ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 4, с. 555–570

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.626

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ УПРАВЛЕНИЙ

 А. Н. Квитко

199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербургский гос. университет, Россия

e-mail: alkvit46@mail.ru, a.kvitko@spbu.ru

Поступила в редакцию 01.09.2020 г.
Переработанный вариант 17.10.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения дифференцируемой управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние фазового пространства с учетом ограничения на управление и внешнее возмущение. Получен конструктивный критерий, гарантирующий указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при решении конкретной практической задачи и ее численном моделировании. Библ. 34. Фиг. 1.

Ключевые слова: управляемость, граничные условия, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0044466921040074

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений развития математической теории управления является исследование проблемы перевода различных управляемых систем дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Задачи построения управляющих функций, обеспечивающие указанный перевод, называются граничными задачами. Им посвящено большое количество работ. Наиболее близкие (по тематике данной статьи) результаты содержатся в публикациях [1]–[31] и [34]. Основные аспекты исследования граничных задач включают в себя вопросы, связанные с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих существование их решений, см. [1]–[6], [8]–[10], [12]–[17], [20]–[22], [24]–[26], [29]–[31] и [34]; нахождения и оценки границ конечных состояний, при которых возможен перевод из заданного начального состояния при ограничениях на ресурс управления, см. [1], [4], [7], [8], [10], [11], [18], [19], [23], [27], [28] и [31], а также разработкой аналитических или численных методов построения искомых управляющих функций и соответствующих им функций фазовых координат, см. [1]–[4], [7], [25] и [31]. В настоящее время проблема граничных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения граничных задач для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана. Основные усилия автора направлены на разработку достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения локальной граничной задачи для широкого класса нелинейных стационарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом ограничений на управление и внешние возмущения, а также нахождению конструктивного критерия, гарантирующего существование искомого решения. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной задачи к решению задачи стабилизации линейной нестационарной системы и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты исследования данной работы наиболее тесно связаны с результатами, полученными в [23], [25], [31]. В работе Р. Калмана [2] получен алгоритм решения граничной задачи для линейной стационарной управляемой системы и найден критерий глобальной управляемости в терминах матриц ее правой части. В [3] и [25] приведены достаточные условия калмановского типа локальной управляемости нелинейной стационарной системы в окрестности как нулевого, так и ненулевого положений равновесия. Суть их в том, что вопрос о локальной управляемости в окрестности положений равновесия сводится к вопросу глобальной управляемости системы, полученной посредством линеаризации исходной нелинейной системы в окрестности указанных положений равновесия. В результате найденное достаточное условие локальной управляемости совпадает с условием глобальной управляемости, сформулированном в [2]. В [31], в отличие от работ [23], [25], для нелинейных стационарных систем с достаточно гладкими правыми частями, разработан алгоритм решения локальной граничной задачи с учетом ограничения на управление и внешние возмущения. Кроме того, получено достаточное условие калмановского типа локальной нуль управляемости. При этом линеаризация системы проводится в окрестности точки, которая может и не быть положением равновесия для исходной системы. В настоящей статье рассматривается задача перевода нелинейной стационарной системы в начало координат из произвольной точки фазового пространства, лежащей в окрестности начала координат. Эта задача близка по постановке той, которая была рассмотрена в [31]. Главное отличие ее результатов состоит в том, что алгоритм построения искомой управляющей функции и соответствующей траектории применим для более широкого класса систем. А именно значительно ослаблено требование гладкости правой части исходной системы и в постановке задачи наложено дополнительное условие на конечные значения управляющей функции. Кроме того, доказано, что условие калмановского типа локальной управляемости, совпадающее с условием, полученным в работе [31], является не только достаточным, но и необходимым.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x} \in R^n$; $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u} \in R^r$, $t \in [0,1]$, $r \le n$, $\mathbf{F} \in R^n$,

$$\mathbf{f} \in C^{2n}(R^n \times R^r; R^n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)^{\mathrm{T}}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

$$B = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \quad A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \tag{1.3}$$

$$\operatorname{rank} S = n, \quad S = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B), \tag{1.4}$$

$$\|\mathbf{u}\| < N. \tag{1.5}$$

Пусть $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)^{\mathrm{T}}$, – фиксированное состояние.

Задача. Найти пару функций:

$$\mathbf{x}(t) \in C^1([0,1]; R^n), \quad \mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \in C^1([0,1] \times R^n \times R^n; R^r), \tag{1.6}$$

удовлетворяющих системе (1.1), условию (1.6), а также условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(1, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \tag{1.7}$$

Указанную пару $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$ будем называть *решением* задачи (1.1), (1.7).

Определение. Будем говорить, что задача (1.1), (1.7) локально разрешима, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{F}$, удовлетворяющих условиям $\|\bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon$ существует решение задачи (1.1), (1.7).

Теорема. *Пусть для правой части системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.3). *Тогда для локальной разрешимости задачи* (1.1), (1.7) *необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* (1.4). *При этом соответствующее решение задачи* (1.1), (1.7) *может быть получено после решения задачи стабилизации линейной нестационарной системы специального вида и последующим решением задачи Коши для вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Основная идея решения поставленной задачи состоит в том, чтобы посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение исходной задачи свести к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится вспомогательное управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части этой системы. На заключительном этапе находится решение задачи Коши для вспомогательной системы, замкнутой указанным управлением, и осуществляется переход к исходным зависимым и независимым переменным.

2. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F})$, удовлетворяющую системе (1.1), условиям (1.6), а также условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to 1, \quad \mathbf{u}(t,\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Указанную пару будем называть *решением* задачи (1.1), (2.1).

Переходя к пределу в решении задачи (1.1), (2.1), при $t \to 1$ получаем решение задачи (1.1), (1.7).

Сделаем в системе (1.1) преобразование независимой переменной t по формуле:

$$t = 1 - e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0,+\infty), \tag{2.2}$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной τ система (1.1) и условия (2.1) примут вид:

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{f}(\mathbf{c},\mathbf{d}) + \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{F}, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{u}(t(\tau),\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}), \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{c}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{d}(0,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \to \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad \mathbf{d}(\tau,\mathbf{0},\mathbf{0}) \equiv 0, \\ \tau \in [0,+\infty), \quad \mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_r)^{\mathrm{T}}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Пару функций $\mathbf{c}(\tau) \in C^1([0,\infty);R^n)$, $\mathbf{d}(\tau,\bar{\mathbf{x}},\mathbf{F}) \in C^1([0,\infty)\times R^n \times R^n;R^r)$, удовлетворяющую системе (2.3) и условиям (2.5), будем называть *решением* задачи (2.3), (2.5). Имея решение задачи (2.3), (2.5) с помощью формул (2.2), (2.4) можно получить решение задачи (1.1), (2.1). Введем обозначения

$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i\mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i\mathbf{d}, \quad \theta_i \in [0,1], \quad i = 1,\ldots,n\,, \quad |k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \quad |m| = \sum_{i=1}^{r} m_i,$$
$$k! = k_1!\ldots k_n!, \quad m! = m_1!\ldots m_r!.$$

Используя свойство (1.2), (1.3) и разложение правой части системы (1.1) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\mathbf{0},\mathbf{0})$, систему (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dc_i}{d\tau} = {}& \alpha e^{-\alpha\tau}F_i + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_j + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_j + \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_jc_k + \right. \\ & \left. + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_jd_k + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_jd_k\right] + \ldots + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n-1}\frac{1}{k!\,m!}\frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\partial u_2^{m_2}\ldots\partial u_r^{m_r}}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_1^{k_1}\ldots c^{k_n}d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r} + \\ & + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n}\frac{1}{k!\,m!}\frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\partial u_2^{m_2}\ldots\partial u_r^{m_r}}(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})c_1^{k_1}\ldots c_n^{k_n}d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}, \quad i = 1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ограничим область изменения $\mathbf{c}(\tau),\mathbf{F}$ неравенствами

$$\|\mathbf{c}(\tau)\| < C_1, \quad \|\mathbf{F}\| < C_1, \quad \tau \in [0,\infty). \tag{2.7}$$

Сделаем множество преобразований сдвигов функций $c_i(\tau) : c_i(\tau) \to c_i^{(2n)}(\tau)$, $i = 1,\ldots,n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент $\mathbf{c}^{(2n)}$ и $\mathbf{d}$, в области (1.5), (2.7) удовлетворяли оценке $O(e^{-2n\alpha\tau}\|\mathbf{F}\|)$ при $\tau\to\infty$, $\|\mathbf{F}\|\to 0$.

