ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 4, с. 666–683

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

АНОМАЛИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ДВУХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРАХ, СОЕДИНЕННЫХ ТОНКИМ УПЛОЩЕННЫМ КАНАЛОМ[1)]

© 2021 г.
С. А. Назаров[1,*], Л. Шенель[2,]**

[1] 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

[2] 91128 Palaiseau, France, Route de Saclay, INRIA/Centre de mathématiques appliquées, École Polytechnique, Université Paris-Saclay, France

**e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

***e-mail: lucas.chesnel@inria.fr*

Поступила в редакцию 21.07.2020 г.
Переработанный вариант 14.10.2020 г.
Принята к публикации 16.11.2020 г.

Исследовано прохождение волн вдоль волновода, который образован двумя полубесконечными цилиндрами, соединенными перемычкой в виде тонкой прямоугольной пластины. Показано, что путем точной настройки размеров пластины можно добиться почти полного или даже полного прохождения поршневой моды на заданной наперед частоте, хотя по понятной причине в ситуации общего положения реализуется почти полное отражение волны. Результат получен при помощи асимптотического анализа коэффициентов рассеяния акустической волны, в частности, процедуры понижения размерности на перемычке. Обсуждаются доступные обобщения постановки задачи и смежные открытые вопросы. Библ. 51. Фиг. 9.

Ключевые слова: акустический волновод, тонкий соединительный канал, асимптотика коэффициентов рассеяния, почти полное отражение и прохождение поршневых мод.

DOI: 10.31857/S0044466921040098

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕЗУЛЬТАТЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть ϖ – область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная простым гладким (для простоты) замкнутым контуром $\partial\varpi$, а $\Pi^\varepsilon_\pm \subset \mathbb{R}^3$ – полубесконечные цилиндры (далее полуцилиндры или рукава)

$$\Pi^\varepsilon_\pm = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \pm x_1 > L^\varepsilon > 0,\ x' = (x_2, x_3) \in \varpi\}. \tag{1}$$

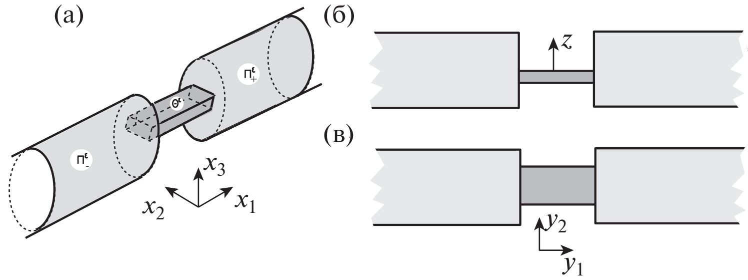
Масштабированием сведем к единице характерный размер сечения ϖ и тем самым сделаем декартовы координаты x_1, x_2, x_3 и все геометрические параметры безразмерными; в частности, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. На торцах $\varpi^\varepsilon_\pm = \varpi \times \{\pm L^\varepsilon\}$ полуцилиндров (1) выделим тонкие прямоугольники $\gamma^\varepsilon_\pm = \{x : x_1 = \pm L^\varepsilon, |x_2| < \ell, |x_3| < \varepsilon/2\}$ и соединим их параллелепипедом

$$\Theta^\varepsilon = \{x : |x_1| < L^\varepsilon, |x_2| < \ell, |x_3| < \varepsilon/2\}, \tag{2}$$

играющим роль перемычки-канала. Интерпретируя область (фиг. 1)

$$\Omega^\varepsilon = \Theta^\varepsilon \cup \bigcup_\pm (\Pi^\varepsilon_\pm \cup \gamma^\varepsilon_\pm) \tag{3}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01003).



Фиг. 1. Трехмерный волновод с тонкой перемычкой (а): вид сбоку (б) и вид сверху (в). Перемычка тонирована.

как акустический волновод (см., например, [1]), рассмотрим спектральную задачу Неймана для оператора Лапласа Δ_x, описывающую распространение волн и потому требующую постановки условий излучения (см. (8))

$$-\Delta_x u^\varepsilon(x) = \omega^2 u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \tag{4}$$

$$\partial_\nu u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^\varepsilon. \tag{5}$$

При этом u^ε – давление в акустической среде, а волновое число $\omega > 0$ поршневых мод

$$w^\pm(x_1) = e^{\pm i\omega x_1} \tag{6}$$

расположено ниже первой положительной частоты $\omega_1(\varpi)$ отсечки спектра в цилиндре $\varpi \times \mathbb{R}$ (наименьшее положительное собственное значение задачи Неймана на сечении ϖ), т.е. других распространяющихся акустических волн нет (ср. разд. 6, 3°).

