

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 532.59:534.1

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ
ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ДВИЖУЩИМСЯ
НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ВОЗМУЩЕНИЙ¹⁾

© 2021 г. В. В. Булатов^{1,*}, Ю. В. Владимиров^{1,**}

¹ 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101-1, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: vladimyura@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.
Переработанный вариант 04.06.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Рассматривается задача о построении аналитических решений, описывающих поля внутренних гравитационных волн от нелокального источника возмущений, движущегося на поверхности стратифицированной среды конечной глубины. Для модельной формы источника с радиальной симметрией в линейном приближении получены аналитические решения, выражающиеся через собственные функции основной вертикальной спектральной задачи внутренних волн. Предложены два метода представления решения, в том числе на основе теоремы Миттаг–Леффлера о разложении мероморфной функции. Приведены результаты расчетов волновых полей для различных режимов волновой генерации, иллюстрирующих два метода аналитического представления волнового поля. Библ. 18. Фиг. 6.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, теорема Миттаг–Леффлера, волновые моды.

DOI: 10.31857/S0044466921040037

ВВЕДЕНИЕ

Важным механизмом возбуждения внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах является их генерация источниками возмущений различной физической природы: естественного (движущиеся возмущения атмосферного давления, обтекание неровностей рельефа океана, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров (см. [1]–[5]). В частности, касательное напряжение ветра, создаваемое движущимся ураганом, может формировать на океанической поверхности структуру в виде движущейся воронки с почти радиальной симметрией. Как показывают результаты мониторинга Мирового океана, движущиеся возмущения морской поверхности являются одним из основных природных механизмов генерации интенсивных ВГВ (см. [4], [5]). Аналитические результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные представления требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования. При математическом моделировании генерации ВГВ, возбуждаемых нелокальными источниками возмущений, наиболее распространенными являются два способа (см. [6], [7]). Первый заключается в численном решении системы уравнений гидродинамики, описывающей ВГВ, к недостаткам которого следует отнести ограниченность области пространства, в котором возможно численное решение задачи (см. [8]–[10]). При изучении дальнего распространения ВГВ прямые численные расчеты нецелесообразны, так как в дальней зоне волновые поля относительно малы по амплитуде и обычно их можно описать посредством линейных уравнений. Кроме того, эффекты вязкости, вращения среды и ее сжимаемости пренебрежимо малы и не сказываются на дальнем распространении ВГВ (см. [1]–[3], [6], [7]). Поэтому волновое поле в дальней зоне можно описать сравнительно простыми аналитическими формулами. Распространение диспергирующих ВГВ в стратифицированных сре-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00111А.

дах и создаваемые ими волновые картины на больших расстояниях от источников возмущений (много больших его характерных размеров) практически не зависят от их формы и определяются только законом дисперсии и скоростью источника. Поэтому второй способ состоит в том, чтобы заменить функцию, описывающую форму нелокального источника, функцией, имеющей достаточно простое аналитическое представление (см. [11]–[14]). Целью настоящей работы является построение аналитических решений, описывающих поля ВГВ, возбуждаемых движущимся нелокальным модельным источником возмущений в слое стратифицированной среды конечной толщины.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМЫ РЕШЕНИЙ

Рассматривается задача о полях ВГВ, возникающих при движении нелокального источника возмущений в слое невязкой стратифицированной среды толщины H . Источник движется на поверхности среды $z = 0$ с постоянной скоростью V в горизонтальном направлении оси x , ось z направлена вверх, форма нелокального источника описывается функцией $s(x, y)$. Рассматривается установившийся режим волновых колебаний. В движущейся системе координат и в приближении Буссинеска имеем следующее уравнение для малых возмущений вертикальной компоненты скорости $W(x, y, z)$ (см. [1], [6], [7]):

$$V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + N^2(z) \Delta W = 0, \tag{1.1}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz},$$

