ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 4, с. 608–624

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.6

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫМИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ[1)]

© 2021 г. Р. Ф. Марданов[1,*], А. Е. Марданова[1,]**

[1] *420008 Казань, ул. Кремлевская, 18, К(П)ФУ, Россия*

**e-mail: Renat.Mardanov@kpfu.ru*

***e-mail: AlEMardanova@kpfu.ru*

Поступила в редакцию 23.01.2020 г.
Переработанный вариант 23.01.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Предложен метод граничных элементов для решения неоднородного бигармонического уравнения с правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Точность численных результатов исследована для тестовой задачи сравнением с аналитическим решением. Получено численное решение задачи о расчете фильтрационного течения в пористой среде с неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана. Библ. 16. Фиг. 5. Табл. 1.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод граничных элементов, фильтрация, модель Бринкмана, неоднородная проницаемость.

DOI: 10.31857/S0044466921040086

ВВЕДЕНИЕ

Бигармоническое уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка вида

$$\Delta^2 f = v, \tag{0.1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Уравнение (0.1) широко применяется в механике сплошных сред: например, в задачах расчета изгиба плоской упругой пластины под действием нагрузки [1] и течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса в рамках модели Стокса [2]. В приведенных примерах правая часть уравнения (0.1) является известной функцией, и численные методы решения таких задач хорошо развиты [3], [4].

Отдельный класс задач механики сводится к более сложному бигармоническому уравнению, правая часть которого содержит саму искомую функцию и ее производные. Классическим примером является задача о расчете вязкого течения в рамках модели Навье–Стокса с использованием переменных функции тока ψ и завихренности $\omega = -\Delta\psi$. В этом случае функция тока ψ удовлетворяет уравнению [5], [6]

$$\Delta^2\psi = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\right), \tag{0.2}$$

где Re – число Рейнольдса. Уравнение (0.2) нелинейное и его решение находится в основном численными итерационными методами [3], [7], [8].

Настоящая работа посвящена решению неоднородного бигармонического уравнения с линейной правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Предложенный под-

[1)] Статья подготовлена в рамках реализации программы развития Регионального научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2020-1478.

ход основан на методе граничных и областных элементов (МГОЭ) (boundary domain integral method (BDIM)) [5], [9]–[11], позволяющем решить задачу без организации итерационного процесса. Проведена апробация метода для тестовой задачи сравнением с известным аналитическим решением. В качестве примера практического применения выполнено решение задачи о расчете плоского фильтрационного течения в пористой среде с пространственно неоднородным распределением проницаемости. Полученное решение сопоставлено с результатом вычислительного эксперимента по детальному расчету течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве модельной пористой среды в рамках модели Стокса. Результаты числовых расчетов для обеих задач подтвердили эффективность и хорошую точность предложенного численного метода.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, удовлетворяющую в области Ω, ограниченной контуром Γ, неоднородному бигармоническому уравнению (0.1). Правая часть $v(x,y)$ в общем случае зависит от искомой функции f и ее производных:

$$v = v_0 + v_1 f + v_2\frac{\partial f}{\partial x} + v_3\frac{\partial f}{\partial y} + v_4\Delta f + v_5\frac{\partial(\Delta f)}{\partial x} + v_6\frac{\partial(\Delta f)}{\partial y}, \tag{1.1}$$

где заданные функции $v_i = v_i(x,y)$, $i = \overline{0,6}$, являются функциями координат (x,y). Граничные условия могут иметь следующий вид:

$$f\big|_\Gamma = h_1(s), \quad f'\big|_\Gamma = h_2(s), \quad \Delta f\big|_\Gamma = h_3(s), \quad (\Delta f)'\big|_\Gamma = h_4(s), \tag{1.2}$$

где $h_i(s)$, $i = \overline{1,4}$ – известные функции, s – дуговая абсцисса контура Γ, отсчитываемая от некоторой точки так, что область Ω остается слева, а штрих означает производную по направлению внешней нормали n, т.е. $(\,)' = \partial(\,)/\partial n$. Граница Γ разбита на участки $\Gamma^{(j)}$, $j = \overline{1,N}$, на каждом из которых заданы по два граничных условия вида (1.2), в зависимости от конкретной решаемой задачи.

Требуется определить функцию $f(x,y)$.

2. РЕШЕНИЕ

Для решения поставленной задачи используем МГОЭ по аналогии с тем, как это было сделано для уравнений Пуассона и Гельмгольца в работах [10], [11]. Перепишем уравнение (0.1) четвертого порядка в виде системы двух уравнений второго порядка

$$\Delta f = g, \quad \Delta g = v \tag{2.1}$$

для функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$. Используя известное интегральное соотношение Рэлея–Грина для бигармонического уравнения [6], запишем эквивалентную пару интегральных уравнений:

$$\begin{gathered}\chi(x,y)f(x,y) = \int\limits_\Gamma [f(s)G_1'(x,y,s) - f'(s)G_1(x,y,s) + \\ + g(s)G_2'(x,y,s) - g'(s)G_2(x,y,s)]ds + \int\limits_\Omega v(\xi,\eta)G_2(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta,\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\chi(x,y)g(x,y) = \int\limits_\Gamma [g(s)G_1'(x,y,s) - g'(s)G_1(x,y,s)]ds + \int\limits_\Omega v(\xi,\eta)G_1(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{2.3}$$

где $\chi(x,y) = 2\pi$ для внутренних точек $(x,y)\in\Omega$, $\chi(x,y) = \beta$ для граничных точек $(x,y)\in\Gamma$ (β – внутренний к области Ω угол в точке на границе Γ). Функции Грина для бигармонического уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}G_1 = \ln\rho, \quad G_2 = \frac{\rho^2}{4}(\ln\rho - 1), \\ \rho(x,y,s) = \sqrt{(x_1(s)-x)^2 + (y_1(s)-y)^2}, \quad \rho(x,y,\xi,\eta) = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2},\end{gathered} \tag{2.4}$$

где (x_1, y_1) – координаты точки интегрирования на границе Γ с дуговой абсциссой s, а (ξ,η) – координаты точки интегрирования в области Ω.

Функция $v(x, y)$ (1.1), которую с учетом (2.1) перепишем в виде

$$v = v_0 + v_1 f + v_2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_3 \frac{\partial f}{\partial y} + v_4 g + v_5 \frac{\partial g}{\partial x} + v_6 \frac{\partial g}{\partial y}, \tag{2.5}$$

содержит производные неизвестных функций f и g. Для получения замкнутой системы интегральных уравнений продифференцируем (2.2) и (2.3) по переменным x и y:

$$\begin{gathered}\chi(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\int\limits_{\Gamma}\left[f(s)\frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial x} - f'(s)\frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial x} + \right.\\ \left. + g(s)\frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial x} - g'(s)\frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial x}\right]ds + \int\limits_{\Omega} v(\xi, \eta)\frac{\partial G_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta,\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\chi(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\int\limits_{\Gamma}\left[f(s)\frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial y} - f'(s)\frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial y} + \right.\\ \left. + g(s)\frac{\partial G_2'(x, y, s)}{\partial y} - g'(s)\frac{\partial G_2(x, y, s)}{\partial y}\right]ds + \int\limits_{\Omega} v(\xi, \eta)\frac{\partial G_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta,\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \int\limits_{\Gamma}\left[g(s)\frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial x} - g'(s)\frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial x}\right]ds + \int\limits_{\Omega} v(\xi, \eta)\frac{\partial G_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta, \tag{2.8}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \int\limits_{\Gamma}\left[g(s)\frac{\partial G_1'(x, y, s)}{\partial y} - g'(s)\frac{\partial G_1(x, y, s)}{\partial y}\right]ds + \int\limits_{\Omega} v(\xi, \eta)\frac{\partial G_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta. \tag{2.9}$$