Кроме того, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, определенная всюду кроме ребер на границе $\partial\Omega^\varepsilon$. Параллелепипед (2) имеет малую высоту $\varepsilon > 0$, а его полудлина

$$L^\varepsilon = L + \varepsilon L' \tag{7}$$

также зависит от ε и будет выбрана специальным образом для обеспечения особых свойств волновода (3).

В статье будет построена асимптотика при $\varepsilon \to +0$ порожденного приходящей в рукаве Π_-^ε волной w^+ решения дифракционной задачи (4), (5)

$$u^\varepsilon(x) = \chi_-(x_1)(w^+(x_1 + L^\varepsilon) + R^\varepsilon w^-(x_1 + L^\varepsilon)) + \chi_+(x_1)T^\varepsilon w^+(x_1 - L^\varepsilon) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \tag{8}$$

а также комплексных коэффициентов рассеяния R^ε и T^ε, присутствующих в правой части (8) множителями при уходящих волнах $w^\pm$ в рукавах $\Pi_\pm^\varepsilon$. При этом для упрощения дальнейших формул волны (6) включены в разложение (8) со сдвигом фазы, $\chi_\pm$ – гладкие срезающие функции, локализующие волны в полуцилиндрах,

$$\chi_\pm(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad x_1 > 3L, \quad \chi_\pm(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 < 2L,$$

а остаток $\tilde{u}^\varepsilon(x)$ затухает на бесконечности со скоростью $O(e^{-(\omega_1(\varpi)^2 - \omega^2)^{1/2}|x_1|})$. Согласно общим результатам [1], [2] решение (8) задачи (4), (5) существует вне зависимости от формы резонатора (перемычки (2)) и наличия или отсутствия захваченных волн u_{tr}^ε (решения однородной задачи с экспоненциальным затуханием на бесконечности). Само поле (8) находится с точностью до слагаемого cu_{tr}^ε, однако коэффициенты рассеяния определены однозначно и подчинены равенству

$$|R^\varepsilon|^2 + |T^\varepsilon|^2 = 1, \tag{9}$$

выражающему закон сохранения энергии.

Основной результат данной работы состоит в том, что при некоторой, тщательно подобранной, полудлине (7) перемычки Θ^ε вместо привычного почти полного отражения волны w^+, приходящей из рукава Π_-, реализуется почти полное ее прохождение, т.е. выполнены представления

$$T^\varepsilon = T^0 + \widetilde{T}^\varepsilon, \quad R^\varepsilon = \widetilde{R}^\varepsilon \tag{10}$$

с малыми остатками $\widetilde{T}^\varepsilon = o(1)$, $\widetilde{R}^\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$ и главным членом $T^0 = 1$ или $T^0 = -1$ коэффициента прохождения (см. окончательные формулы (63) и (70)). Полному прохождению отвечают равенства $|T^0| = 1$, $\widetilde{T}^\varepsilon = 0$ и $\widetilde{R}^\varepsilon = 0$ в формулах (10). Разумеется, почти полное отражение характеризуется совершенно другими соотношениями при сохранении качества остатков

$$R^\varepsilon = 1 + \widetilde{R}^\varepsilon, \quad T^\varepsilon = \widetilde{T}^\varepsilon. \tag{11}$$

Впервые эффект почти полного отражения волны на околопороговых частотах, названный аномалией Вайнштейна, был описан в [3] для полубесконечной круговой цилиндрической трубы с жесткими стенками, открытой в пространство. Похожие аномалии были обнаружены в статьях [4]–[9] и др. для волноводов иных геометрических форм, причем помимо почти полного отражения (11) были найдены условия, при которых происходит почти полное прохождение (10) волны, называемое инвертированной аномалией Вайнштейна и связанное с возникновением порогового резонанса [10]–[12]. Более того, известно, что в случае близкого расположения точки комплексного резонанса к вещественной оси наблюдается очень быстрая изменяемость коэффициентов рассеяния на частотах около этой точки. Такое явление выражает резонанс Фано [13], который подвергался многократным исследованиям как при помощи вычислительных [14]–[18], так и теоретических методов [19]–[23]. Рассматриваемая задача (4), (5) в значительной мере воспроизводит упомянутый механизм: при $\varepsilon \to +0$ у нее появляются точки комплексного резонанса вблизи собственных значений предельной задачи (12)–(14), вызывающий быструю изменяемость коэффициентов рассеяния на околорезонансных частотах и, в частности, позволяющий достичь почти полного прохождения поршневой моды сквозь сколь угодно тонкий соединительный канал Θ^ε путем тщательного подбора длины канала.