где $N^2(z)$ – квадрат частоты Брента–Вяйсяля (частоты плавучести), которая далее предполагается постоянной, $N^2(z) = N^2 = \text{const}$, $\rho_0(z)$ – невозмущенная плотность среды по глубине, g – ускорение свободного падения. Линеаризованное граничное условие на поверхности имеет вид (см. [2], [3], [6], [7])

$$W = V \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{1.2}$$

На дне используется условие непротекания

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = -H. \tag{1.3}$$

В безразмерных координатах и переменных $x^* = \pi x/H$, $y^* = \pi y/H$, $z^* = \pi z/H$, $M = V/c$, $W^* = W/c$, $c = NH/\pi$ уравнение (1.1) и граничные условия (1.2), (1.3) переписутся следующим образом (индекс “*” далее опускается):

$$M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) W + \Delta W = 0, \tag{1.4}$$

$$W = M \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{1.5}$$

$$W = 0 \quad \text{при} \quad z = -\pi. \tag{1.6}$$

Относительно функции $s(x, y)$ можно сделать следующие предположения: эта функция обладает цилиндрической симметрией $s(x, y) = s(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \rho s(\rho) d\rho < \infty$. Далее задача будет решаться методом Фурье. Для аналитического описания формы нелокального источника необходимо выбрать такую функцию $s(\rho)$ и двойное преобразование Фурье (с точностью до множителя 2π , совпадающее с преобразованием Фурье–Бесселя), которое имеет особые точки только в виде простых полюсов. В этом случае появляется возможность построить и исследовать аналитические представления решений для функции $W(x, y, z)$. Более сложная структура особых точек Фурье образа функции $s(\rho)$, например, наличие точек ветвления, не позволяет решить задачу аналитически. Рассмотрим семейство функций $g_m(r, a) = (r/2a)^m K_m(ar)/\Gamma(m + 1)$, где $K_m(\tau)$ – функция порядка МакДональда, $\Gamma(\tau)$ – гамма-функция Эйлера. Функции $g_m(r, a)$ имеют непре-

рывные производные до порядка $2m - 1$ включительно. Преобразование Фурье–Бесселя для функции $g_m(r, a)$ имеет вид

$$G_m(k, a) = 2\pi \int_0^\infty g_m(r, a) r J_0(kr) dr = (k^2 + a^2)^{-m-1},$$

где $J_0(kr)$ – функция Бесселя нулевого порядка (см. [15], [16]). Так как искомое решение $W(x, y, z)$ должно иметь непрерывные вторые производные, то далее в качестве функции, описывающей форму нелокального источника, будем использовать следующее выражение: $s(\rho) = g_2(\rho, a) = -s_0 \rho^2 a^2 K_2(a\rho)/2$, где параметр s_0 – максимальная высота (вертикальный масштаб) нелокального источника ($s(0) = -s_0$), a – характерная ширина (горизонтальный масштаб) этого источника. С ростом значения параметра a характерная ширина источника уменьшается. Выбор этой модельной функции позволяет описать генерацию ВГВ движущейся областью возмущения атмосферного давления, которая, как правило, обладает достаточно выраженной радиальной симметрией (см. [5], [9], [11]).

Решение (1.4)–(1.6) будем искать в виде интеграла Фурье

$$W(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu. \quad (1.7)$$

Тогда для определения функции $\varphi(\mu, \nu, z)$ необходимо решить краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 (\mu^{-2} M^{-2} - 1) \varphi = 0, \quad (1.8)$$

$$\varphi = -i\mu MS(k) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (1.9)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad z = -\pi. \quad (1.10)$$

Здесь $k^2 = \mu^2 + \nu^2$, $S(k)$ – преобразование Фурье–Бесселя от функции $s(\rho)$:

$$S(k) = 2\pi \int_0^\infty \rho s(\rho) J_0(k\rho) d\rho = -8\pi a^4 s_0 (k^2 + a^2)^{-3}.$$