На первом этапе выполним замену $c_i(\tau), i = 1,\ldots,n$, по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^{(1)} - e^{-\alpha\tau}F_i, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.8}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|}f_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|}f_i}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}\partial u_1^{m_1}\ldots\partial u_r^{m_r}}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

После подстановки (2.8) в левую и правую части системы (2.6) с учетом введенного обозначения получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_j + \frac{1}{2}\alpha\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})e^{-3\alpha\tau}F_jF_k + \alpha\Bigg(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_j^{(1)} - \\
- e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_kc_j^{(1)}\Bigg) + \alpha\Bigg(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_k - \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})e^{-2\alpha\tau}F_jd_k\Bigg) + \\
+ \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_j^{(1)}c_k^{(1)} + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_kc_j^{(1)} + \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^r\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_jd_k + \\
+ \ldots + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n-1}\frac{1}{k!\,m!}D^{|k|+|m|}f_i(\mathbf{0},\mathbf{0})(c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\ldots\times(c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}\times\ldots\times d_r^{m_r} + \\
+ \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n}\frac{1}{k!\,m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})(c_1^{(1)} - e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\ldots\times(c_n^{(1)} - e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}\times\ldots\times d_r^{m_r}, \quad i = 1,\ldots,n. \\
\ldots
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Из (2.5), (2.8) следует

$$c_i^{(1)}(0) = -\bar{x}_i + F_i, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{2.10}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (2.9) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(1)}$ и $\mathbf{d}$, в области (1.5), (2.7) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha\tau}\|\mathbf{F}\|)$, $\tau\to\infty$, $\|\mathbf{F}\|\to 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{gathered}
c_i^{(1)}(\tau) = c_i^{(2)}(\tau) + \frac{1}{2}e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_j = c_i^{(2)}(\tau) + e^{-2\alpha\tau}\phi_i^{(2)}(\mathbf{F}), \\
\phi_i^{(2)}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_j, \quad \phi_i^{(2)}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad i = 1,\ldots,n.
\end{gathered} \tag{2.11}$$

В результате в новых переменных система (2.9) и начальные условия (2.10) примут вид

$$\begin{gathered}
\frac{dc_i^{(2)}}{d\tau} = \alpha\Bigg(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})e^{-3\alpha\tau}F_jF_k + e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})\phi_j^{(2)} - e^{-4\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_k\phi_j^{(2)} + \\
+ \frac{1}{2}e^{-5\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})\phi_j^{(2)}\phi_k^{(2)}\Bigg) + \alpha\Bigg(e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_j^{(2)} - e^{-2\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_kc_j^{(2)} + \\
+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})\phi_k^{(2)}c_j^{(2)}\Bigg) + \alpha(e^{-\alpha\tau}\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_k - e^{-2\alpha\tau}\sum_{k=1}^r\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})F_jd_k + \\
+ e^{-3\alpha\tau}\sum_{k=1}^r\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_k\partial x_j}(\mathbf{0},\mathbf{0})\phi_j^{(2)}d_k\Bigg) + \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})c_k^{(2)}c_j^{(2)} + \alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_kc_j^{(2)} +
\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$+\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\mathbf{0},\mathbf{0})d_jd_k+\ldots+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n-1|}\frac{1}{k!\,m!}D^{k+m}f_i(\mathbf{0},\mathbf{0})(c_1^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\phi_1^{(2)}-$$

$$-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\ldots\times(c_n^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\phi_n^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}\ldots d_r^{m_r}+\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n}\frac{1}{k!\,m!}D^{|k|+|m|}f_i(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})(c_1^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\phi_1^{(2)}-$$

$$-e^{-\alpha\tau}F_1)^{k_1}\times\ldots\times(c_n^{(2)}+e^{-2\alpha\tau}\phi_n^{(2)}-e^{-\alpha\tau}F_n)^{k_n}d_1^{m_1}\times\ldots\times d_r^{m_r},\quad i=1,\ldots,n,$$

$$c_i^{(2)}(0)=-\overline{x}_i+F_i-\phi_i^{(2)}(\mathbf{F}).\tag{2.13}$$

В отличие от предыдущей замены, в правой части системы (2.12) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(2)}$ и $\mathbf{d}$, в области (1.5), (2.7) удовлетворяют оценке $O(e^{-3\alpha\tau}\|\mathbf{F}\|)$, $\tau\to\infty$, $\|\mathbf{F}\|\to 0$, $i=1,\ldots,n$. Используя (2.8)–(2.13) и индуктивный переход на k-м шаге, получим искомое преобразование вида

$$c_i^{(k-1)}(\tau)=c_i^{(k)}+e^{-k\alpha\tau}\phi_i^{(k)}(\mathbf{F}),\quad \phi_i^{(k)}(\mathbf{0})=0,\quad i=1,\ldots,n.\tag{2.14}$$

Если применить преобразования (2.14) $2n$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $\mathbf{c}^{(2n)}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\ldots,n$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора $\mathbf{d}$ и содержащие коэффициенты $e^{-i\alpha\tau}$, $i=1,\ldots,n$, то согласно (2.8)–(2.14) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{c}^{(2n)}}{d\tau}=P\mathbf{c}^{(2n)}+Q\mathbf{d}+\mathbf{R_1}(\mathbf{c^{(2n)}},\mathbf{d},\mathbf{F},\tau)+\mathbf{R_2}(\mathbf{c^{(2n)}},\mathbf{d},\mathbf{F},\tau)+\mathbf{R_3}(\mathbf{c^{(2n)}},\mathbf{d},\mathbf{F},\tau)+\mathbf{R_4}(\overline{\mathbf{x}},\mathbf{c^{(2n)}},\mathbf{d},\mathbf{F},\tau),\\ \mathbf{R}_1=(R_1^1,\ldots,R_1^n)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{R}_2=(R_2^1,\ldots,R_2^n)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{R_3}=(R_3^1,\ldots,R_3^n)^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{R}_4=(R_4^1,\ldots,R_4^n)^{\mathrm{T}}.\end{gathered}\tag{2.15}$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{c}^{(2n)}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i\ge n+1$, а также аналогичные слагамые, содержащиеся в сумме $\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|=2n}$ правой части и не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{d}$. Функции R_2^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{d}$ с коэффициентами $e^{-i\alpha\tau}$, $i\ge n+1$, а также аналогичные слагаемые, содержащиеся в сумме $\alpha e^{-\alpha\tau}\sum_{|k|+|m|+l=2n}$ правой части системы и не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{c}^{(2n)}$. В R_3^i содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $\mathbf{c}^{(2n)}$ и $\mathbf{d}$. Функция R_4^i состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{(2n)}$ и $\mathbf{d}$. Матрицы P, Q и начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered}P=\alpha e^{-\alpha\tau}(A+e^{-\alpha\tau}P_1(\mathbf{F})+\ldots+e^{-(n-1)\alpha\tau}P_{n-1}(\mathbf{F})),\\ Q=\alpha e^{-\alpha\tau}(B+e^{-\alpha\tau}Q_1(\mathbf{F})+\ldots+e^{-(n-1)\alpha\tau}Q_{n-1}(\mathbf{F})),\end{gathered}\tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{c}^{(2n)}(0)=\overline{\mathbf{x}}+\mathbf{F}-\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{F})-\mathbf{f}^{(3)}(\mathbf{F})-\ldots-\mathbf{f}^{(2n)}(\mathbf{F}),\\ \mathbf{f}^{(i)}=(\phi_1^{(i)},\ldots,\phi_n^{(i)})^T,\quad \mathbf{f}^{(i)}(0)=0,\quad i=1,\ldots,2n.\end{gathered}\tag{2.17}$$

Введем новую управляющую функцию $\boldsymbol{\upsilon}(\tau)$, связанную с $\mathbf{d}(\tau)$ уравнениями

$$\frac{d\mathbf{d}(\tau)}{d\tau}=\boldsymbol{\upsilon},\quad \boldsymbol{\upsilon}=(\upsilon_1,\ldots,\upsilon_r)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\upsilon}\in R^r.\tag{2.18}$$

