
**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 550.834

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАГЕРРА

© 2021 г. А. Ф. Мастрюков

*630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6,
Институт вычисл. матем. и матем. геофизики СО РАН, Россия*

e-mail: maf@omzg.sscc.ru

Поступила в редакцию 30.01.2020 г.
Переработанный вариант 30.07.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

В работе рассматриваются оптимальные разностные схемы для решения волнового уравнения с использованием преобразования Лагерра. В разностную схему уравнений для гармоник вводятся дополнительные параметры. Численные значения этих параметров получаются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца. Полученные таким образом оптимальные значения параметров используются при построении разностных схем – оптимальных разностных схем. Рассмотрены оптимальные разностные схемы 2-го порядка и 4-го порядка аппроксимации. Приведены оптимальные параметры разностных схем. Значения этих параметров зависят только от отношения пространственных шагов разностной сетки. Показано, что использование оптимальных разностных схем ведет к повышению точности решения уравнений. Простая модернизация разностной схемы дает повышение эффективности алгоритма. Библ. 18. Фиг. 2. Табл. 3.

Ключевые слова: конечно-разностный метод, оптимальный, точность, электромагнитные волны, метод Лагерра.

DOI: 10.31857/S0044466921030145

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном решении дифференциальных уравнений широко используются спектральные методы. Спектральные методы позволяют более эффективно решать задачи со сложной зависимостью параметров уравнений от времени. Например, в случае с релаксацией диэлектрической проницаемости, выраженной в интегральной форме [1], [2].

Конечно-разностный метод прост в программной реализации и экономичен [3], [4]. Но есть задачи, такие как частотное зондирование, в электроразведке [5], где предпочтительнее использовать спектральные методы.

В ряде задач спектральный метод, основанный на преобразовании Лагерра, по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье. Эффективность обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра [7], [8]. Левая часть этих уравнений не зависит от номера гармоники, а меняется только правая часть этой системы. Кроме того, система уравнений для гармоник всегда содержит только действительные переменные.

Важным показателем качества численного алгоритма является точность получаемого решения уравнений [9]. Существуют различные способы повышения точности решения, например, использование разностных схем более высокого порядка аппроксимации или построение разностных схем минимизирующих погрешность дисперсионного соотношения (dispersion-preserving) [9]. Ко второму типу схем относятся так называемые оптимальные разностные схемы.

В работе оптимальными называются разностные схемы, параметры которых определяются минимизацией некоего функционала. В данном случае параметры определяются минимизацией погрешности разностной аппроксимации уравнения Гельмгольца.

В работе [11] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармоники Фурье вводятся 3 дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении.

Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в работе [12] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по 4 параметрам.

В работах [13], [14] была рассмотрена оптимальная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла и для решения волнового уравнения, основанная на разложении Лагерра по временной переменной. Здесь оптимизация проводилась по 4 параметрам.

В настоящей работе рассматриваются оптимальные разностные схемы 2-го порядка и 4-го порядка аппроксимации для решения двумерного волнового уравнения на основе преобразования Лагерра, использующие различное число параметров.

Предлагаемые оптимальные схемы являются модернизацией обычных разностных схем, но они обладают более высокой точностью и более высокой эффективностью.

В работе приведены параметры оптимальных разностных схем и результаты тестовых расчетов с использованием этих схем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать волновое уравнение вида

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + S(t, x, z) \quad (1)$$

в прямоугольной пространственной области при нулевых граничных и начальных условиях

$$E(t = 0, x, z) = 0, \quad \frac{\partial E(t = 0, x, z)}{\partial t} = 0.$$

Здесь $S(t, x, z)$ – источник волн, v – скорость волны, γ – коэффициент поглощения. Величины v , γ являются функциями координат x , z .

Такое уравнение описывает как распространение упругих волн, так и распространение электромагнитных волн. В первом случае E – это давление и v – это скорость упругих волн, во втором случае E – это напряженность электрического поля и v – это скорость электромагнитных волн.

К такому же уравнению можно свести систему двумерных уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в двумерном случае имеют вид [5], [15]

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (4)$$

где $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ – ток внешнего источника, ε – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость.

Продифференцировав по времени уравнение (2) и подставив в него выражения из уравнений (3), (4), при $\mu = \text{const}$ получим для электрического поля E_y уравнение вида (1), где источник имеет вид

$$S(t, x, z) = -\mu \frac{\partial J_y}{\partial t}.$$

Систему уравнений (2)–(4) будем использовать для оценки точности решения волнового уравнения (1).