Решение (1.8)–(1.10) имеет вид

$$\varphi(\mu, \nu, z) = iA(\mu, \nu) \frac{\sin(kr(z + \pi))}{\sin(kr\pi)}, \quad A(\mu, \nu) = -\mu MS(k), \quad r = (\mu^{-2} M^{-2} - 1)^{1/2}. \quad (1.11)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Далее подставим (1.11) в (1.7) и сместим контур интегрирования на комплексной плоскости переменной μ вверх на величину $\varepsilon > 0$. Контур интегрирования необходимо сдвинуть для того, чтобы удовлетворить условию излучения, т.е. отсутствию волн уходящих вперед от источника возмущений. Разложение функции $\varphi(\mu, \nu, z)$, определяемой выражением (1.11), в ряд по собственным функциям краевой задачи (1.8) с нулевыми граничными условиями при $z = 0, -\pi$ имеет вид

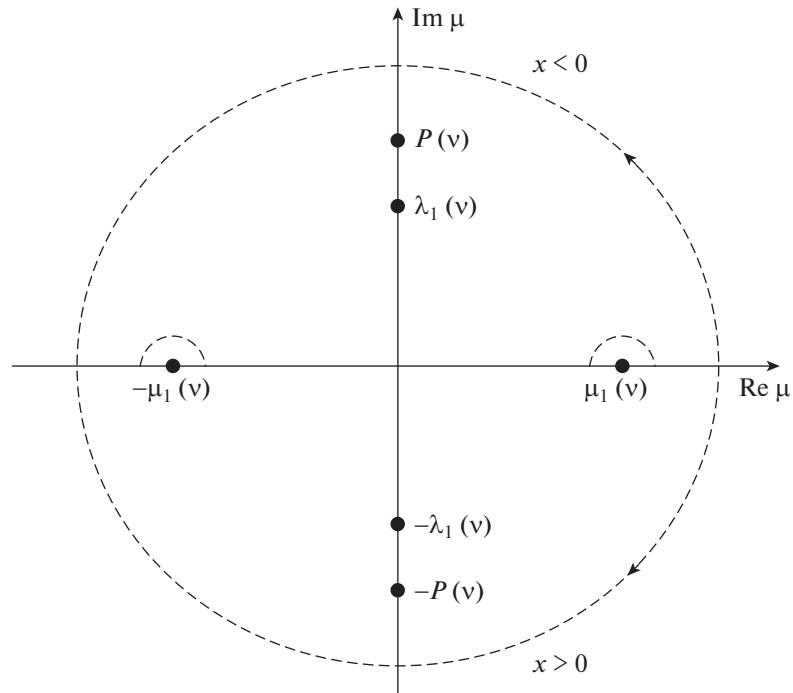
$$\varphi(\mu, \nu, z) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\mu, \nu, z), \quad R_m(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \frac{m \sin mz}{k^2 r^2 - m^2}. \quad (2.1)$$

Ряд (2.1) сходится к $\varphi(\mu, \nu, z)$ поточечно (по переменной z), но неравномерно, так как не выполняется граничное условие (1.9) при $z = 0$. По m ряд (2.1) сходится условно и медленно, так как общий член ряда имеет порядок $1/m$. Далее для исследования функции $\varphi(\mu, \nu, z)$, определяемой выражением (1.11), используем теорему Миттаг–Леффлера о разложении мероморфной (по переменной kr) функции для случая простых полюсов (см. [17]):

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \left(\frac{z + \pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mz}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin mz}{k^2 r^2 - m^2} \right). \quad (2.2)$$

Выражение (2.2), объединив в котором второе и третье слагаемые, можно представить в виде

$$\varphi(\mu, \nu, z) = \frac{iA(\mu, \nu)(z + \pi)}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(\mu, \nu, z), \quad Q_m(\mu, \nu, z) = \frac{2iA(\mu, \nu)}{\pi} \frac{k^2 r^2 \sin mz}{m(k^2 r^2 - m^2)}. \quad (2.3)$$