Похожие постановки задач рассматривались в [24]–[28], а именно, двумерные задачи о рассеянии волны, падающей под углом на стенку с периодически расположенными узкими щелями. В перечисленных работах применялось сведение задачи к интегральным уравнениям, которое подразумевает знание точной формулы для соответствующей функции Грина и, следовательно, не годится в нашей ситуации хотя бы потому, что сечение ϖ трехмерного цилиндра – произвольная ограниченная область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Далее предлагается иной, всеохватывающий подход к построению асимптотики, опирающийся на метод сращиваемых разложений (ср. [29]–[39] и др. о сингулярно возмущенных эллиптических задачах при родственной геометрии). Вместе с тем предлагаемый подход отличается от упомянутых публикаций, так как не только толщина, но и длина (7) тонкого канала зависят от параметра ε, причем именно последнее обстоятельство позволяет добиться почти полного или даже полного прохождения поршневой моды.

Наиболее близкий асимптотический анализ представлен в работах [33], [34], где получены полные асимптотические разложения решений задач Неймана для уравнения Пуассона на сочленениях областей с различными предельными размерностями. Соответствующие процедуры применяются в окрестностях зон присоединения перемычки к полуцилиндрам, и поэтому переход к рассмотрению уравнения Гельмгольца (4) не встретил дополнительных трудностей. На самих областях Θ^ε и $\Pi_\pm^\varepsilon$ возможно разделение переменных, что упрощает решение соответствующих предельных задач. Схема обоснования полученных в разд. 2–4 асимптотик (см. (63) и (70)) описана в разд. 5 и основана на технике весовых пространств с отделенной асимптотикой в варианте, разработанном в [40]. В заключительном разд. 6 обсуждаются доступные обобщения, следствия и открытые вопросы.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Обсудим пару краевых задач, из решений которых в следующих разделах будут сформированы асимптотические представления акустического поля (8).

Введем новые обозначения для декартовых координат: $y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ и $z = x_3$. Разделение переменных и устранение вертикальной координаты z в уравнении (4), суженном на перемычку Θ^ε, приводит к двумерному уравнению Гельмгольца в прямоугольнике $\theta = (-L, L) \times (-\ell, \ell) \ni y$

$$-\Delta_y v(y) = \omega^2 v(y), \quad y \in \theta, \tag{12}$$

снабженному вытекающими из (5) условиями Неймана

$$\pm \frac{\partial v}{\partial y_2}(y) = 0, \quad y_2 = \pm\ell, \quad |y_1| < L, \tag{13}$$

и назначенными искусственно условиями Дирихле

$$v(y) = 0, \quad y_1 = \pm L, \quad |y_2| < \ell. \tag{14}$$

Отметим, что θ — продольное сечение параллелепипеда $\{x : |y_1| < L, |y_2| < \ell, |z| < \varepsilon/2\}$ (ср. (2) с заменой $L^\varepsilon \mapsto L$), и далее не различаем в обозначениях двумерные фигуры и их погружения в пространство на плоскость $\{x : z = 0\}$.

Собственные значения и функции смешанной краевой задачи (12)—(14) имеют вид

$$\mu_{jk} = \frac{\pi^2 j^2}{4\ell^2} + \frac{\pi^2 m^2}{4L^2}, \tag{15}$$

$$v_{jk}(y) = \sin\left(\frac{\pi m}{2L}(y_1 + L)\right)\cos\left(\frac{\pi j}{2\ell}(y_2 + \ell)\right), \tag{16}$$

где $m \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Далее рассматриваются специфические частоты

$$\omega_m = \frac{\pi m}{2L} \in (0, \omega_1(\varpi)), \quad m = 1, \ldots, M, \tag{17}$$

отвечающие числам (15) с индексом $j = 0$. Разумеется, при малом L множество (17) пусто, т.е. $M = 0$, но увеличение длины $2L$ приводит к неограниченному росту размера M списка (17).

Еще одна двумерная задача, нужная для построения асимптотики, описывает явление пограничного слоя около зон $\gamma_\pm^\varepsilon$ соединения перемычки и рукавов и ставится на объединении $\Xi = \Xi^- \cup \Xi^+$ полуплоскости и полуполосы (см. фиг. 2а)

$$\Xi^- = \mathbb{R}^2_- = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < 0\}, \quad \Xi^+ = \{\xi : \xi_1 0, |\xi_2| < 1/2\}. \tag{18}$$

Эта задача имеет вид

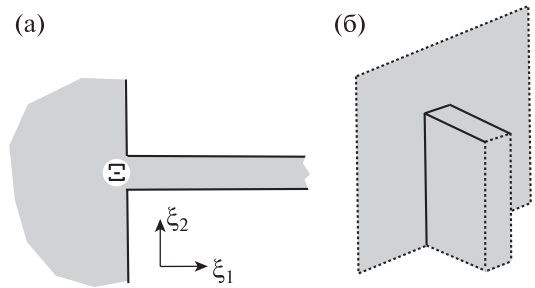
$$\begin{aligned} -\Delta_\xi Y(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \\ \partial_\nu Y(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \tag{19}$$

