 2$, $\Delta = a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) < 0$. Эти условия считаем в дальнейшем выполненными. Система уравнений вида (4.51) подробно проанализирована в работе [25]. В нашем случае система уравнений (4.51) легко анализируется непосредственно. Формулы состояний равновесия (4.51) имеют вид

$$(\rho_{*1}, 0) = ((-\chi_1^*(\alpha)/a_{11}(0))^{1/2}, 0), \quad (0, \rho_{*2}) = (0, (-\chi_2^*(\alpha)/a_{22}(0))^{1/2}), \quad (4.52)$$

$$(\rho_{*1}, \rho_{*2}) = ((-a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}, \quad ((a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}. \quad (4.53)$$

В соответствии с этим на плоскости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определим прямые (лучи), выходящие из нулевой точки: $\Gamma_1 : \chi_1^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_2 : \chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_3 : -a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_4 : a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$. Бифуркационная диаграмма и соответствующие фазовые портреты (4.51) в зависимости от α приведены на фиг. 9. Диаграмма приведена применительно к рассматриваемой точке. В других точках границы области D_0 расположение прямых Γ_j может быть несколько иным, но характер фазовых перестроек остается неизменным.



Фиг. 9.

Каждому состоянию равновесия вида (4.52) в начально-краевой задаче (2.1), (2.2) соответствует периодическое решение вида (4.37) (ротационная волна), принадлежащее $S_{u_*}(R)$, аналогичного с состоянием равновесия характера устойчивости. Доказательство этого утверждения проводится по изложенной выше схеме. Состоянию равновесия (4.53) в (2.1), (2.2) соответствует двумерный инвариантный тор, принадлежащий $S_{u_*}(R)$, в нашем случае он всегда неустойчив.

Таким образом, бифуркационный сценарий с окрестности точки K_* , θ_* пересечения замкнутых кривых, соответствующих значениям n и $n + 1$ границы области D_0 , выглядит следующим образом. При $\theta < \theta_*$ и $K > K_*$ в $S_{u_*}(R)$ имеется единственное устойчивое периодическое решение вида (4.37) – ротационная волна, соответствующая значению n . При увеличении θ из состояния равновесия u_* бифурцирует неустойчивое периодическое решение вида (4.37) – ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$. При дальнейшем увеличении θ из этого периодического решения бифурцирует неустойчивый двумерный инвариантный тор, делая периодическое решение асимптотически орбитально устойчивым. Таким образом, в $S_{u_*}(R)$ имеется два устойчивых периодических решения, являющихся ротационными волнами, и неустойчивый инвариантный тор. При дальнейшем увеличении θ неустойчивый инвариантный тор “влипает” в устойчивое периодическое решение, соответствующее значению n , делая его неустойчивым. В дальнейшем это неустойчивое периодическое решение “влипает” в неустойчивое состояние равновесия u_* . В окрестности u_* остается одна ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$.

Случай, когда пучок операторов (3.7) при K_* , θ_* имеет пару комплексно сопряженных чисто мнимых точек спектра и двухкратную нулевую точку спектра, а остальные точки спектра имеют отрицательные вещественные части, рассматривается аналогично. При этом роль одной спиральной волны будет играть однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. Также аналогично рассматривается случай, когда одна собственная функция пучка операторов не зависит от ϕ (отмеченный * на фиг. 5). В этом случае одно бифурцирующее периодическое решение является пространственно однородным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение “оптической турбулентности” // Письма в Журнал эксперим. и теор. физ. 1988. Т. 47. № 12. С. 611–614.
2. Ахманов С.А., Воронцов М.А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263–325.

3. *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu. et al.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures // *J. Optical Soc. Amer. Ser. B.* 1992. V. 9. № 1. P. 78–90.
4. *Разгулин А.В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 1. С. 69–80.
5. *Разгулин А.В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1993. Т. 33. № 10. С. 1499–1508.
6. *Белан Е.П.* О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // *Ж. матем. физ., анал., геом.* 2005. Т. 1. № 1. С. 3–34.
7. *Кащенко С.А.* Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1991. Т. 31. № 3. С. 467–473.
8. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // *Теор. и матем. физ.* 2004. Т. 140. № 1. С. 14–28.
9. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // *Матем. моделирование.* 1993. Т. 5. № 4. С. 105–119.
10. *Скубачевский А.Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // *Дифференц. ур-ния.* 1998. Т. 34. № 10. С. 1394–140.
11. *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // *Nonlinear Analysis: TMA.* 1998. V. 32. №. 2. P. 261–278.
12. *Разгулин А.В., Романенко Т.Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 11. С. 1804–1821.
13. *Budzinskiy S.S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O (2,2) Hopf bifurcation // *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 2017. V. 49. P. 17–29.
14. *Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // *Nonlinear Analysis: Real World Applications.* 2018. V. 44. P. 559–572.
15. *Неймарк Ю.И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // *Прикл. матем. и механ.* 1949. Т. 13. № 4. С. 349–380.
16. *Куликов А.Н.* О гладких многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховых пространствах // *Исследования по устойчивости и теории колебаний.* Ярославль: Ярославский ун-т. 1976. С. 114–129.
17. *Мардсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
18. *Хессард Б., Казаринов Н., Вен И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
19. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 252 с.
20. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
21. *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* 2018. Т. 14. № 3. P. 301–324.
22. *Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.* Особенности бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки–Гласса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 8. С. 1340–1357.
23. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
24. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 232 с.
25. *Серебрякова Н.Н.* Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний // *Прикл. матем. и механ.* 1963. Т. 27. № 1. С. 160–166.