Положим

$$\mathbf{d}(0)=\mathbf{0}.\tag{2.19}$$

Тогда систему (2.15), (2.18) и начальные данные (2.17), (2.19) можно записать в виде

$$\frac{d\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} = \overline{P}\overline{\mathbf{c}}^{(2n)} + \overline{Q}\boldsymbol{\upsilon} + \overline{\mathbf{R}}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \overline{\mathbf{R}}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + \overline{\mathbf{R}}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau) + $$
$$+ \overline{\mathbf{R}}_4(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau), \quad \overline{\mathbf{c}}^{(2n)} = (\mathbf{c}^{(2n)},\ \mathbf{d})^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1},$$
$$\overline{\mathbf{R}}_1 = (R_1^1, \ldots, R_1^n, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1}, \quad \overline{\mathbf{R}}_2 = (R_2^1, \ldots, R_2^n, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1}, \tag{2.20}$$
$$\overline{\mathbf{R}}_3 = (R_2^1, \ldots, R_2^n, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1}, \quad \overline{\mathbf{R}}_4 = (R_4^1, \ldots, R_4^n, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1},$$
$$\overline{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ \mathrm{O}_1 & \mathrm{O}_2 \end{pmatrix}_{n+r\times n+r}, \quad \overline{Q} = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_3 \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}_{n+r\times r},$$
$$\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(0) = \overline{\mathbf{c}}_0^{(2n)}, \quad \overline{\mathbf{c}}_0^{(2n)} = (\mathbf{c}^{(2n)}(0), 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1}, \tag{2.21}$$

где O_i, $-i = 1, \ldots, 3$, — матрицы с нулевыми элементами соответствующих размерностей, E — единичная матрица. Индексы $n + r \times 1$, $n + r \times n + r$, $n + r \times r$ указывают на размерности введенных соответствующих векторов и матриц.

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \in C^1[0, \infty)$, $\boldsymbol{\upsilon}(\tau) \in C[0, \infty)$, удовлетворяющую системе (2.20) и условиям

$$\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(0, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) = \overline{\mathbf{c}}_0^{(2n)}, \quad \overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{F}) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad \mathbf{d}(\tau, 0, 0) \equiv \mathbf{0}. \tag{2.22}$$

Указанную пару $\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{F})$, $\boldsymbol{\upsilon}(\tau)$ будем называть *решением* задачи (2.20), (2.22). Легко видеть, что имея пару функций $(\mathbf{c}^{(2n)}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) = \overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau)$, входящую в решение задачи (2.20), (2.22) и используя формулы (2.14), (2.11) и (2.8), получаем решение задачи (2.3), (2.5).

Для удобства дальнейших рассуждений введем область изменения $\mathbf{c}^{(2n)}$, согласованную с областью (2.7). Из условий (2.14), (2.11), (2.8) вытекает равенство $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{(2n)} + \chi(\mathbf{F})$, $\chi(\mathbf{F}) \to \mathbf{0}$ при $\mathbf{F} \to 0$. Отсюда $\|\mathbf{c}\| \le \left\|\mathbf{c}^{(2n)}\right\| + \|\chi(\mathbf{F})\|$. В силу сказанного следует существование $C_2 > 0, C_2 < C_1$ таких, что для всех $\mathbf{c}^{(2n)}$, $\mathbf{F}$ принадлежащих области

$$\left\|\mathbf{c}^{(2n)}\right\| < C_2, \quad \|\mathbf{F}\| < C_2 \tag{2.23}$$

соответствующая функция $\mathbf{c}(\tau)$ будет принадлежать области (2.7)

3. ОЦЕНКА СЛАГАЕМЫХ ПРАВОЙ ЧАСТИ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЛЕММЫ

Из построения системы (2.15) следует, что в области (1.5), (2.23) имеют место оценки

$$\|P_i(\mathbf{F})\| \to 0, \quad \|Q_j(\mathbf{F})\| \to 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{F}\| \to 0, \quad i = 2, \ldots, n-1, \quad j = 2, \ldots, n-1, \tag{3.1}$$

$$\left\|\mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\right\| \le e^{-(n+1)\alpha\tau} L_1 \left\|\mathbf{c}^{(2n)}\right\|, \quad \left\|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\right\| \le e^{-(n+1)\alpha\tau} L_2 \|\mathbf{d}\|, \tag{3.2}$$

$$\left\|\mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\right\| \le e^{-\alpha\tau} L_3 \left(\left\|\mathbf{c}^{(2n)}\right\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2\right), \quad \left\|\mathbf{R}_4(\mathbf{c}^{(2n)}, \mathbf{d}, \mathbf{F}, \tau)\right\| \le L_4(\mathbf{F}) e^{-(2n+1)\alpha\tau}. \tag{3.3}$$

Кроме того, из определения $\mathbf{R}_4$ следует

$$L_4(\mathbf{F}) \to 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{F}\| \to 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} = \overline{P}\mathbf{c}^{(2n)} + \overline{Q}\boldsymbol{\upsilon}. \tag{3.5}$$

Лемма. *Пусть для системы* (1.1) *выполнены условия* (1.2), (1.4). *Тогда существует* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < C_2$ *такое, что для всех* $\mathbf{F} \in R^n : \|\mathbf{F}\| < \varepsilon_1$ *существует управление* $\boldsymbol{\upsilon}(\tau)$ *вида*

$$\boldsymbol{\upsilon} = M(\tau)\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}, \tag{3.6}$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы системы (3.5), (3.6).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ И ТЕОРЕМЫ

Доказательство леммы. Пусть $\mathbf{L}_1^j(\tau)$, $j = 1,\ldots,r$, есть j-й столбец матрицы $\overline{Q}$. Построим матрицу

$$\begin{gathered} S_1(\tau) = \left\{\mathbf{L}_1^1(\tau),\mathbf{L}_2^1(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_1}^1(\tau),\mathbf{L}_1^2(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_2}^2(\tau),\ldots,\mathbf{L}_1^r(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_r}^r(\tau)\right\}, \\ \mathbf{L}_i^j(\tau) = \overline{P}\mathbf{L}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\mathbf{L}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1,\ldots,r, \quad i = 2,\ldots,k_j. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь k_j, $j = 1,\ldots,r$, — максимальное количество столбцов вида $\mathbf{L}_1^j,\ldots,\mathbf{L}_{k_j}^j$, $j = 1,\ldots,r$, таких, что векторы $\mathbf{L}_1^1(\tau),\mathbf{L}_2^1(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_1}^1(\tau)$, $\mathbf{L}_1^2(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_2}^2(\tau),\ldots,\mathbf{L}_1^r(\tau),\ldots,\mathbf{L}_{k_r}^r(\tau)$ линейно независимы. Пусть $\overline{\mathbf{L}}_1^j(\tau)$, $j = 1,\ldots,r$, есть j-й столбец матрицы Q. Рассмотрим матрицу

$$\begin{gathered} S_2(\tau) = \left\{\overline{\mathbf{L}}_1^1(\tau),\overline{\mathbf{L}}_2^1(\tau),\ldots,\overline{\mathbf{L}}_{k_1}^1(\tau),\overline{\mathbf{L}}_1^2(\tau),\ldots,\overline{\mathbf{L}}_{k_2}^2(\tau),\ldots,\overline{\mathbf{L}}_1^r(\tau),\ldots,\overline{\mathbf{L}}_{k_r}^r(\tau)\right\}, \\ \overline{\mathbf{L}}_i^j(\tau) = P\overline{\mathbf{L}}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\overline{\mathbf{L}}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1,\ldots,r, \quad i = 2,\ldots,k_j. \end{gathered}$$

Покажем, что при достаточно малых $\|\mathbf{F}\|$ из области (2.23) имеем

$$\operatorname{rank} S_2(\tau) = n, \quad \tau \in [0,\infty). \tag{4.2}$$

Путь $\overline{\overline{\mathbf{L}}}_1^j(\tau)$, $j = 1,\ldots,r$, есть j-й столбец матрицы $\alpha e^{-\alpha\tau}B$. Построим матрицу

$$\begin{gathered} S_3(\tau) = \left\{\overline{\overline{\mathbf{L}}}_1^1(\tau),\overline{\overline{\mathbf{L}}}_2^1(\tau),\ldots,\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{k_1}^1(\tau),\overline{\overline{\mathbf{L}}}_1^2(\tau),\ldots,\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{k_2}^2(\tau),\ldots,\overline{\overline{\mathbf{L}}}_1^r(\tau),\ldots,\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{k_r}^r(\tau)\right\}, \\ \overline{\overline{\mathbf{L}}}_i^j(\tau) = \alpha e^{-\alpha\tau}A\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{i-1}^j(\tau) - \frac{d\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{i-1}^j}{d\tau}(\tau), \quad j = 1,\ldots,r, \quad i = 2,\ldots,k_j. \end{gathered}$$