а используемый далее метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [41], [42], [43; гл. 2] и др.) оперирует ее решениями, ограниченными или полиномиально растущими в полуполосе при $\xi_1 \to +\infty$. Одно из таких решений очевидно: постоянная $Y^0(\xi) = 1$. Другое линейно независимое решение — гармоническая в области Ξ функция с нулевой нормальной производной на границе, однозначно определенная представлениями

$$Y^1(\xi) = \xi_1 + C_\Xi + O(e^{-\pi\xi_1}), \quad \xi_1 \to +\infty, \quad \xi \in \Xi^+, \tag{20}$$

$$Y^1(\xi) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\xi|} + O\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \quad |\xi| \to +\infty, \quad \xi \in \Xi^-. \tag{21}$$

При этом C_Ξ — некоторая абсолютная постоянная. Связь коэффициентов при растущих слагаемых в (20) и (21) вызвана понятным ограничением: у гармонической функции Y^1 равен нулю суммарный поток на бесконечность.



Фиг. 2. Сочленения полуплоскости с полуполосой (а) и полупространства с четвертушкой слоя (б).

3. НЕКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть заданная частота $\omega \in (0, \omega_1(\varpi))$ не совпадает с критическими (17), т.е.

$$\omega \neq \frac{\pi m}{2L} \quad \text{при всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

При этом производить “настройку” полудлины (7) не требуется – положим $L' = 0$ и обозначим через $\Pi_\pm^0$ полученные полуцилиндры (1). Асимптотическое строение решения (8) задачи (4), (5) весьма просто. Именно, в анзаце

$$u^\varepsilon(x) = u_\pm^0(x) + \varepsilon u'_\pm(x) + \dots \quad \text{на} \quad \Pi_\pm^0 \tag{23}$$

положим

$$u_-^0(x) = e^{+i\omega(x_1+L)} + e^{-i\omega(x_1+L)}, \quad u_+^0(x) = 0. \tag{24}$$

Иными словами, аналогично формулам (11) величины

$$R^0 = 1, \quad T^0 = 0 \tag{25}$$

фигурируют в асимптотических разложениях коэффициентов отражения и прохождения

$$\begin{aligned} R^\varepsilon &= R^0 + \varepsilon R' + \dots, \\ T^\varepsilon &= T^0 + \varepsilon T' + \dots. \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, не существенные для предпринимаемого анализа. Такой несложный вывод основан на следующем наблюдении: для обеспечения непрерывного перехода из рукавов $\Pi_\pm^0$ на перемычку Θ^ε главный член в асимптотическом анзаце

$$u^\varepsilon(x) = v^0(y) + \varepsilon v'(y) + \dots \quad \text{на} \quad \Theta^\varepsilon \tag{27}$$

нужно искать как решение уравнения Гельмгольца (12) с краевыми условиями Неймана (13) и Дирихле

$$v^0(y) = g_\pm(y_2), \quad y \in \gamma_\pm^0, \tag{28}$$

где $\gamma_\pm^0 = \{y : y_1 = \pm L, |y_2| < \ell\}$ и

$$g_-(y_2) = u_-^0\Big|_{y_1=-L} = 2, \quad g_+(y_2) = u_+^0\Big|_{y_1=+L} = 0. \tag{29}$$

Благодаря введенному ограничению (22) на частоту ω такая задача однозначно разрешима и

$$v^0(y) = 2\cos(\omega(y_1 + L)) - 2\,\mathrm{ctg}(2\omega L)\sin(\omega(y_1 + L)). \tag{30}$$

Производные главных членов анзацев (23) и (27) претерпевают скачки на соединительных прямоугольниках $\gamma_\pm^\varepsilon$. Для их устранения построим поправочные члены анзацев. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [41], [42], [43; гл. 2] и др.), интерпретируя

(23) и (27) как внешние разложения, пригодные на удалении от прямоугольников $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$, и построим внутренние разложения в непосредственной близости от $\gamma_{\pm}^{\varepsilon}$:

$$u^{\varepsilon}(x) = Z_{\pm}^{0}(\xi^{\pm}) + \varepsilon Z_{\pm}'(\xi^{\pm}) + \ldots \quad \text{в окрестности множеств} \quad \overline{\gamma_{\pm}^{\varepsilon}}. \tag{31}$$