Согласно методу граничных элементов, представим границу $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n}\Gamma_j$ в виде набора прямолинейных отрезков Γ_j, а область $\Omega = \bigcup_{k=1}^{m}\Omega_k$ в виде набора площадных элементов Ω_k (трех- или четырехугольных). Функции $f(s)$, $f'(s)$, $g(s)$, $g'(s)$ аппроксимируем кусочно-постоянными функциями со значениями f_j, f_j', g_j, g_j' на отрезках Γ_j, а функции $v_i(\xi, \eta)$, $i = \overline{0, 6}$, $f(\xi, \eta)$, $\partial f/\partial x(\xi, \eta)$, $\partial f/\partial y(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$, $\partial g/\partial x(\xi, \eta)$, $\partial g/\partial y(\xi, \eta)$ – кусочно-постоянными функциями со значениями v_{ik}, $\tilde{f}_k$, f_{xk}, f_{yk}, $\tilde{g}_k$, g_{xk}, g_{yk} в площадных элементах Ω_k. Тогда уравнения (2.2), (2.3), (2.6)–(2.9) с учетом (2.5) примут вид

$$\chi(x, y)f(x, y) = \sum_{j=1}^{n}\left\{f_j\int\limits_{\Gamma_j}G_1'ds - f_j'\int\limits_{\Gamma_j}G_1 ds + g_j\int\limits_{\Gamma_j}G_2'ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}G_2 ds\right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}G_2 d\xi d\eta, \tag{2.10}$$

$$\chi(x, y)g(x, y) = \sum_{j=1}^{n}\left\{g_j\int\limits_{\Gamma_j}G_1'ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}G_1 ds\right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}G_1 d\xi d\eta, \tag{2.11}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}\left\{f_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1'}{\partial x}ds - f_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1}{\partial x}ds + g_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_2'}{\partial x}ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_2}{\partial x}ds\right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial G_2}{\partial x}d\xi d\eta, \tag{2.12}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n}\left\{f_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1'}{\partial y}ds - f_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1}{\partial y}ds + g_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_2'}{\partial y}ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_2}{\partial y}ds\right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial G_2}{\partial y}d\xi d\eta, \tag{2.13}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}\left\{g_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1'}{\partial x}ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1}{\partial x}ds\right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial G_1}{\partial x}d\xi d\eta, \tag{2.14}$$

$$\chi(x, y)\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{n}\left\{g_j\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1'}{\partial y}ds - g_j'\int\limits_{\Gamma_j}\frac{\partial G_1}{\partial y}ds + \right\} + \sum_{k=1}^{m}\tilde{v}_k\int\limits_{\Omega_k}\frac{\partial G_1}{\partial y}d\xi d\eta, \tag{2.15}$$

где

$$\tilde{v}_k = v_{0k} + v_{1k}\tilde{f}_k + v_{2k}f_{xk} + v_{3k}f_{yk} + v_{4k}\tilde{g}_k + v_{5k}g_{xk} + v_{6k}g_{yk}.$$

Рассмотрев выражения (2.10)–(2.11) в центрах линейных элементов Γ_i с координатами (x_{ci}, y_{ci}), запишем

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}\{A_{ij}^{(1)}f_j + B_{ij}^{(1)}f_j' + C_{ij}^{(1)}g_j + D_{ij}^{(1)}g_j'\} + \sum_{k=1}^{m}\{E_{ik1}^{(1)}\tilde{f}_k + E_{ik2}^{(1)}f_{xk} + E_{ik3}^{(1)}f_{yk} + E_{ik4}^{(1)}\tilde{g}_k + E_{ik5}^{(1)}g_{xk} + E_{ik6}^{(1)}g_{yk}\} = a_i, \\ \sum_{j=1}^{n}\{C_{ij}^{(2)}g_j + D_{ij}^{(2)}g_j'\} + \sum_{k=1}^{m}\{E_{ik1}^{(2)}\tilde{f}_k + E_{ik2}^{(2)}f_{xk} + E_{ik3}^{(2)}f_{yk} + E_{ik4}^{(2)}\tilde{g}_k + E_{ik5}^{(2)}g_{xk} + E_{ik6}^{(2)}g_{yk}\} = b_i,\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $i = \overline{1,n}$. Рассмотрев выражения (2.10)–(2.15) в центрах площадных элементов Ω_l с координатами $(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl})$, запишем

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n}\{A_{lj}^{(3)}f_j + B_{lj}^{(3)}f_j' + C_{lj}^{(3)}g_j + D_{lj}^{(3)}g_j'\} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(3)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(3)}f_{xk} + E_{lk3}^{(3)}f_{yk} + E_{lk4}^{(3)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(3)}g_{xk} + E_{lk6}^{(3)}g_{yk}\} = c_l, \\ \sum_{j=1}^{n}\{C_{lj}^{(4)}g_j + D_{lj}^{(4)}g_j'\} + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(4)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(4)}f_{xk} + E_{lk3}^{(4)}f_{yk} + E_{lk4}^{(4)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(4)}g_{xk} + E_{lk6}^{(4)}g_{yk}\} = d_l, \\ \sum_{j=1}^{n}\{A_{lj}^{(5)}f_j + B_{lj}^{(5)}f_j' + C_{lj}^{(5)}g_j + D_{lj}^{(5)}g_j'\} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(5)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(5)}f_{xk} + E_{lk3}^{(5)}f_{yk} + E_{lk4}^{(5)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(5)}g_{xk} + E_{lk6}^{(5)}g_{yk}\} = e_l, \\ \sum_{j=1}^{n}\{A_{lj}^{(6)}f_j + B_{lj}^{(6)}f_j' + C_{lj}^{(6)}g_j + D_{lj}^{(6)}g_j'\} + \\ + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(6)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(6)}f_{xk} + E_{lk3}^{(6)}f_{yk} + E_{lk4}^{(6)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(6)}g_{xk} + E_{lk6}^{(6)}g_{yk}\} = h_l, \\ \sum_{j=1}^{n}\{C_{lj}^{(7)}g_j + D_{lj}^{(7)}g_j'\} + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(7)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(7)}f_{xk} + E_{lk3}^{(7)}f_{yk} + E_{lk4}^{(7)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(7)}g_{xk} + E_{lk6}^{(7)}g_{yk}\} = q_l, \\ \sum_{j=1}^{n}\{C_{lj}^{(8)}g_j + D_{lj}^{(8)}g_j'\} + \sum_{k=1}^{m}\{E_{lk1}^{(8)}\tilde{f}_k + E_{lk2}^{(8)}f_{xk} + E_{lk3}^{(8)}f_{yk} + E_{lk4}^{(8)}\tilde{g}_k + E_{lk5}^{(8)}g_{xk} + E_{lk6}^{(8)}g_{yk}\} = t_l,\end{gathered} \tag{2.17}$$

где $l = \overline{1,m}$. Таким образом, соотношения (2.16), (2.17) представляют собой систему $2n + 6m$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $4n + 6m$ неизвестных: f_j, f_j', g_j, g_j', $j = \overline{1,n}$; $\tilde{f}_k$, f_{xk}, f_{yk}, $\tilde{g}_k$, g_{xk}, g_{yk}, $k = \overline{1,m}$. Коэффициенты СЛАУ определены следующими выражениями:

$$A_{ij}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} G_1'(x_{ci}, y_{ci}, s)ds - \beta_i\delta_{ij}, \quad B_{ij}^{(1)} = -\int_{\Gamma_j} G_1(x_{ci}, y_{ci}, s)ds,$$

$$C_{ij}^{(1)} = \int_{\Gamma_j} G_2'(x_{ci}, y_{ci}, s)ds, \quad D_{ij}^{(1)} = -\int_{\Gamma_j} G_2(x_{ci}, y_{ci}, s)ds,$$

$$E_{ikp}^{(1)} = v_{pk}\int_{\Omega_k} G_2(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad a_i = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int_{\Omega_k} G_2(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta)d\xi d\eta,$$

$$C_{ij}^{(2)} = A_{ij}^{(1)}, \quad D_{ij}^{(2)} = B_{ij}^{(1)},$$

$$E_{ikp}^{(2)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} G_1(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad b_i = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} G_1(x_{ci}, y_{ci}, \xi, \eta)d\xi d\eta,$$