Из равенств (2.16) и условия (3.1) следует существование $\overline{\varepsilon}_1 > 0$ такого, что для всех $\mathbf{F}$ из области: $\|\mathbf{F}\| < \overline{\varepsilon}_1$, $\overline{\varepsilon}_1 < C_2$ $\operatorname{rank} S_2(\tau) = \operatorname{rank} S_3(\tau)$, $\tau \in [0,\infty)r$. Рассуждая методом от противного и используя (1.4), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\operatorname{rank} S_2(\tau) = \operatorname{rank} S_3(\tau) = n, \quad \tau \in [0,\infty).$$

Кроме того, из структуры матрицы (4.1) и условия (4.2) следует, что $\operatorname{rank} S_1(\tau) = n + r$, $\tau \in [0,\infty)$, а также

$$\left\|S_1^{-1}(\tau)\right\| = \mathrm{O}(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \to \infty. \tag{4.3}$$

Ниже будем считать, что $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon_1$. Выполним в системе (3.5) замену переменных

$$\overline{\mathbf{c}}^{(2n)} = S_1(\tau)\mathbf{y}. \tag{4.4}$$

В результате преобразования (4.4) получим систему

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = S_1^{-1}(\tau)(\overline{P}S_1(\tau) - \frac{dS_1}{d\tau}(\tau))\mathbf{y} + S_1^{-1}(\tau)\overline{Q}\boldsymbol{\upsilon}.$$

Согласно [32] имеем

$$S_1^{-1}(\tau)\left(PS_1(\tau) - \frac{dS_1}{d\tau}(\tau)\right) = \{\overline{\mathbf{e}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_{k_1},\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{k_1}(\tau),\ldots,\overline{\mathbf{e}}_{k_1+\ldots+k_{r-1}+2},\ldots,\overline{\mathbf{e}}_{k_1+\ldots+k_r},\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{k_r}(\tau)\},$$

$\overline{\mathbf{e}}_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}{}_{n+r\times 1}$, где 1 стоит на i-м месте, $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{k_j}(\tau) = (-\varphi^1_{k_1}(\tau),\ldots,-\varphi^{k_1}_{k_1}(\tau),\ldots,-\varphi^1_{k_j}(\tau),\ldots,-\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau),$ $0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}_{n+r\times 1}$; $-\varphi^i_{k_j}$ являются коэффициентами разложения вектора $\mathbf{L}^j_{k_j+1}$ по векторам $\mathbf{L}^1_i$; $i = 1,\ldots,k_1,\ldots,\mathbf{L}^j_i$; $i = 1,\ldots,k_j$, т.е.

$$\mathbf{L}^j_{k_j+1} = -\sum_{i=1}^{k_1}\varphi^i_{k_1}(\tau)\mathbf{L}^1_i - \ldots - \sum_{i=1}^{k_j}\varphi^i_{k_j}(\tau)\mathbf{L}^j_i; \tag{4.5}$$

$S_1^{-1}(\tau)\bar{Q} = \{\overline{\mathbf{e}}_1,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_{k_j+1},\ldots,\overline{\mathbf{e}}_{\gamma+1}\}_{n+r\times r}$; $\gamma = \sum_{j=1}^{r-1}k_j$. Рассмотрим задачу стабилизации системы

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{y}_{k_j}}{d\tau} = \{\overline{\mathbf{e}}^{k_i}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}^{k_j}_{k_j},\overline{\overline{\boldsymbol{\varphi}}}_{k_j}(\tau)\}\mathbf{y}_{k_j} + \overline{\mathbf{e}}^{k_i}_1\upsilon_j; \quad j = 1,\ldots,r,\\ \mathbf{y}_{k_j} = (y^1_{k_i},\ldots,y^{k_j}_{k_j})^{\mathrm{T}}_{k_j\times 1}; \quad \overline{\mathbf{e}}^{k_j}_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}_{k_j\times 1},\end{gathered} \tag{4.6}$$

где единица стоит на i-м месте, $\overline{\overline{\boldsymbol{\varphi}}}_{k_j}(\tau) = (-\varphi^1_{k_j}(\tau),\ldots,-\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau))^{\mathrm{T}}_{k_j\times 1}$. Пусть $y^{k_j}_{k_j} = \psi(\tau)$. Фазовые переменные системы (4.6) связаны с функцией $\psi(\tau)$ и ее производными равенствами:

$$\begin{gathered}y^{k_j}_{k_j} = \psi(\tau),\\ y^{k_j-1}_{k_j} = \psi^{(1)}(\tau) + \varphi^{k_j}_{k_j}(\tau)\psi(\tau),\\ y^{k_j-2}_{k_j} = \psi^{(2)}(\tau) + \varphi^{k_j}_{k_j}(\tau)\psi^{(1)}(\tau) + \left(\frac{d\varphi^{k_j}_{k_j}}{d\tau}(\tau) + \varphi^{k_j-1}_{k_j}(\tau)\right)\psi(\tau),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^1_{k_j} = \psi^{(k_j-1)} + r_{k_j-2}(\tau)\psi^{(k_j-2)} + \ldots + r_1(\tau)\psi^{(1)} + r_0(\tau)\psi.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Дифференцируя последнее равенство (4.7), сводим систему (4.6) к уравнениям

$$\psi^{(k_j)}(\tau) + \varepsilon_{k_j-1}(\tau)\psi^{(k_j-1)}(\tau) + \ldots + \varepsilon_0(\tau)\psi(\tau) = \upsilon_j, \quad j = 1,\ldots,r. \tag{4.8}$$

Замечание. Из (2.16), определения функций $\varphi^i_{k_j}(\tau)$, $i = 1,\ldots,k_j$, и условия (4.5) следует, что в (4.6)–(4.8) функции $\varphi^{k_j}_{k_j}(\tau),\ldots,\varphi^2_{k_j}(\tau)$, их производные, а также функции $r_{k_j-2}(\tau),\ldots,r_0(\tau)$, $\varepsilon_{k_j-1}(\tau),\ldots,\varepsilon_0(\tau)$ ограничены. Пусть

$$\upsilon_j = \sum_{i=1}^{k_j}(\varepsilon_{k_j-i}(\tau) - \gamma_{k_j-i})\psi^{(k_j-i)}(\tau), \quad j = 1,\ldots,r, \tag{4.9}$$

где γ_{k_j-i}, $i = 1,\ldots,k_j$, выбраны так, чтобы корни $\lambda^1_{k_i},\ldots,\lambda^{k_i}_{k_i}$ уравнений

$$\lambda^{k_i} + \gamma_{k_i-1}\lambda^{k_i-1} + \ldots + \gamma_0 = 0, \quad i = 1,\ldots,r,$$

удовлетворяли условиям

$$\lambda^1_{k_i},\ldots,\lambda^j_{k_i}, \quad i \neq j, \quad \lambda^j_{k_i,} < -(2n+1)\alpha - 1, \quad j = 1,\ldots,k_i, \quad i = 1,\ldots,r.$$

Возвращаясь в (4.9) к исходным переменным, получаем $\upsilon_j = \boldsymbol{\delta}_{k_j}(\tau)T^{-1}_{k_j}(\tau)S^{-1}_{1k_j}(\tau)\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}$, $j = 1,\ldots,r$, $\boldsymbol{\delta}_{k_j} = (\varepsilon_{k_j-1}(\tau) - \gamma_{k_j-1},\ldots,\varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, $T_{k_j}(\tau)$ – матрица равенства (4.7), т.е. $y_{k_j} = T_{k_j}(\tau)\overline{\boldsymbol{\psi}}(\tau)$, $\overline{\boldsymbol{\psi}}(\tau) = (\psi^{(k_j-1)}(\tau),\ldots,\psi(\tau))^{\mathrm{T}}$; $S^{-1}_{1k_j}(\tau)$ – матрица, состоящая из соответствующих k_j-строк матрицы $S_1^{-1}(\tau)$. Найденное управление можно записать в виде (3.6) , где

$$M(\tau) = \boldsymbol{\delta}_k(\tau)T_k^{-1}(\tau)S_{1k}^{-1}(\tau) = (\boldsymbol{\delta}_{k_1}(\tau)T^{-1}_{k_1}(\tau)S^{-1}_{1k_1}(\tau),\ldots,\boldsymbol{\delta}_{k_r}(\tau)T^{-1}_{k_r}(\tau)S^{-1}_{1k_r}(\tau))^{\mathrm{T}}. \tag{4.10}$$

Пусть $\Psi(\tau)$, $\Psi(0) = E$ (E – единичная матрица) – фундаментальная матрица системы (4.8), замкнутая управлением (4.9), т.е. системы (4.8) при условии, что в ее правую часть подставлена функция (4.9). Очевидно, что элементами матрицы $\Psi(\tau)$ являются экспоненты с отрицательными показателями и их производные.