В правой части (31) аргументами служат растянутые координаты

$$\xi^{\pm} = (\xi_1^{\pm}, \xi_2^{\pm}) = (\varepsilon^{-1}(L \mp y_1), \varepsilon^{-1} z), \tag{32}$$

а для координаты y_2 сохранен исходный масштаб. Замена координат $(y, z) \mapsto (\xi^{\pm}, y_2)$ и формальный переход к $\varepsilon = 0$ трансформируют волновод (3) в множество $\Xi \times (-\ell, \ell)$ (ср. определения (2) и (18)). Поскольку $\Delta_x + \omega^2 = \varepsilon^{-2}\Delta_{\xi^{\pm}} + \ldots$, в результате возникает задача Неймана (19) в области Ξ с параметром $y_2 \in (-\ell, \ell)$.

В силу формул (30) и (32) имеем

$$v^0(y) = 2 - 2\omega\operatorname{ctg}(2\omega L)(y_1 + L) + O(|y_1 + L|^2) = 2 - 2\varepsilon\omega\operatorname{ctg}(2\omega L)\xi_1^{-} + O(\varepsilon^2|\xi_1^{-}|^2) \tag{33}$$

при $y_1 \to -L + 0$ и

$$v^0(y) = -2\frac{\omega(y_1 - L)}{\sin(2\omega L)} + O(|y_1 - L|^2)2\varepsilon\frac{\omega\xi_2^{+}}{\sin(2\omega L)} + O(\varepsilon^2|\xi_2^{+}|^2) \tag{34}$$

при $y_1 \to +L - 0$. Таким образом, при учете представления (20) функции Y_1 процедура сращивания разложений (27), (33), (34) и (31), (35) на уровнях $1 = \varepsilon^0$ и ε показывает, что

$$Z_{-}^{0}(\xi) = 2, \quad Z_{+}^{0}(\xi) = 0 \tag{35}$$

и

$$Z_{\pm}'(\xi^{\pm}; y_1) = C_{\pm}^{1} Y^1(\xi^{\pm}) + C_{\pm}^{0}(y_1), \tag{36}$$

где Y^1 — упомянутое специальное решение задачи (19), а $C_{\pm}^{0}(y_1)$ — произвольная постоянная (напоминаем, что y_2 — параметр в этой задаче). Сравнивая соотношения (35), (36) и (31), (20), находим, что

$$C_{-}^{1} = -2\omega\operatorname{ctg}(2\omega L), \quad C_{+}^{1} = \frac{2\omega}{\sin(2\omega L)}. \tag{37}$$

Теперь произведем сращивание разложений (31) и (23). На уровне $1 = \varepsilon^0$ сращивание обеспечено соотношениями (35) и (24). Кроме того, поправочный член $u_{\pm}'$ в анзаце (23) должен удовлетворять задаче

$$\begin{gathered} -\Delta_x u_{\pm}'(x) = \omega^2 u_{\pm}'(x), \quad x \in \Pi_{\pm}^{0}, \\ \partial_{\nu} u_{\pm}'(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi_{\pm}^{0} \setminus \overline{\gamma}_{\pm}^{0}, \end{gathered} \tag{38}$$

и вытекающим из (26) и (8) условиям излучения

$$u_{\pm}'(x) = G_{\pm}' e^{\pm i\omega(x_1 \mp L)} + \tilde{u}_{\pm}'(x) \tag{39}$$

с экспоненциально затухающими на бесконечности остатками $\tilde{u}_{\pm}'$ и коэффициентами

$$G_{-}' = R', \quad G_{+}' = T'. \tag{40}$$

Коэффициенты (40) суть не что иное, как поправочные члены в представлениях (26) коэффициентов рассеяния. Наконец, благодаря представлению (21) придаем следующее сингулярное поведение поправочному члену $u_{\pm}'$:

$$u_{\pm}'(x) = C_{\pm}^{1}\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r_{\pm}} + O(1), \quad r_{\pm} = \sqrt{(x_1 \mp L)^2 + x_3^2} \to +0. \tag{41}$$

Отметим, что соотношение (41) требует уточнения вблизи концевых точек $\mathbb{O}_+^\pm = (\pm L, +\ell, 0)$ и $\mathbb{O}_-^\pm = (\pm L, -\ell, 0)$ (см. разд. 5).