$$A_{lj}^{(3)} = \int\limits_{\Gamma_j} G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)ds, \quad B_{lj}^{(3)} = -\int\limits_{\Gamma_j} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)ds,$$

$$C_{lj}^{(3)} = \int\limits_{\Gamma_j} G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)ds, \quad D_{lj}^{(3)} = -\int\limits_{\Gamma_j} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)ds,$$

$$E_{lkp}^{(3)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{1p}, \quad c_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)d\xi d\eta,$$

$$C_{lj}^{(4)} = A_{lj}^{(3)}, \quad D_{lj}^{(4)} = B_{lj}^{(3)},$$

$$E_{lkp}^{(4)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{4p}, \quad d_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)d\xi d\eta,$$

$$A_{lj}^{(5)} = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x}ds, \quad B_{lj}^{(5)} = -\int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x}ds,$$

$$C_{lj}^{(5)} = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x}ds, \quad D_{lj}^{(5)} = -\int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial x}ds,$$

$$E_{lkp}^{(5)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{2p}, \quad e_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta,$$

$$A_{lj}^{(6)} = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y}ds, \quad B_{lj}^{(6)} = -\int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y}ds,$$

$$C_{lj}^{(6)} = \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2'(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y}ds, \quad D_{lj}^{(6)} = -\int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, s)}{\partial y}ds,$$

$$E_{lkp}^{(6)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{3p}, \quad h_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta,$$

$$C_{lj}^{(7)} = A_{lj}^{(5)}, \quad D_{lj}^{(7)} = B_{lj}^{(5)},$$

$$E_{lkp}^{(7)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{5p}, \quad q_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial x}d\xi d\eta,$$

$$C_{lj}^{(8)} = A_{lj}^{(6)}, \quad D_{lj}^{(8)} = B_{lj}^{(6)},$$

$$E_{lkp}^{(8)} = v_{pk}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta - 2\pi\delta_{lk}\delta_{6p}, \quad t_l = -\sum_{k=1}^{m} v_{0k}\int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1(\tilde{x}_{cl}, \tilde{y}_{cl}, \xi, \eta)}{\partial y}d\xi d\eta,$$

где δ_{ij}, δ_{lk}, δ_{rp}, $r = \overline{1,6}$ – символы Кронекера, а $v_{pk} = v_p(\tilde{x}_{ck}, \tilde{y}_{ck})$, $p = \overline{0,6}$. Для замыкания системы уравнений необходимо добавить к ней $2n$ соотношений из двух граничных условий вида (1.2), записанных в точках (x_{ci}, y_{ci}).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

При численной реализации предложенного метода решения основную сложность и расчетное время как при составлении матрицы СЛАУ (2.16), (2.17), так и при нахождении искомых функций в расчетной точке с координатами (x, y) по формулам (2.10)–(2.15) занимает вычисление интегралов от функций $G_1, G_1', G_2, G_2', \partial G_1/\partial x, \partial G_1/\partial y, \partial G_1'/\partial x, \partial G_1'/\partial y, \partial G_2/\partial x, \partial G_2/\partial y, \partial G_2'/\partial x$, $\partial G_2'/\partial y$ по линейным элементам Γ_j и областным элементам Ω_k. Аналитические формулы вычисления интегралов по линейным элементам получены в работе [12]. Для областных интегралов введем следующие обозначения:

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_k} G_1 d\xi d\eta, \quad I_2 = \int\limits_{\Omega_k} G_2 d\xi d\eta, \quad I_3 = \int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial x} d\xi d\eta,$$

$$I_4 = \int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_1}{\partial y} d\xi d\eta, \quad I_5 = \int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial x} d\xi d\eta, \quad I_6 = \int\limits_{\Omega_k} \frac{\partial G_2}{\partial y} d\xi d\eta.$$

Аналитическая формула для вычисления I_1 в случае, когда областным элементом является треугольник, получена в работе [10]. На основе подходов, использованных в этих работах, выведем аналитические формулы для вычисления интегралов I_2–I_6 также для случая треугольного областного элемента.

Воспользуемся обозначениями, введенными в работе [10]. Обозначим комплексную координату расчетной точки (x, y) через $z = x + iy$, комплексные координаты вершин треугольника Ω_k через (z_1, z_2, z_3), комплексную координату текущей точки интегрирования (ξ, η) в треугольнике – $z^* = \xi + i\eta$. Порядок индексации вершин треугольника должен быть таков, чтобы при обходе вершин с возрастанием индекса внутренность треугольника оставалась слева. Для сокращения записи введем новую комплексную координату $\zeta = z^* - z$, т.е. перейдем в новую комплексную плоскость, в которой начало координат $\zeta = 0$ совпадает с расчетной точкой z. Тогда новые координаты вершин треугольника запишутся в виде (фиг. 1а)

$$\zeta_1 = z_1 - z, \quad \zeta_2 = z_2 - z, \quad \zeta_3 = z_3 - z.$$

Так же обозначим

$$\zeta_{21} = \zeta_2 - \zeta_1 = l_1 e^{i\gamma_1}, \quad \zeta_{32} = \zeta_3 - \zeta_2 = l_2 e^{i\gamma_2}, \quad \zeta_{13} = \zeta_1 - \zeta_3 = l_3 e^{i\gamma_3}, \tag{3.1}$$

где $l_1, l_2, l_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – длины сторон треугольника и углы, которые они образуют с горизонталью соответственно. Во введенных обозначениях выражение для вычисления интеграла I_1 в случае, когда z располагается снаружи треугольника, следующее [10]:

$$I_1 = -\frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\left|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)\right| e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\left(\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}}[\zeta^2(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_3} + [\zeta^2(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}\right)\right\}, \tag{3.2}$$

а когда z совпадает с одним из углов, например, с z_1 имеем

$$I_1 = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\left|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)\right| e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\zeta_2[\zeta(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}\right\}. \tag{3.3}$$

Здесь и ниже использовано обозначение, введенное в [10], [12]

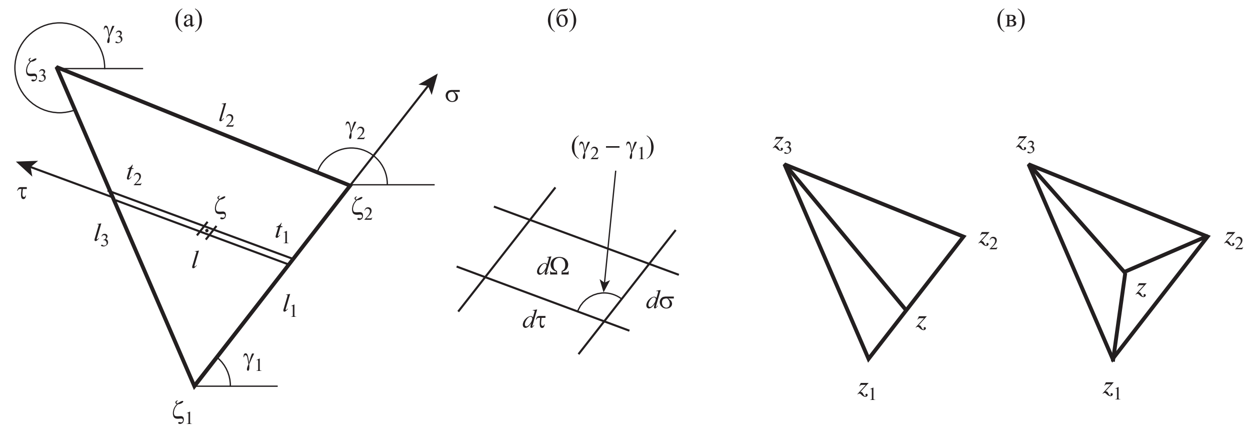
$$[f(\zeta)]_{t_1}^{t_2} = f(t_2) - f(t_1).$$

Вычислим интеграл I_2. Рассмотрим сначала случай, когда расчетная точка z находится снаружи треугольника. Для выполнения интегрирования введем локальные оси координат: ось σ, направленную вдоль стороны $\zeta_1\zeta_2$ треугольника, и ось τ, направленную параллельно стороне $\zeta_2\zeta_3$ треугольника, но проходящую через текущую точку интегрирования ζ. Элементарной площадью интегрирования является параллелограмм со сторонами $d\sigma$ и $d\tau$ и углом $(\gamma_2 - \gamma_1)$ между ними (фиг. 1б), тогда площадь этого элемента равна

$$d\Omega = \left|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)\right| d\tau d\sigma. \tag{3.4}$$

Из (2.4) имеем

$$G_2 = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{\zeta\bar{\zeta}(\ln\zeta - 1)\}.$$



Фиг. 1. Интегрирование по треугольнику.