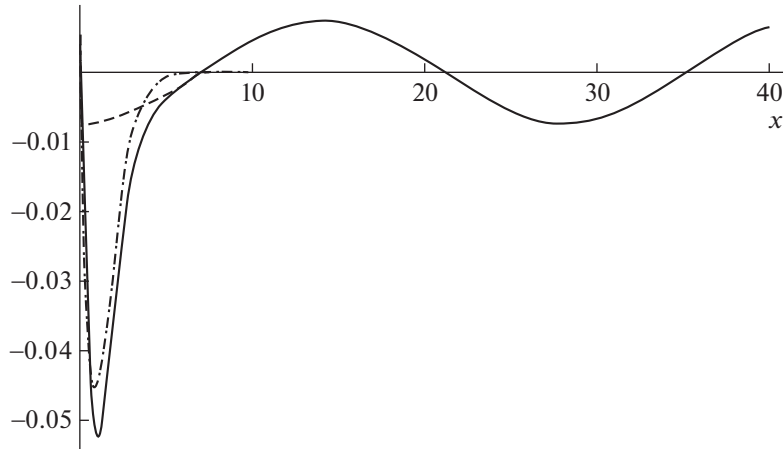
Фиг. 1. Контур интегрирования в комплексной плоскости переменной μ .

Первое слагаемое в (2.3) – простейшая линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.9), (1.10), второе слагаемое – взято с обратным знаком разложение в ряд по тригонометрическим функциям, третье слагаемое – это ряд (2.1). Ряд (2.3) также может быть получен из ряда (2.2) с помощью метода Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов (см. [18]). Этот метод широко используется в задачах о генерации полей ВГВ источниками различной физической природы в стратифицированных средах (см. [6], [7]).

Для проведения интегрирования по переменной μ в (1.7) необходимо исследовать поведение полюсов функции $\phi(\mu, \nu, z)$. Эта функция имеет следующие полюса по μ . Две серии полюсов, $\mu = \pm\mu_m(\nu)$, $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$, которые определяют соответствующие дисперсионные зависимости: $\mu_m(\nu) = (0.5(B_m - C_m))^{1/2}$, $\lambda_m(\nu) = (0.5(B_m + C_m))^{1/2}$, где $B_m = ((m^2 - M^{-2} + \nu^2)^2 + 4\nu^2 M^{-2})^{1/2}$, $C_m = m^2 - M^{-2} + \nu^2$. Также существует пара полюсов $\mu = \pm p(\nu)$, $p(\nu) = (a^2 + \nu^2)^{1/2}$, которые зависят только от фурье-образа функции $s(\rho)$, определяющей форму нелокального источника. Вычеты в точках $\mu = \pm\mu_m(\nu)$, $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$ одинаковы для выражений (2.1), (2.3), вычеты в точках $\pm ip(\nu)$ – различные для этих выражений.

Проведем почленное интегрирование по переменной μ в (1.7). Контур интегрирования необходимо замкнуть вниз при $x > 0$ и вверх при $x < 0$. На фиг. 1 штриховой линией изображен контур интегрирования и качественная картина расположения полюсов для первой волновой моды $n = 1$. Все дальнейшие вычисления будут приведены для следующих значений безразмерных параметров: $M = 3.05$, $S_0 = 0.046$, $a = 2.44$. В размерных единицах типичная глубина океана равна $H \approx 10^3$ м, тогда вертикальный масштаб нелокального источника будет составлять десятки метров, горизонтальный масштаб будет равен нескольким сотням метров и скорость движения источника – десятки сантиметров в секунду. Поэтому использованные для численных расчетов характерные значения параметров M , S_0 , a полностью соответствуют наблюдаемым в Мировом океане пространственно-временным характеристикам областей возмущения морской поверхности от движущихся тайфунов, генерирующих интенсивные ВГВ (см. [4], [11]).

Действительные полюса $\mu_m(\nu)$ растут с увеличением номера моды m и ограничены: $\mu_1(\nu) < \mu_2(\nu) < \dots < N/V$. Мнимые полюса $\lambda_m(\nu)$ неограниченно растут с увеличением номера моды m и $\lambda_m(\nu) \approx m$ при больших значениях m . Для данных параметров задачи значение $p(\nu)$ на-



Фиг. 2. Подынтегральная функция и вклад полюсов в зависимости от горизонтальной координаты x .

ходится в интервале $\lambda_2(\nu) < p(\nu) < \lambda_3(\nu)$. При параметрах, определяющих иные вертикальные и горизонтальные масштабы нелокального источника возмущений, значения $p(\nu)$ находятся в других интервалах, и вклад от этих полюсов может заметно влиять на структуру полного волнового поля особенно в ближней зоне.