Рассмотрим систему (3.5), замкнутую управлением (3.6), (4.10)

$$\frac{d\overline{\mathbf{c}}^{(4n)}}{d\tau} = C(\tau)\overline{\mathbf{c}}^{(4n)}, \quad C(\tau) = \bar{P}(\tau) + \bar{Q}(\tau)M(\tau). \tag{4.11}$$

Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $T(\tau)$, где на ее диагонали стоят матрицы T_{k_i}, $i = 1,\dots,r$. С учетом (4.4), (4.7) фундаментальная матрица $\Phi(\tau)$, $\Phi^{-1}(0) = E$ системы (4.11) имеет вид

$$\Phi(\tau) = S_1(\tau)T(\tau)\Psi(\tau)T^{-1}(0)S_1^{-1}(0). \tag{4.12}$$

На основании (4.3), замечания и (4.12) следует, что можно подобрать число $\lambda > 0$ такое, что имеют место оценки

$$\|\Phi(\tau)\| \le Ke^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \quad \left\|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\right\| \le Ke^{-\lambda(\tau-t)\tau}e^{(n-1)\alpha t}, \quad \tau \ge t, \quad \tau \in [0,\infty). \tag{4.13}$$

В качестве величины $\varepsilon_1 > 0$, которая фигурирует в формулировке леммы, можно положить $\varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Рассмотрим систему (2.20) при условии, что в ее правую часть подставлено управление (3.6), (4.10). Согласно (4.11) ее можно записать в виде

$$\frac{d\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}}{d\tau} = C\overline{\mathbf{c}}^{(2n)} + \overline{\mathbf{R}}_1(\mathbf{c}^{(\mathbf{2n})},\mathbf{d},\tau,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_2(\mathbf{c}^{(\mathbf{2n})},\mathbf{d},\tau,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_3(\mathbf{c}^{(\mathbf{2n})},\mathbf{d},\tau,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_4(\mathbf{c}^{(\mathbf{2n})},\mathbf{d},\tau,\mathbf{F}). \tag{4.14}$$

Покажем, что все ее решения с начальными данными (2.21) при достаточно малых $\overline{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{F}$ экспоненциально убывают. Выполним в системе (4.14) замену переменной по формуле

$$\overline{\mathbf{c}}^{(2n)} = e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}(0) = \overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(0), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_2)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{z}_1 \in R^n, \quad \mathbf{z}_2 \in R^r. \tag{4.15}$$

В результате получим систему

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = D\mathbf{z} + e^{n\alpha\tau}\overline{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2,\tau,\mathbf{F}) + e^{n\alpha\tau}\overline{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2,\tau,\mathbf{F}) + \\ + e^{n\alpha\tau}\overline{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2,\tau,\mathbf{F}) + e^{n\alpha\tau}\overline{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha\tau}\mathbf{z}_2,\tau,\mathbf{F}), \quad D(\tau) = C(\tau) + n\alpha E.\end{gathered} \tag{4.16}$$

Пусть $\Phi_1(\tau)$ – фундаментальная матрица линейной части системы (4.16).Тогда из (4.13) и (4.15) следуют оценки

$$\|\Phi_1(\tau)\| \le Ke^{-\beta\tau}, \quad \left\|\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)\right\| \le Ke^{-\beta(\tau-t)}e^{n\alpha t}, \quad \beta = \lambda - n\alpha, \quad \tau \ge t. \tag{4.17}$$

Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\beta > 0$. Решение системы (4.16) с начальными данными (4.15), (2.21) имеет вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(\tau) = \Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(\tau_1)\mathbf{z}(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau}\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha\tau}(\overline{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \\ + \overline{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}))dt, \quad \tau \in [\tau_1,\infty),\end{gathered} \tag{4.18}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{z}(\tau) = \Phi_1(\tau)\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(0) + \int_0^{\tau}\Phi_1(\tau)\Phi_1^{-1}(t)e^{n\alpha t}(\overline{\mathbf{R}}_1(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_2(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \\ + \overline{\mathbf{R}}_3(e^{-n\alpha t}\mathbf{z_1}, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}) + \overline{\mathbf{R}}_4(e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_1, e^{-n\alpha t}\mathbf{z}_2,t,\mathbf{F}))dt, \quad \tau \in [0,\tau_1].\end{gathered} \tag{4.19}$$

Из равенств (4.18), (4.19) и условий (3.2), (3.3), (4.17) следует, что в области (1.5), (2.23) справедливы оценки

$$\|\mathbf{z}(\tau)\| \le Ke^{-\beta(\tau-\tau_1)}\|\mathbf{z}(\tau_1)\| + \int_{\tau_1}^{\tau}e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\overline{L}e^{-\alpha t}\|\mathbf{z}(t)\| + L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t}\right)dt, \quad \tau \in [\tau_1,\infty),$$

$$\left\|\mathbf{z}(\tau)\right\| \leq Ke^{-\beta(\tau-\tau_1)}\left\|\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(0)\right\| + \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-t)}K\left(\overline{L}e^{-\alpha t}\left\|\mathbf{z}(t)\right\| + L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t}\right)dt, \quad \tau \in [0,\tau_1].$$

Применяя к последним двум неравенствам известный результат [33, с. 185], получаем

$$\left\|\mathbf{z}(\tau)\right\| \leq Ke^{-\mu(\tau-\tau_1)}\left\|\mathbf{z}(\tau_1)\right\| + K\int_{\tau_1}^\tau e^{-\mu(\tau-t)}L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t}dt, \quad \tau \in [\tau_1,\infty), \quad \mu = \beta - K\overline{L}e^{-\alpha\tau_1}, \tag{4.20}$$

$$\left\|\mathbf{z}(\tau)\right\| \leq K_1e^{-\mu_1\tau}\left\|\overline{\mathbf{c}}_0^{(2n)}\right\| + K\int_0^\tau e^{-\mu_1(\tau-t)}L_4(\mathbf{F})e^{-\alpha t}dt, \quad \tau \in [0,\tau_1], \quad \mu_1 = \beta - \overline{K}L. \tag{4.21}$$

Зафиксируем $\tau_1 > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство $\mu > 0$. Тогда после вычисления интегралов во вторых слагаемых правой части (4.20) и (4.21) получим

$$\left\|\mathbf{z}(\tau)\right\| \leq Ke^{-\mu(\tau-\tau_1)}\left\|\mathbf{z}(\tau_1)\right\| + K_1e^{-2n\alpha\tau}L_4(\mathbf{F}), \quad \tau \in [\tau_1,\infty), \tag{4.22}$$

$$\left\|\mathbf{z}(\tau)\right\| \leq K_2\left\|\mathbf{c}_0^{(2n)}(0)\right\| + K_3L_4(\mathbf{F}), \quad \tau \in [0,\tau_1], \quad K_i > 0, \quad i = 1,2,3. \tag{4.23}$$

В (4.22), (4.23) константы $K_i > 0$, $i = 1,2,3$, зависят от области (1.5), (2.23).