Здесь и далее черта сверху означает комплексное сопряжение. Вывод аналитического выражения для вычисления интеграла I_2 проведем, следуя методике вычисления интеграла I_1 в [10]. Подставив последнее выражение в I_2 с учетом (3.4), запишем

$$I_2 = \frac{1}{4}\left|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)\right| \operatorname{Re} J, \quad J = \int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l} \zeta\overline{\zeta}(\ln\zeta - 1)d\tau d\sigma, \tag{3.5}$$

где l – длина отрезка интегрирования вдоль оси τ. Так как при интегрировании вдоль оси τ дифференциал $d\zeta = e^{i\gamma_2}d\tau$, то перейдем во внутреннем интеграле к интегрированию по комплексной переменной ζ:

$$J = \int\limits_0^{l_1} e^{-i\gamma_2} J_1 d\sigma, \quad J_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \zeta\overline{\zeta}(\ln\zeta - 1)d\zeta.$$

Подынтегральная функция в J_1 не является аналитической, поэтому, воспользовавшись способом вычисления подобного интеграла по частям, приведенным в [12], найдем

$$J_1 = \frac{1}{4}\left[\zeta^2\overline{\zeta}(2\ln\zeta - 3) - \frac{\zeta^3 e^{-2i\gamma_2}}{9}(6\ln\zeta - 11)\right]_{t_1}^{t_2}.$$

Для комплексных координат t_1 и t_2 (начальной и конечной точек интегрирования на оси τ) имеет место соотношение

$$t_1 = \zeta_1 + \sigma e^{i\gamma_1}, \quad t_2 = t_1 + \frac{\zeta_{32}}{\zeta_{21}}(t_1 - \zeta_1),$$

откуда

$$dt_1 = e^{i\gamma_1}d\sigma, \quad dt_2 = -\frac{\zeta_{13}}{\zeta_{21}}e^{i\gamma_1}d\sigma.$$

При вычислении интеграла по переменной σ перейдем к интегрированию по комплексным переменным t_1 и t_2. С учетом последних соотношений подставим найденное значение интеграла J_1 в J:

$$J = -\frac{e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}}{4}\left[\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}}\left(J_2 - \frac{e^{-2i\gamma_2}}{9}J_3\right) + J_4 - \frac{e^{-2i\gamma_2}}{9}J_5\right], \tag{3.6}$$

где

$$J_2 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_3} t_2^2 \overline{t}_2 (2\ln t_2 - 3) dt_2, \quad J_3 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_3} t_2^3 (6\ln t_2 - 11) dt_2,$$

$$J_4 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} t_1^2 \overline{t}_1 (2\ln t_1 - 3) dt_1, \quad J_5 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} t_1^3 (6\ln t_1 - 11) dt_1.$$

Вычислив эти интегралы

$$J_2 = \frac{1}{9}\left[\zeta^3\overline{\zeta}(6\ln\zeta - 11) - \frac{e^{-2i\gamma_3}}{8}\zeta^4(12\ln\zeta - 25)\right]_{\zeta_1}^{\zeta_3},$$

$$J_4 = \frac{1}{9}\left[\zeta^3\overline{\zeta}(6\ln\zeta - 11) - \frac{e^{-2i\gamma_1}}{8}\zeta^4(12\ln\zeta - 25)\right]_{\zeta_1}^{\zeta_2},$$

$$J_3 = \frac{1}{8}[\zeta^4(12\ln\zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_3}, \quad J_5 = \frac{1}{8}[\zeta^4(12\ln\zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}$$

и подставив их в (3.6), а затем полученное выражение в (3.5), в итоге найдем

$$\begin{gathered} I_2 = -\frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)|\operatorname{Re}\left\{e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\left(\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}}J_6 + J_7\right)\right\}, \\ J_6 = [\zeta^3\overline{\zeta}(6\ln\zeta - 11) - F(\zeta_3)\zeta^4(12\ln\zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_3}, \\ J_7 = [\zeta^3\overline{\zeta}(6\ln\zeta - 11) - F(\zeta_2)\zeta^4(12\ln\zeta - 25)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$F(\zeta_1) = \frac{e^{-2i\gamma_1} + e^{-2i\gamma_3}}{8}, \quad F(\zeta_2) = \frac{e^{-2i\gamma_2} + e^{-2i\gamma_1}}{8}, \quad F(\zeta_3) = \frac{e^{-2i\gamma_3} + e^{-2i\gamma_2}}{8}. \tag{3.8}$$

Если текущая точка z совпадает с одним из углов треугольника, то формула вычисления интеграла упрощается. Для случая, когда z совпадает с вершиной z_1, с учетом (3.1) имеем

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_{21} = \zeta_2, \quad \zeta_{13} = -\zeta_3. \tag{3.9}$$

Подставив эти значения в (3.7) и упростив выражение, с учетом (3.8) получим

$$I_2 = \frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)|\operatorname{Re}\left\{e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\zeta_2[\zeta^2\overline{\zeta}(6\ln\zeta - 11) - \zeta^3(12\ln\zeta - 25)F(\zeta)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}\right\}. \tag{3.10}$$

Для применения этой формулы в случае совпадения z с z_2 или с z_3 достаточно циклически переиндексировать вершины треугольника. Если текущая точка z располагается на одной из сторон треугольника или внутри него, то этот треугольник необходимо разбить на два или три треугольника (см. фиг. 1в) и вычислить интеграл как сумму двух или трех интегралов с учетом формулы (3.10).

Для вычисления интегралов I_3–I_6 продифференцируем формулы (3.2), (3.3), (3.7), (3.10) по x и y с учетом соотношений

$$\frac{d\zeta}{dx} = -1, \quad \frac{d\overline{\zeta}}{dx} = -1, \quad \frac{d\zeta}{dy} = -i, \quad \frac{d\overline{\zeta}}{dy} = i.$$

В итоге для случая, когда z расположена снаружи треугольника, получим

$$I_3 = \operatorname{Re} J_8, \quad I_4 = -\operatorname{Im} J_8,$$

$$I_5 = \frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)|\operatorname{Re}\left\{e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\left(\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}}((1 - 8F(\zeta_3))J_9 + J_{10}) + (1 - 8F(\zeta_2))J_{11} + J_{12}\right)\right\},$$

$$I_6 = -\frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)|\operatorname{Im}\left\{e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)}\left(\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}}((1 + 8F(\zeta_3))J_9 - J_{10}) + (1 + 8F(\zeta_2))J_{11} - J_{12}\right)\right\},$$

где

$$J_8 = |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)} \left(\frac{\zeta_{21}}{\zeta_{13}} [\zeta(\ln\zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_3} + [\zeta(\ln\zeta - 1)]_{\zeta_1}^{\zeta_2} \right),$$

$$J_9 = [\zeta^3(6\ln\zeta - 11)]_{\zeta_1}^{\zeta_3}, \quad J_{10} = 9[\zeta^2\overline{\zeta}(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_3},$$

$$J_{11} = [\zeta^3(6\ln\zeta - 11)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}, \quad J_{12} = 9[\zeta^2\overline{\zeta}(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

Для случая, когда z совпадает с z_1, с учетом (3.9) имеем

$$I_3 = -\operatorname{Re} J_{13}, \quad I_4 = \operatorname{Im} J_{13},$$

$$I_5 = -\frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Re}\left\{ e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)} \zeta_2 (J_{14} + J_{15} - J_{16}) \right\},$$

$$I_6 = \frac{1}{144}|\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| \operatorname{Im}\left\{ e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)} \zeta_2 (-J_{14} + J_{15} - J_{16}) \right\},$$

где

$$J_{13} = |\sin(\gamma_2 - \gamma_1)| e^{-i(\gamma_2+\gamma_1)} \zeta_2 [\ln\zeta]_{\zeta_2}^{\zeta_3},$$

$$J_{14} = [\zeta^2(6\ln\zeta - 11)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}, \quad J_{15} = 9[\zeta\overline{\zeta}(2\ln\zeta - 3)]_{\zeta_2}^{\zeta_3},$$

$$J_{16} = 8[\zeta^2(6\ln\zeta - 11)F(\zeta)]_{\zeta_2}^{\zeta_3}.$$

Для вычисления интегралов I_1–I_6 по четырехугольному элементу достаточно разбить его на два треугольника по любой из диагоналей.