Обозначим далее

$$D_m(\nu, z, x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(\mu, \nu, z) d\mu, \quad P_m(\mu, \nu, z) = R_m(\mu, \nu, z) \exp(-i\mu x). \tag{2.4}$$

При $x > 0$ имеем

$$D_m(\nu, z, x) = -2\pi i \left(\operatorname{res}_{-\mu_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{\mu_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{-i\lambda_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{-ip_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) \right).$$

При $x < 0$ имеем

$$D_m(\nu, z, x) = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{-i\lambda_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) + \operatorname{res}_{ip_m(\nu)} P_m(\mu, \nu, z) \right).$$

Сумма вычетов в действительных полюсах $\mu = \pm\mu_m(\nu)$ равна

$$\frac{i\mu_m^3(\nu)mM^2 A(\mu_m(\nu), \nu)}{\pi(\mu_m^4(\nu)M^2 + \nu^2)} \cos(\mu_m(\nu)x) \sin(mz).$$

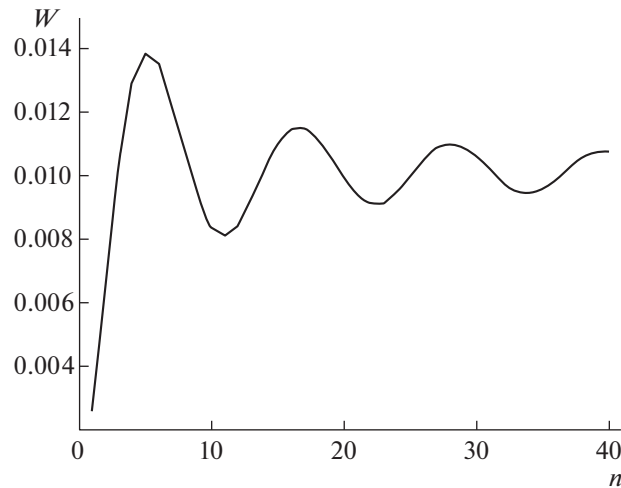
Вычеты в точках $\lambda = \pm i\lambda_m(\nu)$ равны

$$\frac{\lambda_m^3(\nu)mM^2 A(\pm i\lambda_m(\nu), \nu)}{\pi(\lambda_m^4(\nu)M^2 + \nu^2)} \exp(-\lambda_m(\nu)x) \sin(mz).$$

Аналитические выражения для вычетов в точках $\pm ip(\nu)$ в силу их громоздкости не приводятся. На фиг. 2 представлены результаты расчетов главного значения интеграла (2.4) при $m = 1$, $\nu = 0.9$, $z = -\pi/2$ (сплошная линия), вклада действительных вычетов (штриховая линия) и вклада мнимых вычетов (штрихпунктирная линия). Из приведенных результатов следует, что при больших значениях x основной вклад вносят действительные вычеты, при малых значениях x — мнимые вычеты. Тогда решение $W(x, y, z)$ задачи (1.1)–(1.3) можно представить в виде суммы волновых мод:

$$W(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x, y, z), \tag{2.5}$$

$$W_m(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} D_m(\nu, z, x) \exp(-i\nu y) d\nu.$$



Фиг. 3. Зависимость $W(x, y, z)$ от числа суммируемых волновых мод.

При больших значениях x, y (вдали от нелокального источника возмущений) интегралы (2.5) можно вычислить методом стационарной фазы (см. [6], [7], [14]). Решение для вертикальной компоненты скорости ВГВ можно также представить в другом виде. Возьмем обратное преобразование Фурье от (2.3). Тогда, исходя из аналитического выражения для функции $s(\rho)$ и учитывая соотношение

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} S(k) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu = s(\rho),$$