Поскольку $\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r}$ – функция Грина для оператора Лапласа на полуплоскости $\mathbb{R}_-^2$ с краевыми условиями Неймана и особенностью на границе, упомянутые остатки являются решениями задач

$$\mp\frac{\partial u'_\pm}{\partial x_1}(\pm L, x') = C_\pm^1 \delta_{\gamma_\pm^0}(x'), \quad x' \in \varpi,$$

где $\delta_{\gamma_\pm^0}$ – дельта-функция Дирака, распределенная с единичной плотностью вдоль отрезка $\gamma_\pm^0 \subset \varpi_\pm$. Применим формулу интегрирования по частям в интеграле

$$0 = \int\limits_{\Pi_\pm^0(H)} (\Delta_x u'_\pm(x) + \omega^2 u'_\pm(x))(e^{+i\omega(x_1 \mp L)} + e^{-i\omega(x_1 \mp L)})dx$$

по множеству $\Pi_\pm^0(H) = \{x \in \Pi_\pm^0 : \pm x_1 < H,\, r_\pm > 1/H\}$ и вычислим предел при $H \to +\infty$. В результате выводим связи

$$i\omega|\varpi|R' + 2\ell C_-^1 = 0, \quad i\omega|\varpi|T' + 2\ell C_+^1 = 0,$$

где $|\varpi|$ – площадь сечения ϖ полуцилиндров (1). Подставив сюда формулы (37) для величин $C_\pm^1$, находим выражения для поправок в анзацах (26) для коэффициентов рассеяния:

$$R' = -4i\frac{\ell}{|\varpi|}\mathrm{ctg}(2\omega L), \quad T' = 4i\frac{\ell}{|\varpi|}\frac{1}{\sin(2\omega L)}. \tag{42}$$

Отметим, что в силу равенств (25) и закона сохранения энергии (9) величина R' должна быть чисто мнимой. Кроме того, $\sin(2\omega L) = 0$ и $\mathrm{ctg}(2\omega L) = 0$ в критическом случае

$$\omega = \frac{\pi m}{2L} \in (0, \omega_1(\varpi)) \quad \text{при некотором} \quad m \in \mathbb{N}, \tag{43}$$

а значит, асимптотические представления коэффициентов рассеяния изменяются существенно (см. разд. 4), так как формулы (42) теряют смысл.

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, поправочные слагаемые в анзацах (18) для акустического поля u^ε представимы в виде

$$u'_\pm(x) = C_\pm^1\left(i\frac{2\ell}{\omega|\varpi|}e^{\pm i(x_1 \mp L)} + \mathbf{u}(\pm x_1 - L, x')\right), \tag{44}$$

где $\mathbf{u}$ – каноническое решение задачи в зафиксированном полуцилиндре

$$\begin{gathered} -\Delta_x \mathbf{u}(x) = \omega^2 \mathbf{u}(x), \quad x \in \varpi \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\varpi \times \mathbb{R}_+, \\ -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}(0, x') = \delta_{\gamma_\pm^0}(x') - \frac{2\ell}{|\varpi|}, \quad x' \in \varpi. \end{gathered} \tag{45}$$

Оно затухает на бесконечности и согласно выкладке (42) допускает представление

$$\mathbf{u}(x) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r} + \mathbf{u}^\bullet(x_1) + O(r), \quad r = (x_1^2 + x_3^2)^{1/2} \to +0. \tag{46}$$

Здесь $u_\pm^\bullet$ – некоторая функция на отрезке $(-\ell, \ell) \ni x_2 = y_2$.

Во-вторых, можно найти поправочное слагаемое v' в анзаце (27) для поля u^ε на тонком канале. С этой целью уточним процедуру сращивания разложений (23), (31) внутри рукавов $\Pi_\pm^0$ и (31), (27) на перемычке Θ^ε. Сначала согласно соотношениям (36), (21) и (44), (46) находим, что

$$\left.\begin{aligned} C_\pm^1 Y^1(\xi^\pm) + C_\pm^0(y_2) &= -C_\pm^1\pi^{-1}\ln(\varepsilon^{-1}r_\pm) + C_\pm^0(y_2) + \ldots, \\ G'_\pm + C_\pm^1\mathbf{u}(\pm x_1 - L, x') &= G'_\pm + C_\pm^1(-\pi^{-1}\ln r_\pm + \mathbf{u}^\bullet(y_2)) + \ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ C_\pm^0(y_2) = C_\pm^1(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)) + G'_\pm. \tag{47}$$

Подчеркнем, что

$$\ln|\xi^\pm| = \ln(\varepsilon^{-1}r_\pm) = \ln r_\pm + |\ln\varepsilon| \quad \varepsilon \le 1,$$

а последнее соотношение – результат сравнения слагаемых, выделенных в первых двух строках (47), причем множители при $\ln r_\pm$ совпали автоматически.