Из (4.22), (4.23), (3.4) и формулы (2.17) следует, что можно выбрать $\overline{\varepsilon}_2 : 0 < \overline{\varepsilon}_2 < \varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1$ так, чтобы для всех $\overline{x}, F : \left\|\overline{\mathbf{x}}\right\| \leq \overline{\varepsilon}_2$, $\left\|\mathbf{F}\right\| \leq \overline{\varepsilon}_2$ функция $z(\tau)$ будет экспоненциально убывать и принадлежать области (1.5), (2.23). Используя формулу (4.15), получаем известную функцию $\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}(\tau)$. Ее вторая компонента даст известную функцию $\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$. Согласно (4.15), (4.22), (4.23) имеет место оценка

$$\left\|\overline{\mathbf{c}}^{(2n)}\right\| \leq K_4e^{-n\alpha\tau}\left\|\overline{\mathbf{c}}_0^{(2n)}\right\|, \quad K_4 > 0. \tag{4.24}$$

Из оценки (4.24) видно, что соответствующая пара функций $\mathbf{c}^{(2n)}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$ является решением задачи (2.20), (2.22). Далее, если в функции $\mathbf{c}^{(2n)}(\tau)$ по формулам (2.14), (2.11) и (2.8) перейти к функции $\mathbf{c}(\tau)$, то получим известные функции $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$, которые являются решением задачи (2.3), (2.5). В свою очередь подстановка функций $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$, в формулы (2.4), (2.2) и предельный переход при $t \to 1$ даст известные функции $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$, которые являются решением исходной задачи (1.1), (1,7).

Необходимость. Пусть условие (1.4) не выполнено. Предположим противное: существует $\varepsilon > 0$: такое, что для всех $\overline{\mathbf{x}} \in R^n$, $\mathbf{F} \in R^n : \left\|\overline{\mathbf{x}}\right\| < \varepsilon$, $\left\|\mathbf{F}\right\| < \varepsilon$ существует решение задачи (1.1), (1.7). Тогда для указанных $\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{F}$ существует решение задачи (2.3), (2.5).

Не умаляя общности, можно считать, что это решение принадлежит области(1.5), (2.7).

Систему (2.3) с учетом (1.2), (1.3) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}A\mathbf{c} + \alpha e^{-\alpha\tau}B\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F}) + \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{R}(\mathbf{c},\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau}\mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = (R_1,\ldots,R_n)^{\mathrm{T}}, \tag{4.25}$$

$$R_i(\mathbf{c},\mathbf{d}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial x_k}(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})c_jc_k + 2\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j\partial u_k}(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})c_jd_k + \sum_{j=1}^r\sum_{k=1}^r\frac{\partial^2 f_i}{\partial u_j\partial u_k}(\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{d}})d_jd_k\right],$$
$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i\mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i\mathbf{d}, \quad \theta_i \in [0,1], \quad i = 1,\ldots,n. \tag{4.26}$$

Из равенства (4.26) следует, что в области (1.5), (2.7) справедливы оценки

$$\left\|R_i\right\| \leq L(\left\|\mathbf{c}\right\|^2 + \left\|\mathbf{d}\right\|^2), \quad L > 0, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{4.27}$$

В свою очередь из условия (1.2), (1.3) и (1.6) и теоремы о зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данным и параметров, получаем равенства

$$\begin{aligned} c_i(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F}) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial \overline{x}_j}(\tau,\theta_i\overline{\mathbf{x}},\theta_i\mathbf{F})\overline{x}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial c_i}{\partial F_j}(\tau,\theta_i\overline{\mathbf{x}},\theta_i\mathbf{F})F_j, \quad \theta_i\in[0,1], \quad i=1,\ldots,n,\\ d_i(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F}) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_i}{\partial \overline{x}_j}(\tau,\overline{\theta}_i\overline{\mathbf{x}},\overline{\theta}_i\mathbf{F})\overline{x}_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial d_i}{\partial F_j}(\tau,\overline{\theta}_i\overline{\mathbf{x}},\overline{\theta}_i\mathbf{F})F_j, \quad \overline{\theta}_i\in[0,1], \quad i=1,\ldots,r. \end{aligned} \tag{4.28}$$

В (4.28) $\theta_i\overline{\mathbf{x}}$, $\theta_i F$, $\overline{\theta}_i\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\theta}_l F$ — средние точки из области $\|\overline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, $\|\mathbf{F}\| < \varepsilon$.

Пусть $\operatorname{rank} S = k$, $k < n$. Пусть $\mathbf{b}_j$, $j = 1,\ldots,r$, есть j-й столбец матрицы B. Введем в рассмотрение матрицу $S_4 = \{\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1,\ldots,A^{k_1-1}\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r,\ldots,A^{k_r-1}\mathbf{b}_r,\mathbf{l}_{k+1},\ldots,\mathbf{l}_n\}_{n\times n}$.

Здесь k_j, $j = 1,\ldots,r$ — максимальное количество столбцов вида $\mathbf{b}_j,\ldots,A^{k_j-1}\mathbf{b}_j$ таких, что векторы $\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_1,\ldots,A^{k_1-1}\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r$, $A\mathbf{b}_r,\ldots,A^{k_r-1}\mathbf{b}_r$ линейно независимы, вектора $\mathbf{l}_j$, $j = k+1,\ldots,n$, выбраны так, чтобы

$$\operatorname{rank} S_4 = n. \tag{4.29}$$

Используя (4.29), выполняем в системе (4.25) замену переменной $\mathbf{c}$ по формуле

$$\mathbf{c} = S_4\mathbf{y}. \tag{4.30}$$

Тогда согласно (4.30) и [32] в новых переменных система (4.25) и условия (2.5) примут вид

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix} A_1 & A_2\\ O_1 & A_3\end{pmatrix}\mathbf{y} + \alpha e^{-\alpha\tau}\begin{pmatrix} B_1\\ O_2\end{pmatrix}\mathbf{d} + \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}R(S_4\mathbf{y},\mathbf{d}(\tau,S_4\overline{\mathbf{y}},\mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau}S_4^{-1}\mathbf{F}, \quad \overline{\mathbf{y}} = S_4^{-1}\overline{\mathbf{x}}, \tag{4.31}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{y}(0) = \overline{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{d}(0,S_4\overline{\mathbf{y}},\mathbf{F}) = 0,\\ \mathbf{y}(\tau)\to\mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau,S_4\overline{\mathbf{y}},\mathbf{F})\to\mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau\to\infty, \quad \mathbf{d}(\tau,\mathbf{0},\mathbf{0})\equiv\mathbf{0}\\ \forall\overline{\mathbf{y}},\mathbf{F}: \|S_4\overline{\mathbf{y}}\| < \varepsilon, \quad \|S_4^{-1}\mathbf{F}\| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{4.32}$$

В правой части (4.31) A_1, A_2, A_3, B_1 — матрицы с постоянными коэффициентами соответственно размерностей $k\times k$, $k\times n-k$, $n-k\times n-k$, $k\times r$. Блоки O_1, O_2 являются матрицами с нулевыми элементами соответственно размерностей $n-k\times k$, $n-k\times r$. Представим вектор $y(\tau)$, который входит в решение задачи (4.31), (4.32) и вектор начальных данных $\overline{\mathbf{y}}$ в виде

$$\begin{gathered} \mathbf{y}(\tau) = (\tilde{\mathbf{y}}(\tau),\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau))^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(\tau) = (y_1(\tau),\ldots,y_k(\tau))^{\mathrm{T}}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (y_{k+1}(\tau),\ldots,y_n(\tau))^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\mathbf{y}} = (\overline{\tilde{\mathbf{y}}},\overline{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}})^{\mathrm{T}},\\ \overline{\tilde{\mathbf{y}}} = (\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_k)^{\mathrm{T}}, \quad \overline{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}} = (\overline{y}_{k+1},\ldots,\overline{y}_n)^{\mathrm{T}}. \end{gathered}$$

Введем в рассмотрение систему, состоящую из последних $n-k$ уравнений системы (4.31), предположив дополнительно, что в ее правую часть подставлены известные функции $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau,\overline{\mathbf{x}},\mathbf{F})$, удовлетворяющие (4.32). При этом $\tilde{\mathbf{y}}(\tau)$ удовлетворяет начальному условию $\tilde{\mathbf{y}}(0) = \overline{\tilde{\mathbf{y}}} = (0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}_{k\times 1}$. Тогда остальные $n-k$ компонент $\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau) = (\tilde{\tilde{y}}_{k+1}(\tau),\ldots,\tilde{\tilde{y}}_n(\tau))^{\mathrm{T}}_{n-k\times 1}$ вектора $\mathbf{y}(\tau)$ удовлетворяют системе

$$\frac{d\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}A_3\tilde{\tilde{\mathbf{y}}} + \alpha e^{-\alpha\tau}\overline{S}_4^{-1}\mathbf{R}(S_4\mathbf{y},\mathbf{d}(\tau,S_4\overline{\mathbf{y}},\mathbf{F})) + \alpha e^{-\alpha\tau}\overline{S}_4^{-1}\mathbf{F}, \tag{4.33}$$

где $\overline{S}_4^{-1}$ — матрица, состоящая из последних $n-k$ строк матрицы S_4^{-1}.