Проведем преобразование Лагерра [16] по времени уравнения (1)

$$E_n = \int_0^\infty E(t)(ht)^{-\alpha/2} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (5)$$

$$E(t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+\alpha)!} E_n l_n^{\alpha}(ht), \tag{6}$$

где $l_n^{\alpha}(ht)$ – ортогональная функция Лагерра [16] степени n , α – целая константа, h – параметр преобразования Лагерра.

В результате получим уравнение для n -й гармоники Лагерра E_n :

$$\frac{\partial^2 E_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_n}{\partial z^2} + S_n = \frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) E_k \right) + \gamma h \left(\frac{1}{2} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k \right). \tag{7}$$

Рассмотрим разностную аппроксимацию этого уравнения.

3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ

Определим E_n и S_n в целых i, j узлах разностной сетки. Производные заменим конечными разностями второго порядка аппроксимации. Запишем уравнение (7) в разностном виде, используя средние значения гармоник Лагерра:

$$\begin{aligned} & (\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1})/(\Delta x^2) + (\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j})/\Delta z^2 + S_{n,i,j} = \\ & = \frac{h^2}{v^2} \left(\frac{1}{4} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1-k) \langle E_k \rangle \right) + \gamma h \left(\frac{1}{2} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle \right). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь в правой части уравнения гармоники поля заменены средними значениями по 9 точкам [12]:

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle = & c E_{k,i,j} + d(E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}) + g(E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}) + \\ & + e(E_{k,i+1,j+1} + E_{k,i+1,j-1} + E_{k,i-1,j+1} + E_{k,i-1,j-1}), \end{aligned} \tag{9}$$

где c, d, g, e – весовые множители, удовлетворяющие уравнению

$$c + 2d + 2g + 4e = 1 \quad \text{или} \quad e = (1 - c - 2d - 2g)/4.$$

В разностных производных по z использованы средние значения [12] для поля вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j+1} + \beta E_{n,i,j} + \frac{1-\beta}{2} E_{n,i,j-1}, \tag{10}$$

и в разностных производных по x использованы средние значения вида

$$\bar{E}_{i,j} = \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i+1,j} + \alpha E_{n,i,j} + \frac{1-\alpha}{2} E_{n,i-1,j}. \tag{11}$$

Разностное уравнение (8), содержащее дополнительные параметры $\alpha, \beta, c, d, g, e$, аппроксимирует уравнение (7) со вторым порядком.

Подберем введенные параметры $\alpha, \beta, c, d, g, e$ таким образом, чтобы точность аппроксимации уравнения была наиболее высокой.

4. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Для нулевой гармоники поля $E = E_{0y}$, уравнение (7) можно представить в виде уравнения Гельмгольца. Без учета источников уравнение (7) принимает простой вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k_0^2 E, \quad k_0^2 = \frac{h}{2} \left(\frac{h}{2v^2} + \gamma \right). \tag{12}$$

В случае электромагнитных волн

$$k_0^2 = \mu \frac{h}{2} \left(\epsilon \frac{h}{2} + \sigma \right).$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения поля, приведенные в предыдущем разделе

$$\frac{\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} = k_0^2(cE_{n,i,j} + d(E_{n,i,j+1} + E_{n,i,j-1}) + g(E_{n,i+1,j} + E_{n,i-1,j}) + e(E_{n,i+1,j+1} + E_{n,i+1,j-1}) + E_{n,i-1,j-1}).$$

Уравнение (12) имеет точное решение:

$$E = E_0 \operatorname{ch}(k_x x) \operatorname{ch}(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в приведенное разностное уравнение. После простых преобразований получим уравнение

$$V^2(\theta, k) = 1,$$

где

$$\begin{aligned} V^2(\theta, k) = & \left((1 - \alpha) \operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) + \alpha \right) (\operatorname{ch}(k \sin \theta) - 1) + \\ & + r^2 \left((1 - \beta) \operatorname{ch}(k \sin \theta) + \beta \right) \left(\operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) - 1 \right) / \left(k^2 \left(c/2 + d \left(\operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) \right) \right. \\ & \left. + g \left(\operatorname{ch}(k \sin \theta) + 2e \left(\operatorname{ch}(k \sin \theta) \right) \operatorname{ch}\left(\frac{k \cos \theta}{r}\right) \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

и $r = \Delta x / \Delta z$, $k = k_0 \Delta x$.

Будем искать параметры α , β , c , d , g , e , требуя максимально точного выполнения равенства $V^2(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ , k .