4. ТЕСТОВЫЙ РАСЧЕТ

В тестовом расчете в качестве области $\Omega = \{0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$ возьмем квадрат с единичной стороной, левый нижний угол которого совпадает с началом координат. Каждую из сторон квадрата разобьем на равное количество n_1 линейных элементов одинаковой длины, тогда общее число линейных элементов будет равно $n = 4n_1$. Расчетную область покроем равномерной квадратной сеткой размерности $(n_1 \times n_1)$, состоящей из одинаковых четырехугольных элементов. Таким образом, общее количество площадных элементов равно $m = n_1^2$. Для оценки точности введем величины абсолютной и относительной погрешностей:

$$\varepsilon_a^f = \max_k |f(x_k, y_k) - f_a(x_k, y_k)|, \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_e^f = \frac{1}{K}\sum_k \left| \frac{f(x_k, y_k) - f_a(x_k, y_k)}{f_{\max}} \right|, \tag{4.2}$$

где $f_a(x, y)$ – аналитическое решение, а $f_{\max} = \max\limits_{(x,y)\in\Omega} f_a(x, y)$. В качестве набора контрольных точек (x_k, y_k), $k = \overline{1, K}$, выберем точки, лежащие в углах областных элементов и образующие равномерную квадратную сетку размерности $((n_1 + 1) \times (n_1 + 1))$, покрывающую область Ω. Аналогично введем абсолютную ε_a^g и относительную ε_e^g погрешности для функции $g(x, y)$.

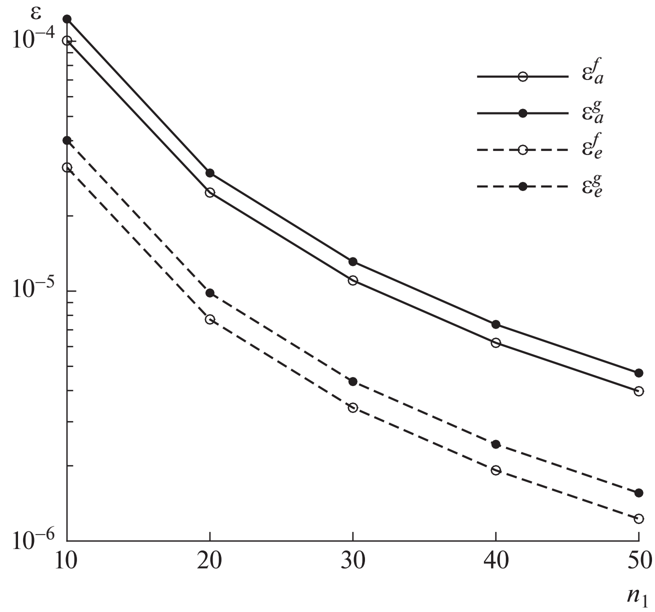
В тестовой серии расчетов проведено решение неоднородного бигармонического уравнения (0.1) с правой частью (1.1), в которой функции $v_i = v_i(x, y)$, $i = \overline{0, 6}$, приняты равными

$$v_0 = x^2y^2\cos x, \quad v_1 = x, \quad v_2 = \sin x, \quad v_3 = y,$$

$$v_4 = \cos x, \quad v_5 = x^2y, \quad v_6 = xy$$

и подобраны так, чтобы решением неоднородного бигармонического уравнения была функция

$$f_a(x, y) = -g_a(x, y) = y\sin x.$$



Фиг. 2. Зависимости погрешностей в тестовом расчете от n_1.

В качестве граничных зададим следующие условия:

$$f\big|_\Gamma = f_a(x_1(s), y_1(s)), \quad \Delta f\big|_\Gamma = g_a(x_1(s), y_1(s)).$$

В ходе тестовых расчетов определялись значения погрешностей ε_a^f, ε_a^g, ε_e^f, ε_e^g в зависимости от параметра n_1, определяющего детальность разбиения границы Γ и области Ω на линейные и областные элементы. На фиг. 2 представлены результаты вычислений для значений $n_1 = 10, 20, 30, 40, 50$. Как видно из фигуры, абсолютная и относительная погрешности для функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ не велики и уменьшаются с ростом числа разбиений, что свидетельствует о хорошей точности и сеточной сходимости разработанного метода.

5. РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В РАМКАХ МОДЕЛИ БРИНКМАНА В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Продемонстрируем возможности предложенного метода на примере двумерной задачи о фильтрации жидкости в пористой области с неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана [13]

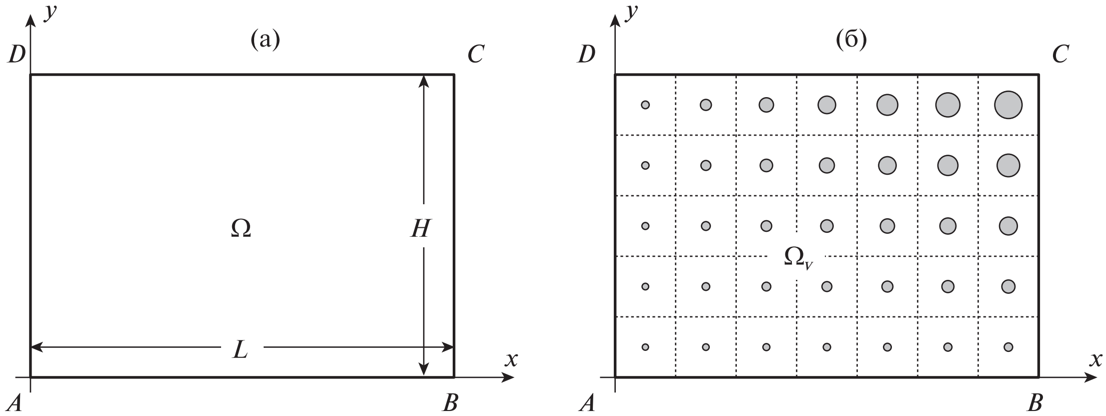
$$-\nabla p - \frac{\mu}{k}\mathbf{u} + \mu_b \Delta \mathbf{u} = 0, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ – вектор скорости фильтрации жидкости, p – давление, μ – вязкость жидкости, $\mu_b = \mu_b(x, y)$ – эффективная вязкость фильтрационного потока, $k = k(x, y)$ – проницаемость пористой среды. В качестве расчетной выберем прямоугольную область $\Omega = \{0 \le x \le L; 0 \le y \le H\}$ (фиг. 3а). Будем считать, что жидкость течет в области Ω слева направо, поступая через отрезок AD и выходя через отрезок BC, а горизонтальные участки границы AB и CD являются линиями тока. Расход потока задан и равен Q.

На основании уравнения неразрывности (5.2) введем функцию тока ψ и завихренности ω равенствами

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\Delta \psi. \tag{5.3}$$



Фиг. 3. Расчетные области Ω (а) и Ω_v (б).

Выбрав в качестве характерных размерных величин высоту H области и среднюю скорость потока $U = Q/H$, перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{y} = \frac{y}{H}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{UH}, \quad \bar{\omega} = \frac{H}{U}\omega,$$
$$\bar{p} = \frac{H}{U\mu}p, \quad \bar{\mu}_b = \frac{\mu_b}{\mu}, \quad \bar{k} = \frac{k}{H^2}. \tag{5.4}$$

В дальнейшем черточки опустим и будем работать с безразмерными величинами.