Согласно (4.32) для решения системы (4.33) должны быть выполнены условия

$$\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(0) = \overline{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}}, \quad \tilde{\tilde{\mathbf{y}}}(\tau)\to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to\infty \quad \forall\overline{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}},\mathbf{F}: \|\overline{\tilde{\tilde{\mathbf{y}}}}\| < \frac{\varepsilon}{\|S_4^{-1}\|}, \quad \|\mathbf{F}\| < \frac{\varepsilon}{\|S_4^{-1}\|}. \tag{4.34}$$

Покажем, что решения системы (4.33) не удовлетворяют условию (4.34). Очевидно, что $\Phi(\tau) = e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}e^{A_3}$ – фундаментальная матрица системы $\frac{d\tilde{\mathbf{y}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau}A_3\tilde{\mathbf{y}}$, нормированная в нуле. Решение системы (4.33) с начальными данными (4.34) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F}) = e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}e^{A_3}\bar{\tilde{\mathbf{y}}} + \int_0^\tau e^{-e^{-\alpha\tau}A_3}e^{e^{-\alpha t}A_3}\alpha e^{-\alpha t}\bar{S}_4^{-1}[R(S_4\mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \mathbf{F}]dt, \quad \tau \in [0, \infty).$$

Отсюда

$$e^{e^{-\alpha\tau}A_3}e^{-A_3}\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F}) = \bar{\tilde{\mathbf{y}}} + e^{-A_3}\int_0^\tau e^{e^{-\alpha t}A_3}\alpha e^{-\alpha t}\bar{S}_4^{-1}[\mathbf{R}(S_4\mathbf{y}, \mathbf{d}(\tau, S_4\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{F})) + \mathbf{F}]dt, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{4.35}$$

Пусть $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{F}\| = \|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\|^2. \tag{4.36}$$

После несложных соображений с учетом (4.27), (4.28), (4.30), (4.35) и (4.36) в области (1.5), (2.7) получим оценку

$$\begin{gathered}\left\|e^{e^{-\alpha\tau}A_3}e^{-A_3}\right\|\left\|\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F})\right\| \ge \|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\|\left(1 - L_1\|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\|\right), \quad \tau \in [0, \infty), \quad L_1 > 0 \\ \forall\, \bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F} : \|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\| < \frac{\varepsilon}{\|S_4^{-1}\|}, \quad \|\mathbf{F}\| < \frac{\varepsilon}{\|S_4^{-1}\|}.\end{gathered} \tag{4.37}$$

Выберем $\bar{\tilde{y}}$ так, чтобы были выполнены условия

$$\|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\| < \frac{1}{L_1}, \quad \|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\| < \frac{\varepsilon}{\|S_4\|}, \quad 1 > \|\bar{\tilde{\mathbf{y}}}\| > q > 0. \tag{4.38}$$

Из (4.37) следует, что при $\bar{\tilde{\mathbf{y}}}$ и $\mathbf{F}$ из области (4.38) для решения системы (4.33) выполнено условие

$$\left\|\tilde{\mathbf{y}}(\tau, \bar{\tilde{\mathbf{y}}}, \mathbf{F})\right\| > q_1 > 0, \quad \tau \in [0, \infty),$$

которое противоречит условию (4.34). Указанное обстоятельство доказывает необходимость выполнения условия (1.4) в формулировке теоремы.

Теорема доказана.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [34] система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений, имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_1x_2 - a_2\sin x_1 + u + F,\end{gathered} \tag{5.1}$$

где x_1 – угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 – скорость изменения угла отклонения, $a_1 = \bar{\alpha}L^{-2}m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = gL^{-1}\left(m_0 + \frac{M}{2}\right)m_1^{-1}$, g – ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ – коэффициент трения, m_0 – масса переносимого груза, L – длина манипулятора, M – масса манипулятора, F – возмущение. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^{\mathrm{T}}$. Рассмотрим граничные условия

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad u(0) = 0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad u(1) = 0, \quad u(t, \mathbf{0}, 0) \equiv 0. \tag{5.2}$$

Вспомогательная система (2.20) и условия (2.22) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2,$$
$$\frac{dc_2}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin c_1 - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2 + \alpha e^{-\alpha\tau} w + \alpha e^{-\alpha\tau} F, \tag{5.3}$$
$$\frac{dw}{d\tau} = \upsilon,$$

$$\begin{gathered} c_1(0) = \bar{x}_1, \quad c_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0, \quad w(\tau, 0, 0) \equiv 0, \quad c_i(\tau) \to 0, \\ w(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) выполним замены переменных $c_2(\tau), c_1(\tau)$ по формулам

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - Fe^{-\alpha\tau}, \quad c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} F. \tag{5.5}$$

В результате аналог системы (2.15), (2.18) примет вид

$$\frac{dc_1^{(1)}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} c_2^{(2)},$$
$$\frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} = -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 \sin\left(c_1^{(1)} + \frac{1}{2} e^{-2\alpha\tau} F\right) - \alpha e^{-\alpha\tau} a_1 c_2^{(1)} + \alpha e^{-2\alpha\tau} a_1 F + \alpha e^{-\alpha\tau} w, \tag{5.6}$$
$$\frac{dw}{d\tau} = \upsilon.$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{c}}}{d\tau} = \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{P} \bar{\mathbf{c}} + \alpha e^{-\alpha\tau} \bar{\mathbf{Q}} \upsilon \bar{\mathbf{c}} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, w)^{\mathrm{T}},$$
$$\bar{P} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha e^{-\alpha\tau} & 0 \\ -\alpha e^{-\alpha\tau} a_2 & -\alpha e^{-\alpha\tau} a_1 & \alpha e^{-\alpha\tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha e^{-\alpha\tau} \end{Vmatrix}. \tag{5.7}$$

Решение задачи стабилизации системы (5.7) состоит из следующих этапов.

1. Построение матрицы $S_1, = \{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3\}$, $\mathbf{L}_1 = \bar{\mathbf{Q}}$, $L_2 = \bar{P}\bar{\mathbf{Q}} - \dfrac{d\mathbf{L}_1}{d\tau}$, $\mathbf{L}_3 = \bar{P}\mathbf{L}_2 - \dfrac{d\mathbf{L}_2}{d\tau}$. Реализуется средствами компьютерной алгебры.

2. Построение матрицы $\bar{S}_1 = S_1^{-1}\left(\bar{P}S_1 - \dfrac{dS_1}{d\tau}\right)$. Реализуется средствами компьютерной алгебры.

3. Построение матрицы

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & \varphi_3(\tau) & -\left(\dfrac{d\varphi_{3(}(\tau)}{d\tau}\right) + \varphi_2(\tau) \\ 0 & 1 & -\varphi_3(\tau) \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

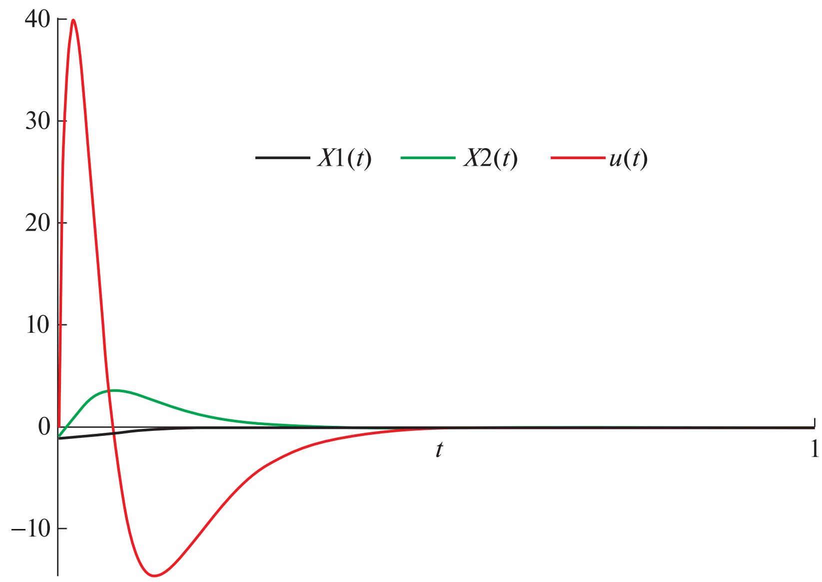
и уравнения

$$\psi^{(3)} + \varepsilon_2(\tau)\psi^{(2)} + \varepsilon_1(\tau)\psi^{(1)} + \varepsilon_0(\tau)\psi = \upsilon.$$

Реализуется средствами компьютерной алгебры.