Для этого определим функционал

$$F(u) = F(\alpha, \beta, c, d, g, e) = \iint (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk, \quad (14)$$

где $u = (\alpha, \beta, c, d, g, e)$ – вещественный вектор искомых параметров.

Пределы интегрирования по углу $\theta = [0, \pi/2]$. Пределы интегрирования по второй переменной от $k = 0$ до $k = K$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать величину верхнего предела интегрирования K значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Будем искать точку минимума функционала (14) при заданных значениях r , K по параметрам α , β , c , d , g , e .

Для минимизации функционала будем использовать итерационный метод Ньютона [17]. Этот метод требует вычисления первой и второй производных функционала $F(u)$. Производные $F(u)$ по параметрам α , β , c , d , g , e легко вычисляются, так как выражение под интегралом и функция $V(\theta, k)$ имеют явный вид.

Минимальное значение функционала $F(u)$ при заданных значениях r , K обозначим $I(r, K) = \min F(u)$. Значения параметров α , β , c , d , g в точке минимума функционала $F(u)$ будем называть оптимальными параметрами.

В табл. 1 приведены оптимальные значения параметров α , β , c , d , g и интеграла $I(r, K)$, полученные при $e = 0$, $c = 1 - 2d - 2g$, т.е. при минимизации по 5 параметрам. Учет $e \neq 0$ дает незначительное (около 20%) уменьшение значения интеграла $I(r, K)$.

При заданном $r = \Delta x / \Delta z$, с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ в промежутке от $K = 0$ до $K \approx 0.3$ падает от единицы до $I \approx 10^{-5}$, в промежутке от $K \approx 0.3$ до $K \approx 2.5$ растет в 30–40 раз. Малые K соответствуют слабо меняющимся решениям уравнения (12).

При заданном верхнем пределе K с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ растет менее, чем на 30% в промежутке $r = [1, 3]$. Зависимость от r значения $I(r, K)$ и определяемых параметров α , β , c , d , g носит монотонный характер.

Приводимые здесь разностные аппроксимации уравнения Гельмгольца используют различное число точек сетки. Шаблон разностной схемы без оптимальных параметров является 5-то-

Таблица 1

α	β	c	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.8465	0.8465	0.6782	0.08044	0.08044	5.88e-05	1	1
0.8613	0.8613	0.6916	0.07708	0.07708	2.61e-04	1	1.5
0.8981	0.8981	0.7283	0.06790	0.06790	1.35e-03	1	2.5
0.4985	0.9966	0.6752	0.08187	0.08051	5.96e-05	1.5	1
0.5046	1.0105	0.6852	0.08013	0.07722	2.64e-04	1.5	1.5
0.5207	1.0467	0.7133	0.07511	0.06820	1.37e-03	1.5	2.5
0.3184	0.9735	0.6744	0.08227	0.08052	7.10e-05	2	1
0.3215	0.9860	0.6834	0.08102	0.07725	3.14e-04	2	1.5
0.3296	1.018	0.7083	0.07757	0.06827	1.60e-03	2	2.5

Таблица 2

C	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.7554	0.06114	0.06114	4.65e-02	1	1
0.7621	0.05946	0.05946	4.01e-02	1	1.5
0.7825	0.05435	0.05435	2.62e-02	1	2.5
0.7673	0.05005	0.06625	4.25e-02	1.5	1
0.7710	0.05062	0.06384	3.78e-02	1.5	1.5
0.7828	0.05151	0.05707	2.73e-02	1.5	2.5
0.7974	0.03316	0.06811	3.68e-02	2	1
0.7983	0.03531	0.06551	3.30e-02	2	1.5
0.8022	0.04061	0.05826	2.46e-02	2	2.5

чечным, а шаблон разностной схемы с оптимальными параметрами является 9-точечным. Увеличение числа точек ведет к увеличению числа вычислительных операций.

Если положить $\alpha = 1, \beta = 1$, и искать минимум интеграла по трем параметрам, то шаблон такой оптимальной схемы остается 5-точечным, как и обычная схема 2-го порядка. Такая простая модернизация обычной схемы 2-го порядка не меняет структуры матрицы системы разностных уравнений (8).

В табл. 2 приведены оптимальные значения параметров c, d, g для разных значений величины $r = \Delta x / \Delta z$ и при разных верхних пределах интегрирования по k в формуле (14). Указаны также значения интеграла $I(r, K)$, полученные при этих значениях параметров. Эти значения интеграла, как и ранее, нормированы на величину интеграла для неоптимальной схемы.