Перепишем закон Бринкмана (5.1) с учетом (5.3) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \mu_b\frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{k}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mu_b\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Исключив из этих уравнений давление p и выразив член со старшей производной, получим

$$\Delta^2\psi = -\frac{1}{k^2\mu_b}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{1}{k\mu_b}\omega + \frac{1}{\mu_b}\left(\frac{\partial \mu_b}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_b}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right). \tag{5.5}$$

Это уравнение является неоднородным бигармоническим уравнением вида (0.1), где с учетом (1.1)

$$f = \psi, \quad g = -\omega, \quad v_0 = v_1 = 0, \quad v_2 = -\frac{1}{k^2\mu_b}\frac{\partial k}{\partial x}, \quad v_3 = -\frac{1}{k^2\mu_b}\frac{\partial k}{\partial y},$$
$$v_4 = \frac{1}{k\mu_b}, \quad v_5 = -\frac{1}{\mu_b}\frac{\partial \mu_b}{\partial x}, \quad v_6 = -\frac{1}{\mu_b}\frac{\partial \mu_b}{\partial y}.$$

Отметим, что если считать пористую среду однородной, то $v_2 = v_3 = v_5 = v_6 \equiv 0$ и уравнение (5.5) перейдет в известное уравнение Бринкмана

$$\Delta^2\psi - S^2\Delta\psi = 0,$$

где $S^2 = (k\mu_b)^{-1}$.

Искомая функция $\psi(x, y)$ удовлетворяет в области Ω уравнению (5.5), а на ее границе следующим граничным условиям. На входном участке AD границы

$$\psi = q(y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \tag{5.6}$$

что соответствует заданному профилю скорости потока $u_x(0,y) = \dfrac{dq}{dy}$, $u_y(0,y) \equiv 0$, где $q(y)$ – известная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $q(0) = 0$, $q(1) = 1$. На выходном участке BC границы зададим мягкие граничные условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n} = 0. \tag{5.7}$$

На участках AB и CD потребуем выполнения условий непротекания

$$\psi = 0, \quad \omega = 0, \tag{5.8}$$

$$\psi = 1, \quad \omega = 0 \tag{5.9}$$

соответственно. Для решения краевой задачи (5.5)–(5.7) используем метод, описанный в разд. 2.

Для оценки точности численного решения получим решение этой же задачи с использованием микроскопического подхода, формируя пористую среду, составленную множеством цилиндров. Течение вязкой жидкости в межпоровом пространстве описывается в рамках модели Стокса

$$-\nabla p + \Delta\mathbf{v} = 0, \tag{5.10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{5.11}$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – истинная скорость вязкой жидкости. На основании равенства (5.11), записав соотношения, аналогичные (5.3), введем функцию тока ψ_s и завихренности ω_s вязкого течения. Из (5.10) следует, что функция тока удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению

$$\Delta^2\psi_s = 0. \tag{5.12}$$

Рассмотрим модельную пористую среду, представляющую собой периодическую структуру продублированных в вертикальном и горизонтальном направлениях элементарных ячеек (ЭЯ), каждая из которых содержит твердое включение. Для настоящего расчета будем полагать, что ЭЯ имеет форму квадрата со стороной h, в центре которого расположено круговое включение радиуса r. Такая пористая среда аналогична модельной пористой среде конфигурации S1 в работе [14], однако, радиусы круговых включений в ЭЯ будем полагать различными, что позволит моделировать заданное неоднородное распределение проницаемости $k(x,y)$ пористой среды. Таким образом, расчетная область Ω полностью покрыта квадратной сеткой ЭЯ размерности $(n_x \times n_y)$, где $n_x = L/h$, $n_y = H/h$ (фиг. 3б). Для каждой ЭЯ локальное значение объемной концентрации твердых включений определим по формуле

$$\phi = \frac{\pi r^2}{h^2}, \tag{5.13}$$

тогда локальное значение пористости $m = 1 - \phi$.

Дадим следующую математическую постановку задачи вычислительного эксперимента. Требуется определить функцию тока $\psi_s(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (5.12) в области Ω_v – межпоровом пространстве пористой среды в области Ω. На участках внешней границы области Ω_v потребуем выполнения граничных условий (5.6), (5.7). На поверхности каждого твердого включения ℓ_k, $k = \overline{1, n_x n_y}$, зададим условия прилипания

$$\psi_s = \psi_k, \quad \frac{\partial\psi_s}{\partial n} = 0,$$

где ψ_k – неизвестное заранее значение функции тока на поверхности k-го включения. Для решения этой задачи используем метод граничных элементов (МГЭ) по аналогии с тем, как это было сделано в работах [12], [14]. Для твердых включений малого размера, для которых вычисленное по формуле (5.13) значение концентрации $\phi < 0.01$, воспользуемся подходом МГЭ с представлением неизвестных функций на границе включений усеченным рядом Фурье, описанным в [15]. Это позволит снизить количество искомых неизвестных без потери точности расчета.

По рассчитанной в области Ω_v функции $\psi_s(x,y)$ построим осредненную функцию $\tilde{\psi}_s(x,y)$, определенную во всех точках области Ω, способом, описанным в [15]. Значения функции $\tilde{\psi}_s(x,y)$ возьмем равными значениям $\psi_s(x,y)$ в угловых точках и серединах сторон всех ЭЯ, а в их центрах – соответствующим значениям ψ_k на поверхностях твердых включений, содержащихся в каждой ЭЯ. Перечисленные точки покрывают всю область Ω равномерной квадратной сеткой. В остальных точках области Ω осредненная функция тока строится билинейной интерполяцией по найденным значениям в узлах этой сетки. Будем называть решение в рамках микроскопического подхода вычислительным экспериментом.

Для сравнения решим также поставленную задачу в рамках модели Дарси. Уравнение для функции тока ψ_d фильтрационного течения по этой модели в случае неоднородного распределения проницаемости приведено в работе [11] и во введенных безразмерных переменных (5.4) имеет вид

$$\Delta\psi_d = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial \psi_d}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial \psi_d}{\partial y}\right). \tag{5.14}$$

Математическая постановка задачи следующая. Требуется определить функцию тока $\psi_d(x, y)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (5.14), а на ее границе граничным условиям:

$$AB:\ \psi_d = 0, \quad BC:\ \frac{\partial \psi_d}{\partial n} = 0, \quad CD:\ \psi_d = 1, \quad AD:\ \psi_d = q(y).$$

Уравнение (5.14) представляет собой уравнение Пуассона с неизвестными функциями в правой части. Для его решения также воспользуемся МГОЭ, изложение которого для решения этого уравнения приведено в [11].

Зададим неоднородное распределение проницаемости в виде следующей зависимости:

$$k(x, y) = k_{\min} + k_0\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{H}\right)(k_{\max} - k_{\min}), \tag{5.15}$$

где $k_{\min}$ и $k_{\max}$ – заданные минимальное и максимальное значения проницаемости в области Ω, а

$$k_0(\xi,\eta) = 1 - \varphi(\xi)\varphi(\eta), \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} 2^{p-1}\xi^p, & 0 \le \xi \le 0.5, \\ 1 - 2^{p-1}(1-\xi)^p, & 0.5 < \xi \le 1. \end{cases}$$

График функции $\varphi(\xi)$ для $p = 4$ и изолинии функции $k_0(\xi,\eta)$ приведены на фиг. 4.