имеем

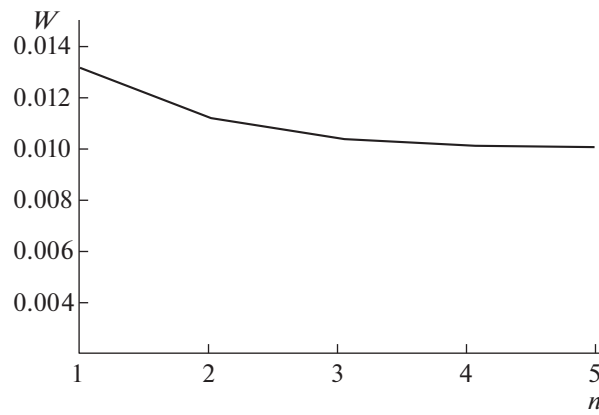
$$\frac{-i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} \mu MS(k) \frac{z + \pi}{\pi} \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu = \frac{xMs'(\rho)(z + \pi)}{\pi\rho}.$$

Отсюда можно получить

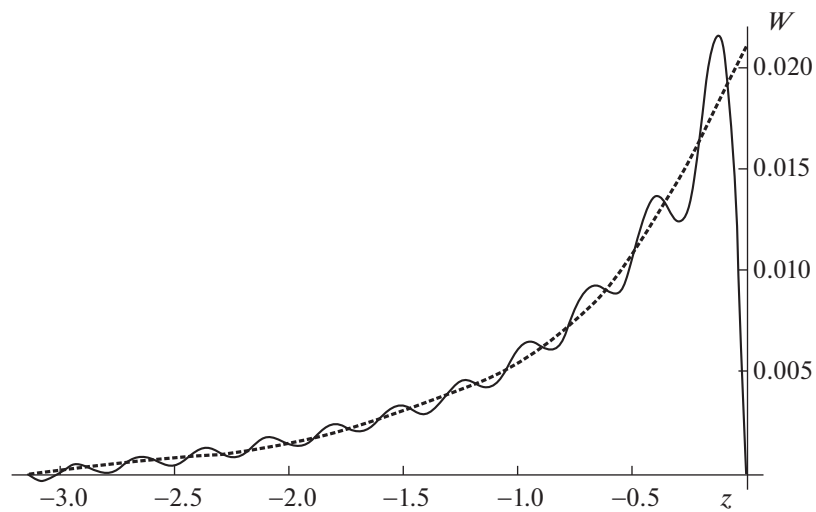
$$W(x, y, z) = \frac{xMs'(\rho)(z + \pi)}{\pi\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, y, z), \tag{2.6}$$

$$w_m(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\mu, \nu, z) \exp(-i(\mu x + \nu y)) d\mu,$$

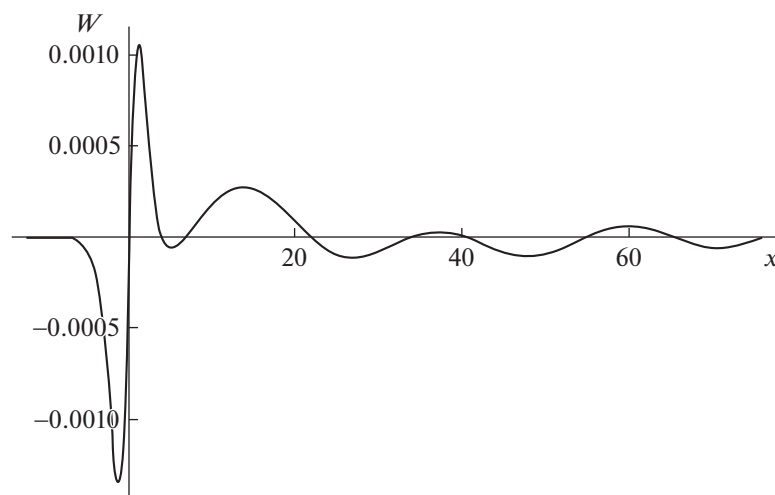
где слагаемые $w_m(x, y, z)$ вычисляются аналогично $W_m(x, y, z)$, за исключением вычетов в точках $\pm ip(\nu)$. На фиг. 3, 4 изображены графики (полигоны) зависимости полного решения $W(x, y, z)$ от значений n . Параметр n определяет общее число суммируемых волновых мод в выражениях (2.5), (2.6). Численные расчеты проводились при значениях $x = 1, y = 0.5, z = -0.55$ для двух способов представления решения, определяемых соответственно выражениями (2.5) (фиг. 3) и (2.6) (фиг. 4). Из представленных результатов следует, в частности, что точность порядка 1% достигается при $n = 4$ для второго метода (фиг. 4), в то время как эта же точность для первого метода достигается при $n = 40$ (фиг. 3). На фиг. 5 приведены зависимости $W(x, y, z)$ от вертикальной координаты z при $x = 1, y = 0.5$: сплошная линия – расчеты по формулам (2.5) при $n = 23$, пунктир – расчеты по формулам (2.6) при $n = 4$. На фиг. 6 изображены зависимости $W(x, y, z)$ от горизонтальной координаты x , рассчитанные по формулам (2.6) при $z = -0.6, y = 2.2, n = 4$. Как показывают численные расчеты, при больших значениях x, y основной вклад в полное поле $W(x, y, z)$ вносят слагаемые, отвечающие действительным полюсам, вклад от мнимых полюсов, описывающих форму нелокального источника, экспоненциально мал. Вблизи нелокального источника возмущений основной вклад в полное поле $W(x, y, z)$ вносят слагаемые, отвечающие мнимым полюсам, и в ближней зоне представление решения в виде (2.6) обеспечивает более быструю сходимость ряда к искомому решению.