4. Построение строки $\boldsymbol{\delta}(\tau) = (\varepsilon_2(\tau) - \gamma_2, \varepsilon_1(\tau) - \gamma_1, \varepsilon_0(\tau) - \gamma_0)$, где константы $\gamma_\partial, \gamma_1, \gamma_0$ являются коэффициентами полинома с корнями $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Реализуется средствами компьютерной алгебры.



Фиг. 1. Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $u(t)$.

5. Построение строки

$$M(\tau) = \boldsymbol{\delta}(\tau)T^{-1}(\tau)S_1^{-1}(\tau).$$

Реализуется средствами компьютерной алгебры.

В результате получаем закон вспомогательного управления $\upsilon(\tau)$:

$$\upsilon(\tau) = M(\tau)\bar{\mathbf{c}}, \quad \bar{\mathbf{c}} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, w)^{\mathrm{T}},$$

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{\alpha\tau}a_1a_2\alpha + 3\alpha a_2 + 6a_2 - \dfrac{1}{\alpha^2}e^{2\alpha\tau}(8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 22\alpha + 6) \\ -a_1^2\alpha + a_2e^{-\alpha\tau}\alpha + 3a_1\alpha + 6a_1 - \dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha\tau}(7\alpha^2 + 18\alpha + 11) \\ a_1\alpha e^{-\alpha\tau} - 3\alpha - 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.8}$$

Используя формулы (5.5) и (2.2), получаем закон управления (5.8) в исходных переменных x_1, x_2, t:

$$\bar{\upsilon}(t) = \bar{M}(t)\bar{\bar{c}} + \bar{\bar{\upsilon}}(t), \quad \bar{\bar{c}} = (x_1, x_2, u)^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{M}(t) = M(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -(1-t)a_1a_2\alpha + 3\alpha a_2 + 6a_2 - \dfrac{1}{\alpha^2}(1-t)^{-2}(8\alpha^3 + 24\alpha^2 + 22\alpha + 6) \\ -a_1^2\alpha + a_2(1-t)\alpha + 3a_1\alpha + 6a_1 - \dfrac{1}{\alpha}(1-t)^{-1}(7\alpha^2 + 18\alpha + 11) \\ a_1\alpha(1-t) - 3\alpha - 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.9}$$

$$\bar{\bar{\upsilon}}(t) = \bar{M}(t)\left(-\frac{1}{2}F(1-t)^2, (1-t)F, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_2 - a_2\sin x_1 + u + F, \\ \dot{u} &= (1-t)^{-1}\bar{\upsilon}(t), \end{aligned}$$

после подстановки в ее правую часть замкнутой управлением (5.9), на промежутке [0, 99] с начальными данными:

$$x_1(0) = \bar{x}_1, \quad x_2(0) = \bar{x}_2, \quad d(0) = 0.$$

В процессе численного моделирования находилось решение задачи (5.1), (5.2) при $N = 45$, $\bar{x}_1 = -0.1$ рад, $\bar{x}_2 = -0.1$ рад/сек, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 10$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $F = 0.1$, $g = 9.8$.

На фиг. 1 представлены графики функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Простота реализации алгоритма обусловлена тем ,что наиболее трудоемкая ее часть, связанная с построением вспомогательной системы и стабилизацией ее линейной части, может быть выполнена аналитическими методами и реализована средствами компьютерной алгебры. Результаты решения задачи управления роботом-манипулятором и ее численное моделирование показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач с использованием персональных ЭВМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука,1968.
2. *Каллман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
3. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории управления. М.: Наука, 1972.
4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.
5. *Walczak S.* A note on the controllability of nonlinear systems // Math. Systems Theory. 1984. V. 17. № 4. P. 351–356.
6. *Лепс Н.Л.* Геометрический метод исследования управляемости билинейных систем второго порядка// Автоматика и телемехан. 1984. № 1. С. 19–25.
7. *Комаров В.А.* Синтез ограниченных управлений для линейных неавтономных систем // Автоматика и телемехан. 1984. № 10. С. 44–50.
8. *Крищенко А.П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемехан. 1984. № 6. С. 30–36.
9. *Dirk A.* Controllability for polynomial systems // Lect. Notes Contr. and Jnf. Sci. 1984. V. 63. P. 542–545.
10. *Крищенко А.П.* Управляемость и множество достижимости нелинейных стационарных систем // Кибернетика и вычисл. техн. (Киев). 1984. № 62. С. 3–10.
11. *Комаров В.А.* Оценка множества достижимости для линейных систем // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1984. № 1. С. 83–87.
12. *Huashu O.* On the controllability of nonlinear control system // Comput. and Math. 1985. V. 10. № 6. P. 441–451.
13. *Furi M., Zeza P.* Topological methods for global controllability of nonlinear systems // J. Optim. Theory and Appl. 1985. V. 45. № 2. P. 231–256.
14. *Balachandran K.* Global and local controllability of nonlinear systems // JEEE Proc. 1985. № 1. P. 14–17.
15. *Пантелеев В.П.* Об управляемости нестационарных линейных систем // Дифференц. ур-ния. 1985. Т. 21. № 4. С. 623–628.
16. *Коробов В.И.* Почти полная управляемость линейных стационарных систем // Укр. Матем. ж. 1986. Т. 38. № 2. С. 163–169.
17. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г.* Критерии управляемости нелинейных систем // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 18–22.
18. *Константинов Г.И., Сидоренко Г.В.* Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем // Изв АН СССР. Техн. кибернет. 1986. № 3. С. 28–34.
19. *Черноусько Ф.Л., Янгин А.А.* Аппроксимация множеств достижимости при помощи пересечения и объединения эллипсоидов // Изв. АН СССР. Техн. кибернет. 1987. № 4. С. 145–152.
20. *Айсагалиев* С.А. Управляемость нелинейных систем управления // Изв. АН Каз. ССР. Физ. матем. 1987. № 3. С. 7–10.
21. *Benzaid Z.* Global null controllability of perturbed linear periodic systems // JEE Trans. Autom. Contr. 1987. V. 32. № 7. P. 623–625.
22. *Леваков А.А.* К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. ур-ния. 1987. V. 23. № 5. С. 798–806.

23. *Лотов А.В.* О внешних оценках построения множества достижимости для нелинейных управляемых систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 4. С. 483–493.
24. *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости нелинейных систем // Автоматика и телемехан. 1991. № 2. С. 35–41.
25. *Sontag E.D.* Mathematical control theory. Deterministic finite-dimensional systems. New York: Springer, 1998.
26. *Мастерков Ю.В.* К вопросу о локальной управляемости в критическом случае // Изв. вузов. Матем. 1999. № 2. Вып. 441. С. 68–74.
27. *Попова С.Н.* К свойству локальной достижимости линейной управляемой системы // Дифференц. ур-ния. 2003. Т. 39. № 1. С. 50–56.
28. *Бердышев Ю.И.* О построении области достижимости в одной нелинейной задаче // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 4. С. 22–26.
29. *Korobov V.I.* Geometric criterion for controllability under arbitrary constraints on the control // J. Optim. Theory Appl. 2007. V. 134. Issue 2. P. 161–176.
30. *Яковенко Г.Н.* Теория управления регулярными системами. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.
31. *Kvitko A., Yakusheva D.* On one boundary problem for nonlinear stationary controlled system // International Jornal of Control. 2019. V. 92. Jssue 4. P. 828–839.
32. *Смирнов Е.Я.* Стабилизация программных движений. Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, Санкт-Петербург, 1997.
33. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
34. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.