Зависимость интеграла $I(r, K)$ от r, K существенно отличается от случая, приведенного в табл. 1. При заданном r , с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ падает от единицы до $I \approx 2 \times 10^{-2}$, в промежутке $K = [0, 2.5]$. При заданном верхнем пределе K , с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ меняется менее, чем на 30% в промежутке $r = [1, 3]$.

Значения интеграла $I(r, K)$ при $K = 2.5$ примерно на порядок больше, чем в случае минимизации по 5 параметрам, приведенным в предыдущей таблице. При уменьшении K эта разница возрастет до трех порядков, т.е. схема с 5 параметрами позволяет достичь более глубокой минимизации $I(r, K)$, чем схема с 3 параметрами, но с ростом K разница быстро уменьшается.

Как и для разностной схемы 2-го порядка для разностных схем 4-го порядка можно также построить оптимальную разностную схему. Рассмотрим разностную аппроксимацию четвертого порядка уравнения (12) вида

$$\frac{16(E_{i+1,j} + E_{i-1,j}) - (E_{i+2,j} + E_{i-2,j}) - 30E_{i,j}}{12\Delta z^2} - \frac{16(E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) - (E_{i,j+1} + E_{i,j-1}) - 30E_{i,j}}{12\Delta x^2} = \tag{15}$$

$$= k_0^2 (cE_{i,j} + d(4(E_{i,j+1} + E_{i,j-1})/6 - (E_{i,j+2} + E_{i,j-2})/6) + g(4(E_{i+1,j} + E_{i-1,j})/6 - (E_{i+2,j} + E_{i-2,j})/6).$$

Таблица 3

C	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.8897	0.05513	0.05513	2.48e-02	1	1
0.8961	0.05191	0.05191	2.13e-02	1	1.5
0.9043	0.04781	0.04781	1.84e-02	1	2
0.8952	0.04812	0.05667	1.85e-02	1.5	1
0.8993	0.04747	0.05313	1.60e-02	1.5	1.5
0.9049	0.04638	0.04864	1.38e-02	1.5	2
0.9184	0.02465	0.05693	1.58e-02	2	1
0.9208	0.02584	0.05334	1.37e-02	2	1.5
0.9245	0.02671	0.04878	1.19e-02	2	2

Шаблон этой схемы является 9-точечным. Введение трех параметров c, d, g при $c = 1 - d - g$ не увеличивает числа точек схемы. Выписав для этого случая уравнения (13), (14) и проведя минимизацию по этим трем параметрам, получим оптимальные параметры, которые приведены в табл. 3.

При заданном r , с ростом верхнего предела K , минимальное значение $I(r, K)$ падает от единицы до $I \approx 10^{-2}$, в промежутке $K = [0, 2]$. При заданном верхнем пределе K , с ростом r минимальное значение $I(r, K)$ падает в 2.5 раза в промежутке $r = [1, 3]$. При $K > 2.1$ точка минимума $I(r, K)$ не определяется.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Решение уравнения (1) спектральным методом Лагерра, полученное с использованием оптимальных параметров, будем сравнивать с решением системы уравнений (2)–(4) высокоточным [18] конечно-разностным методом (7-го порядка аппроксимации по времени и 6-го порядка аппроксимации по пространству).

Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s),$$

$$f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (16)$$

где f_0 – несущая частота источника, t_0 – момент центра импульса источника, z_s – точка расположения источника.