Затем формулы (36), (20) и (44), (46), а также очевидное равенство $v'(y) = v'(\pm L, y_2) + O(|y_1 \mp L|)$ приводят к краевым условиям

$$v'(\pm L, y_2) = C_\pm^1(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2) + C_\Xi) + G'_\pm, \quad y \in \gamma_\pm^0, \tag{48}$$

которые вместе с уравнениями (12) и (13) образуют однозначно разрешимую (по предположению (22)) смешанную краевую задачу для поправочного члена в анзаце (27). Подчеркнем, что этот член v' линейно зависит от большого параметра $|\ln\varepsilon|$, однако множитель ε делает поправку $\varepsilon v'$ малой.

4. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пусть теперь выполнено соотношение (43), т.е. ω^2 – собственное значение задачи (12)–(14) (ср. (17) и (15)). Подчеркнем, что эта задача по-прежнему ставится в фиксированном прямоугольнике θ, однако истинная полудлина (7) перемычки (2) считается зависящей от параметра ε. Анзацы (23) в полуцилиндрах $\Pi_\pm^\varepsilon$ остаются без изменений, но анзац (27) превращается в такой:

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}v^{-1}(y) + v^0(y) + \ldots \quad \text{на} \quad \Theta^\varepsilon. \tag{49}$$

Выбор частоты (43) предоставляет собственную функцию предельной задачи (12)–(14) в прямоугольнике θ, определенную равенством (16) при $j = 0$. Таким образом, положим

$$v^{-1}(y) = a\mathbf{v}(y) = a\sin(\omega(y_1 + L)), \tag{50}$$

где a – подлежащая определению постоянная. Благодаря условиям Дирихле (14) формула Тейлора показывает, что

$$\begin{gathered} \varepsilon^{-1}v^{-1}(y) + v^0(y) = 0 + (C_\pm^1\xi_2^\pm + v^0(\pm L, y_2)) + \ldots, \\ C_-^1 := a\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y_1}(-L, y_2) = a\omega, \quad C_+^1 := -a\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y_1}(+L, y_2) - a\omega\cos(2\omega L) = (-1)^{1+m}a\omega. \end{gathered} \tag{51}$$

Здесь использованы растянутые координаты (32), в которых по-прежнему фигурирует величина $L = L^0$. Поэтому область, где ставится задача (19) о пограничном слое, приобретает вид

$$\Xi' = \{\xi \in \mathbb{R}^2 : (\xi_1 + L', \xi_2) \in \Xi\},$$

и в ней имеется решение $Y'(\xi) = Y^1(\xi_1 + L', \xi_2)$ задачи Неймана со следующим поведением на бесконечности:

$$\begin{gathered} Y'(\xi) = \xi_1 + (C_\Xi + L') + O(e^{-\delta\xi_1}), \quad \xi_1 \to +\infty, \quad \delta > 0, \\ Y'(\xi) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\rho'} + O\left(\frac{1}{\rho'}\right), \quad \rho' = ((\xi_1 + L')^2 + \xi_2^2)^{-1/2} > 1. \end{gathered} \tag{52}$$

Производя сращивание разложений (51), (52) и (31) на перемычке Θ^ε, обнаруживаем, что главные члены внутренних разложений принимают вид

$$Z_\pm^0(\xi^\pm) = C_\pm^1 Y'(\xi^\pm) + C_\pm^0(y_2), \tag{53}$$

где множители $C_\pm^1$ взяты из (51), а $C_\pm^0(y_2)$ – величины, которые предстоит вычислить.

Продолжим сращивание и при учете второго разложения (52) аналогично предыдущему разделу получим сингулярное условие для главного члена внешнего разложения (23)

$$u_\pm^0(x) = C_\pm^1 \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r_\pm^\varepsilon} + u_\pm^\bullet(x_2) + O(r_\pm^\varepsilon), \quad r_\pm^\varepsilon = ((x_1 \mp L^\varepsilon)^2 + x_2^2)^{1/2} \to +0, \tag{54}$$

где обозначения аналогичны использованным в формуле (41). Итак, $u_\pm^0$ – решения задач

$$-\Delta_x u_\pm^0(x) = \omega^2 u_\pm^0(x), \quad x \in \Pi_\pm^\varepsilon, \quad \partial_\nu u_\pm^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi_\pm^\varepsilon \backslash \overline{\gamma}_\pm^0, \tag{55}$$

дополненных сингулярными условиями (54) и обычными условиями излучения

$$\begin{gathered} u_-^0(x) = e^{+i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + R^0 e^{-i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + \tilde{u}_-^0(x), \\ u_+^0(x) = T^0 e^{+i\omega(x_1-L^\varepsilon)} + \tilde{u}_+^0(x). \end{gathered} \tag{56}$$