Для проведения расчетов в рамках микроскопического подхода необходимо задать радиус твердого включения в каждой ЭЯ, исходя из локального значения проницаемости $k(x_i, y_j)$, вычисленного по формуле (5.15) в центре ЭЯ с координатами $x_i = (i - 0.5)h$, $i = \overline{1, n_x}$, $y_j = (j - 0.5)h$, $j = \overline{1, n_y}$. Для высокопористых сред, пористость m которых близка к единице, значение проницаемости с большой степенью точности можно определить по формуле из работы [16], которая во введенных безразмерных переменных с учетом (5.13) имеет вид

$$k(\phi) = \frac{1}{8\pi\kappa^2}\left(-\ln\phi - 1.476 + 2\phi - 1.774\phi^2 + 4.076\phi^3\right), \tag{5.16}$$

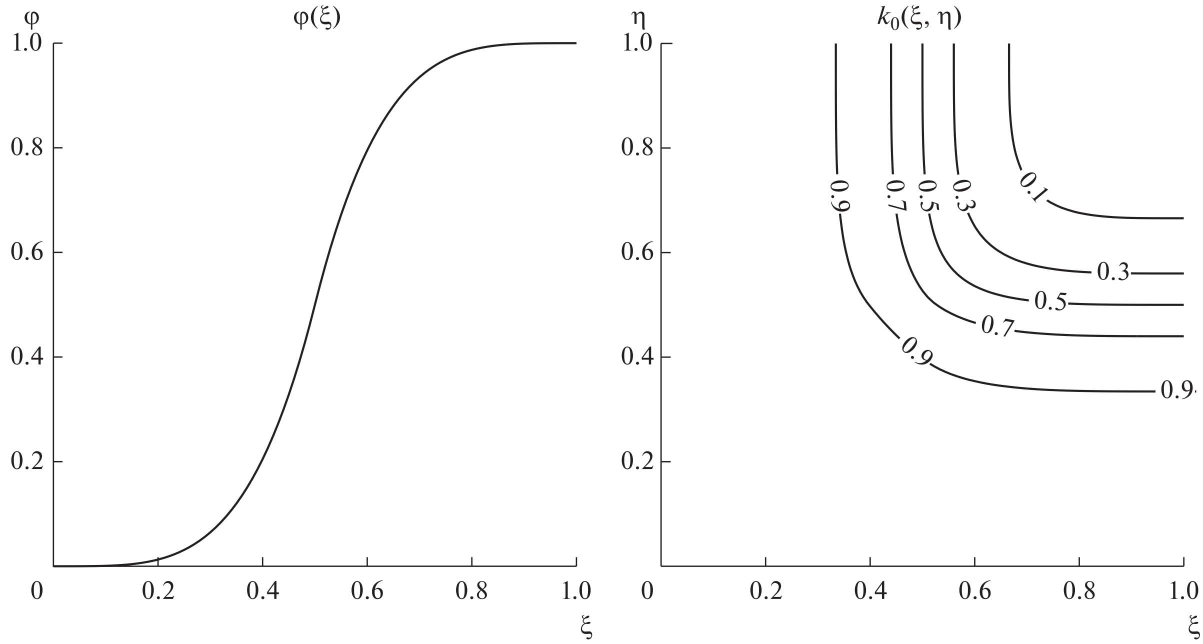
где $\kappa = H/h$ – безразмерный геометрический параметр, определяющий отношение характерного линейного размера задачи к размеру ЭЯ. Из выражения (5.13) получим формулу для вычисления радиуса твердого включения

$$r(k) = h\sqrt{\frac{\phi(k)}{\pi}},$$

где $\phi(k)$ – функция, обратная к (5.16).

Для вычисления эффективной вязкости воспользуемся формулой

$$\mu_b(k) = \left[1 + \left(\frac{k\kappa^2}{\lambda_*^2}\right)^{-B}\right]^{1/B},$$



Фиг. 4. График функции $\varphi(\xi)$ и изолинии функции $k_0(\xi, \eta)$ для $p = 4$.

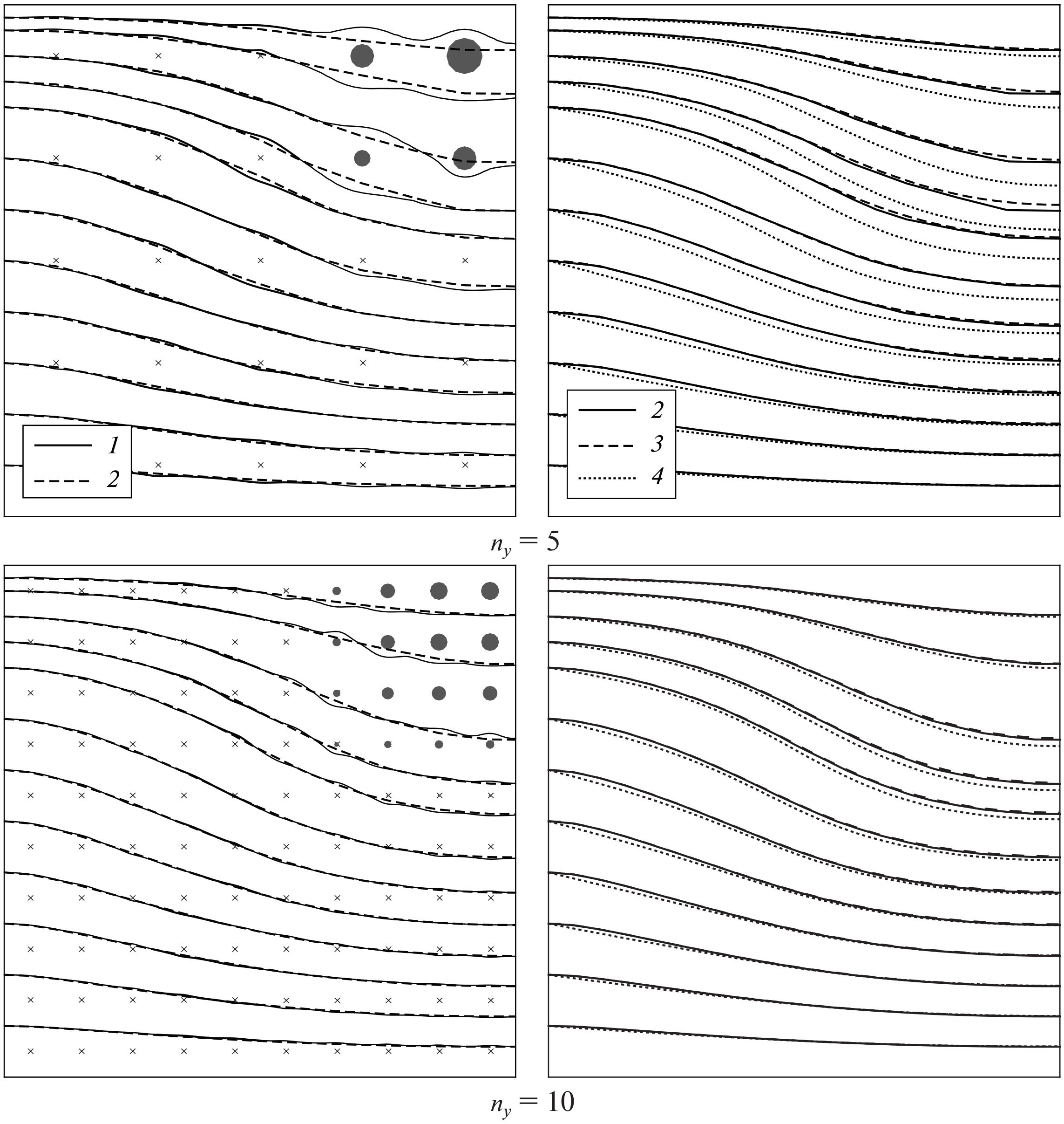
полученной в работе [14], где для рассматриваемой конфигурации модельной пористой среды $B = 2.46$, $\lambda_* = 0.375$. Тогда имеем

$$\frac{\partial \mu_b}{\partial x} = \frac{d\mu_b}{dk}\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_b}{\partial y} = \frac{d\mu_b}{dk}\frac{\partial k}{\partial y}.$$

При проведении расчетов положим $L = 1$, т.е. $n_x = n_y$. Сетка граничных и областных элементов для всех трех моделей построим аналогично тому, как это было сделано в тестовых расчетах в разд. 4, положив $n_1 = 20, 40, 60$. В вычислительном эксперименте каждую сторону внешней границы разобьем на $n_1 = 100$ линейных элементов, а границы крупных твердых включений, расположенных в ЭЯ с локальным значением концентрации $\phi \geq 0.01$, аппроксимируем $n_2 = 30$ линейными элементами. Значения $k_{\min}$ и $k_{\max}$ определим по формуле (5.16) для фиксированных предельных значений концентраций $\phi_{\min} = 10^{-6}$, $\phi_{\max} = 0.1$ и различных $\kappa = n_y$.