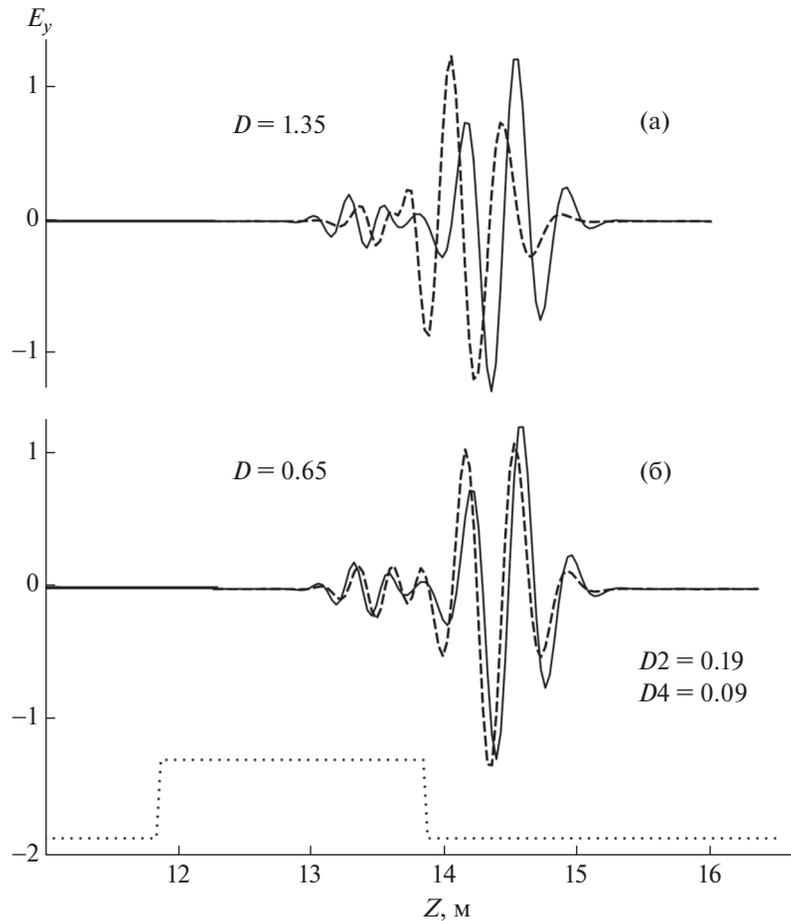
В преобразовании Лагерра использовались 310 гармоник Лагерра, параметры $\alpha = 1, h = 100$.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением

$$D(t) = \frac{\int_0^\infty |E_y(z, t) - E_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^\infty |E_{0y}(z, t)| dz}, \quad (17)$$

здесь $E_y = E$ – решение уравнения (1), полученное с использованием разложения Лагерра, E_{0y} – решение уравнений (2)–(4), полученное с использованием конечно-разностной схемы. На графиках, приведенных ниже, решение этой конечно-разностной схемой показано сплошной линией.

На фиг. 1 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y – компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Шаг разностной схемы



Фиг. 1. Решение уравнения неоптимальной (а) и оптимальной (б) разностными схемами 2-го порядка аппроксимации.

$\Delta x = 0.05$. Точками показано расположение слоя в среде. Сплошная линия соответствует решению уравнений (2)–(4).

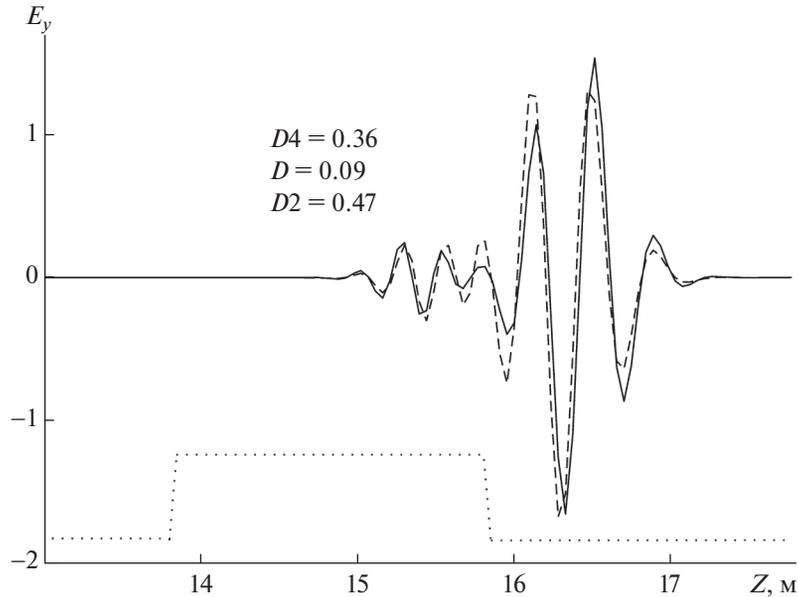
На фиг. 1а штрихованная линия соответствует решению обычной, неоптимальной разностной схемой 2-го порядка. Указана величина погрешности D для этого решения.

На фиг. 1б штриховая линия соответствует решению оптимальной разностной схемой 2-го порядка с тремя оптимальными параметрами, приведенными в табл. 2, при $r = 1.5$, $K = 2.5$. Здесь величина погрешности D примерно в два раза меньше, чем в случае использования неоптимальной схемы фиг. 1а.

Видно, что оптимальная разностная схема с тремя оптимальными параметрами дает более точное решение. Простая модернизация разностной схемы ведет также и к повышению эффективности алгоритма. В данном случае это дает сокращение времени счета на несколько первых процентов.