Фиг. 4. Зависимость $W(x, y, z)$ от числа суммируемых волновых мод.



Фиг. 5. Зависимость $W(x, y, z)$ от вертикальной координаты z .



Фиг. 6. Зависимость $W(x, y, z)$ от горизонтальной координаты x .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решена задача о построении аналитических решений, описывающих генерацию ВГВ от нелокального источника возмущений, который движется на поверхности стратифицированной среды конечной глубины. Использовано модельное распределение формы источника, обладающее радиальной симметрией, которое качественно верно описывает основные пространственно-временные характеристики природных источников генерации ВГВ в океане. Полученное решение представляет собой сумму волновых мод. Изучены два способа аналитического представления решения. Первый метод – разложение решения в ряд по собственным функциям основной спектральной задачи уравнения внутренних волн. Второй метод основан на теореме Миттаг–Леффлера о разложении мероморфных функций для случая простых полюсов. Приведены результаты численных расчетов ВГВ, иллюстрирующих два метода аналитического представления решений. Показано, что поля ВГВ на больших расстояниях от движущегося нелокального источника (много больших его размеров) практически не зависят от его формы и определяются законом дисперсии и скоростью источника. Форма источника определяет свойства возбуждаемых волновых полей только в ближней зоне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miropol'skii Yu.Z., Shishkina O.V.* Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2001. 406 p.
2. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: Introduction to wave dynamics. Berlin: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic internal tides. Observations, analysis and modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V., Velarde M.G. (Eds.)* The ocean in motion. Springer Oceanography. Berlin: Springer Inter. Publ. AG, 2018. 625 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* A general approach to ocean wave dynamics research: modelling, asymptotics, measurements. М.: ОнтоПринт, 2019. 587 с.
8. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. V. 720. P. 104–139.
9. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированный началом движения тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 3. С. 83–97.
10. *Lecoanet D., Bars M.Le, Burns K.J., Vasil G.M., Brown B.P., Quataert E., Oishi J.S.* Numerical simulations of internal wave generation by convection in water // Phys. Rev. E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2015. V. 9. P. 1–10.
11. *Voelker G.S., Myers P. G., Walter M., Sutherland B. R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dynam. Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 16–133.
12. *Wang H., Chen K., You Y.* An investigation on internal waves generated by towed models under a strong halocline // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 065104.
13. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // Успехи физ. наук. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
14. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I.Yu.* Far fields of internal gravity waves from a source moving in the ocean with an arbitrary buoyancy frequency distribution // Russian J. Earth Sci. 2019. V. 19. № 5. P. ES5003.
15. *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: ИД Интеллект, 2008. 344 с.
16. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. В 2-х частях. М.: URSS, 2015. 864 с.
17. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного М.: Наука, 1989. 480 с.
18. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. М.: Лань, 2002. 408 с.