Для оценки точности расчетов найдем погрешности ε_a^{ψ}, $\varepsilon_a^{\psi d}$ ε_e^{ψ} и $\varepsilon_e^{\psi d}$ по формулам (4.1), (4.2), где в качестве численного решения положим $f = \psi(x, y)$ (модель Бринкмана) и $f = \psi_d(x, y)$ (модель Дарси) соответственно. В качестве тестового решения примем $f_a = \tilde{\psi}_s(x, y)$, полученную из вычислительного эксперимента. При этом максимальное значение функции тока для всех моделей в силу постановки задачи $\psi_{\max} = 1$.

На фиг. 5 приведены результаты расчетов для $n_y = 5$ (сверху) и $n_y = 10$ (снизу) в случае $n_1 = 40$. На левых графиках представлены результаты вычислительных экспериментов. Сплошными линиями показаны линии тока детального течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве, а штриховыми линиями – изолинии осредненной функции тока $\tilde{\psi}_s(x, y)$. Твердые включения изображены серым цветом, а их положения в случае их малого размера помечены символом “×”. Из фигур видно, что изолинии осредненной функции тока повторяют общее поведение линий тока детального расчета, а в областях с высокой проницаемостью (т.е. с низкой концентрацией твердых включений) практически совпадают с ними. На правых графиках приведено сравнение изолиний осредненной функции тока $\tilde{\psi}_s(x, y)$ (сплошная линия) с линиями тока фильтрационных течений по моделям Бринкмана (штриховые линии) и Дарси (пунктирные линии), построенных как изолинии функций $\psi(x, y)$ и $\psi_d(x, y)$ соответственно. Из фигур видно, что результаты расчета по модели Бринкмана с большей степенью точности совпадают с результатами вычисли-



Фиг. 5. Сравнение линий тока течения по модели Дарси и Бринкмана с результатами вычислительного эксперимента для $n_y = 5, 10$: *1* – вычислительный эксперимент, *2* – изолинии осредненной функции тока в вычислительном эксперименте, *3* – модель Бринкмана, *4* – модель Дарси.

тельного эксперимента, чем результаты по модели Дарси. Отметим, что линии тока, построенные по модели Бринкмана, визуально совпадают с изолиниями функции $\tilde{\psi}_s$ практически всюду за исключением небольшой области больших градиентов функции $k(x, y)$ (см. фиг. 4) при $n_y = 5$, а при $n_y = 10$ – во всей расчетной области. Линии тока по модели Дарси не совпадают с изолиниями $\tilde{\psi}_s$ во всей области Ω, однако, различие становится меньше с увеличением n_y.

В табл. 1 представлены значения погрешностей ε_a^{ψ}, $\varepsilon_a^{\psi d}$ ε_e^{ψ} и $\varepsilon_e^{\psi d}$ для значений $n_y = 5, 10, 15, 20$. Видно, что с увеличением n_y (т.е. с увеличением κ) погрешности по моделям Дарси и Бринкмана уменьшаются. При этом погрешность модели Бринкмана во всех расчетах в несколько раз меньше погрешности модели Дарси. Аналогичные выводы были сделаны и в работе [14] для случая однородной пористой среды. Так же отметим, что при увеличении разбиений n_1 погрешность мо-

Таблица 1. Погрешности ε_a^ψ, $\varepsilon_a^{\psi d}$, ε_e^ψ и $\varepsilon_e^{\psi d}$

n_1	n_y	ε_a^ψ	$\varepsilon_a^{\psi d}$	ε_e^ψ	$\varepsilon_e^{\psi d}$
20	5	0.819e−2	0.281e−1	0.257e−2	0.155e−1
20	10	0.535e−2	0.111e−1	0.139e−2	0.466e−2
20	15	0.401e−2	0.801e−2	0.956e−3	0.253e−2
20	20	0.360e−2	0.647e−2	0.818e−3	0.164e−2
40	5	0.731e−2	0.288e−1	0.217e−2	0.160e−1
40	10	0.373e−2	0.112e−1	0.927e−3	0.500e−2
40	15	0.222e−2	0.808e−2	0.541e−3	0.280e−2
40	20	0.191e−2	0.657e−2	0.451e−3	0.186e−2
60	5	0.707e−2	0.290e−1	0.206e−2	0.161e−1
60	10	0.329e−2	0.113e−1	0.803e−3	0.508e−2
60	15	0.170e−2	0.809e−2	0.417e−3	0.287e−2
60	20	0.137e−2	0.659e−2	0.331e−3	0.193e−2

дели Бринкмана уменьшается, что свидетельствует о сеточной сходимости разработанного метода, а погрешность модели Дарси увеличивается, что свидетельствует о том, что эта погрешность является погрешностью модели, а не вычислительной погрешностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод граничных элементов решения неоднородного бигармонического уравнения с линейной правой частью, содержащей искомую функцию и ее производные. Его эффективность и точность продемонстрированы на тестовой задаче сравнением с аналитическим решением. В качестве примера решена задача расчета фильтрационного течения в пористой среде с заданным неоднородным распределением проницаемости в рамках модели Бринкмана. Для оценки точности полученного решения проведен вычислительный эксперимент по детальному расчету течения вязкой жидкости в межпоровом пространстве в рамках модели Стокса. Результаты численного расчета предложенным методом с хорошей степенью точности согласуются с результатами вычислительного эксперимента. Сравнение полученных решений с решением той же задачи в рамках модели Дарси показало, что погрешность модели Бринкмана при расчете предложенным методом в несколько раз меньше погрешности модели Дарси.

Авторы благодарят Ш.Х. Зарипова и В.Ф. Шарафутдинова за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
3. *Флетчер К., Бреннер Г.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. М.: Мир, 1991. Т. 2. 504 с.
4. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диагол–МИФИ, 2010. 240 с.
5. *Wu J.* Problem of General Visous Flow. Developments in BEM. London: Elsevier Applied Science Publication, 1982. V. 2.
6. *Camp C.V., Gipson G.S.* Boundary element analysis of nonhomogeneous biharmonic phenomena. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. 268 p.
7. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
8. *Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. М.: Мир, 1990. 384 с.
9. *Skerget L., Hribersek M., Kuhn G.* Computational fluid dynamics by boundary–domain integral method // International Journal for Numerical Methods in Engng. 1999. V. 46. 8. P. 1291–1311.
10. *Mardanov R.F., Zaripov S.K.* Solution of Nonhomogeneous Helmholtz Equation with Variable Coefficient Using Boundary Domain Integral Method // Lobachevskii Journal of Math. 2018. V. 39. 6. P. 783–793.

11. *Mardanov R.F., Sharafutdinov V.F., Ibragimov I.Z., Zaripov S.K., Baganina A.E.* Solving the fluid flow problems with boundary domain integral method // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1158. 032027.
12. *Mardanov R.F., Dunnett S.J., Zaripov S.K.* Modeling of fluid flow in periodic cell with porous cylinder using a boundary element method // Engng Analysis with Boundary Elements. 2016. V. 68. P. 54–62.
13. *Brinkman H.C.* A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Sci. Res. 1947. V. A1. 1. P. 27–34.
14. *Zaripov S.K., Mardanov R.F., Sharafutdinov V.F.* Determination of Brinkman model parameters using Stokes flow model // Transport in Porous Media. 2019. V. 130. 2. P. 529–557.
15. *Mardanov R.F., Zaripov S.K., Maklakov D.V.* Two-dimensional Stokes flows in porous medium composed of a large number of circular inclusions // Engng Analysis with Boundary Elements. 2020. V. 113. P. 204–218.
16. *Sangani A.S., Acrivos A.* Slow flow through a periodic array of spheres // Internat. Journal of Multiphase Flow. 1982. V. 8. 4. P. 343–360.