На этой же фигуре приведено решение оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации с 5 оптимальными параметрами, приведенными в табл. 1, и решение разностной схемой 4-го порядка аппроксимации без оптимальных параметров. Для сравнения приведены погрешности $D2$ и $D4$ для этих алгоритмов. Эти решения графически совпадает с решением уравнений (2)–(4).

На фиг. 2 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y – компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Шаг разностной схемы $\Delta x = 0.07$. Точками показано расположение слоя в среде.



Фиг. 2. Решение уравнения неоптимальной (штриховая линия) и оптимальной (сплошная линия) разностными схемами 4-го порядка аппроксимации.

Сплошная линия соответствует решению уравнений (2)–(4), штриховая линия соответствует решению разностной схемой 4-го порядка без оптимальных параметров. Указана величина погрешности для этого решения $D4$, ниже указана величина погрешности D для решения оптимальной схемой с тремя оптимальными параметрами, приведенными в табл. 3 при $r = 1.5$, $K = 2.0$. Погрешности D в четыре раза меньше погрешности $D4$.

Решение разностной схемой с тремя оптимальными параметрами, графически неотлично от решения уравнений (2)–(4). Как и в случае, показанном на фиг. 1, здесь оптимальная разностная схема дает сокращение времени счета на несколько первых процентов.

Для сравнения, эта задача решалась с использованием оптимальной разностной схемы 2-го порядка с 5 оптимальными параметрами из табл. 1, при $r = 1.5$, $K = 2.5$. На этой фигуре приведена только погрешность $D2$ этого решения. Разница величин $D2$ и $D4$ менее 30%, но схема 2-го порядка в этом варианте оказывается на 20–25% экономичнее схемы 4-го порядка.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование оптимальных разностных схем позволяет повысить точность решения уравнения в сравнении с обычными схемами 2-го порядка аппроксимации. Это верно и для разностных схем 4-го порядка аппроксимации. Оптимальные схемы с 5 оптимальными параметрами дают более точное решение, чем оптимальные схемы с 3 оптимальными параметрами. Оптимальные схемы с 3 оптимальными параметрами требуют простой модернизации обычных неоптимальных разностных схем, но повышают точность решения задачи и сокращают время счета задачи. Значения оптимальных параметров зависят только от отношения пространственных шагов разностной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Luebbers R., Hansberger F.P.* FDTD for Nth-order dispersive media // *IEEE Trans. Ant Propog.* 1992. V. 40. P. 1297–1301.
2. *Turner G., Siggins A.F.* Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // *Geophysics.* 1994. V. 59. P. 1192–1200.
3. *Bergmann T., Johan O.A. Robertsson, Klaus Holliger.* Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // *Geophysics.* 1998. V. 63. P. 856–867.

4. *Bergmann T., Joakim O. Blanch, Johan O.A. Robertsson, Klaus Holliger.* A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // *Geophysics.* 1999. V. 64. P. 1369–1377.
5. Электроразведка. Справочник геофизика / Под ред. А.Г. Тархова. М.: Недра, 1980. С. 518.
6. *Конюх Г.В., Михайленко Б.Г.* Применение интегрального преобразования Лагерра при решении динамических задач сейсмоки // *Труды ИВМ и МГ. Матем. моделирование в геофизике.* Новосибирск. 1998. № 5. С. 107–112.
7. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Численное моделирование распространения электромагнитных волн в неоднородных средах с затуханием на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофиз.* 2003. Т. 44. № 10. С. 1060–1069.
8. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Моделирование распространения электромагнитных волн в релаксационных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // *Геология и геофиз.* 2006. Т. 47. № 3. С. 397–407.
9. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. С. 548.
10. *Tam C.K., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // *J. Comput. Phys.* 1993. V. 107. № 2. P. 262–281.
11. *Jo C.H., Shin C., Suh H.S.* An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // *Geophys.* 1996. V. 61. P. 529–537.
12. *Chen J.B.* An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophys.* 2012. V. 77. P. T201–T210.
13. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // *Геология и геофиз.* 2015. Т. 56. № 9. С. 1713–1722.
14. *Мастрюков А.Ф.* Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // *Сиб. Ж. вычисл. матем.* 2016. № 5. С. 107–112.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. С. 620.
16. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. С. 832.
17. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. С. 518.
18. *Ghriis M., Fornberg B., Driscoll T.A.* Staggered time integrator for wave equations // *SIAM J. Numer. Analys.* 2000. V. 38. P. 718–741.