Задачи (55), (54), (56) зависят от малого параметра ε фиктивно: замена координат $x \mapsto (x', x_3 \mp \varepsilon L')$ уничтожает эту зависимость. Выкладки, аналогичные приведшим к связям (42), показывают, что согласно формулам (51) для $C_\pm'$ нужные решения существуют при выполнении равенств

$$\begin{gathered} i\omega(R^0 - 1)|\varpi| + 2\ell a\omega = 0, \\ i\omega T^0|\varpi| + 2\ell a(-1)^{1+m}\omega = 0 \end{gathered} \tag{57}$$

и принимают вид

$$u_-^0(x) = e^{+i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + R^0 e^{-i\omega(x_1+L^\varepsilon)} + C_-'\mathbf{u}(-x_1 - L^\varepsilon, x'),$$

$$u_+^0(x) = T^0 e^{+i\omega(x_1-L^\varepsilon)} + C_+'\mathbf{u}(x_1 - L^\varepsilon, x').$$

Здесь $\mathbf{u}$ – решение задачи (45) в зафиксированном полуцилиндре $\varpi \times \mathbb{R}_+$. Теперь похожая на представленную в (47) процедура сращивания внутри рукавов (1) приводит к следующим формулам для последних слагаемых во внутреннем разложении (45) около прямоугольников $\gamma_\pm^\varepsilon$:

$$\begin{gathered} C_-^0(y_2) = 1 + R^0 + C_-'(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)), \\ C_+^0(y_2) = T^0 + C_+'(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + \mathbf{u}^\bullet(y_2)). \end{gathered} \tag{58}$$

Процедура сращивания внешнего (49) и внутреннего (31) разложений на перемычке несколько отличается от изложенной в предыдущем разделе. Именно, при учете формул (51)–(53) и (58) выводим соотношения

$$\begin{gathered} v^0(-L, y_2) = 1 + R^0 + a\omega(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + C_\Xi + L' + \mathbf{u}^\bullet(y_2)), \\ v^0(+L, y_2) = T^0 + a\omega(-1)^{1+m}(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + C_\Xi + L' + \mathbf{u}^\bullet(y_2)). \end{gathered} \tag{59}$$

Выражение (50) для собственной функции $\mathbf{v}$ превращает условие разрешимости задачи (12), (13), (59) в равенство

$$\begin{gathered} 0 = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y_1}(-L)\int_{-\ell}^{\ell} v^0(-L, y_2)dy_2 - \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y_1}(+L)\int_{-\ell}^{\ell} v^0(+L, y_2)dy_2 = \\ = 2\ell\omega(1 + R^0 + (-1)^{1+m}T^0) + 4\ell a\omega(\pi^{-1}|\ln\varepsilon| + C_\Xi + L' + \overline{\mathbf{u}}^\bullet), \end{gathered} \tag{60}$$

где $\overline{\mathbf{u}}^\bullet \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\mathbf{u}^\bullet(y_2)dy_2$ – среднее функции $\mathbf{u}^\bullet$ по отрезку $(-\ell, \ell)$.

Теперь зафиксируем возмущение $\varepsilon L'$ полудлины (7):

$$L' = -\pi^{-1}|\ln\varepsilon| - C_{\Xi} - \overline{\mathbf{u}}^{\bullet}. \tag{61}$$

В результате соотношение (60) (без средней его части) принимает вид

$$1 + R^0 + (-1)^{1+m}T^0 = 0. \tag{62}$$

Наконец, решив систему трех линейных уравнений (57), (62), находим, что

$$R^0 = 0, \quad T^0 = (-1)^m \quad \text{и} \quad a = i\frac{|\varpi|}{2\ell}. \tag{63}$$

Обратим внимание на то, что величина (61) отрицательна при малом $\varepsilon > 0$, а значит, для достижения эффекта почти полного прохождения поршневой моды на частоте $\omega \in (0, \omega_1(\varpi))$ необходимо несколько уменьшить критическую длину $L = L^0 = 2\omega/\pi m$ (ср. (43)).

5. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ И ТРЕХМЕРНЫЕ ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ

Решение задачи (38) с условиями излучения (39) имеет сингулярность (41) на отрезке $\gamma_{\pm}^0$, которая требует отдельного изучения около его концов $\mathcal{O}_{\pm}^{+}$ и $\mathcal{O}_{\pm}^{-}$. Согласно предназначению функция Грина $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{y_2^2 + r^2}}$ для задачи Неймана в полупространстве с особенностью на границе поведение эталонного решения $\mathbf{u}$ задачи (45) около отрезка описывается интегралом

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{dt}{\sqrt{(y_2 - t)^2 + r^2}} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\pm}\ln\left(\ell \pm y_2 + \sqrt{(\ell \pm y_2)^2 + r^2}\right), \tag{64}$$

где $r = r_{\pm}$ – расстояние до прямой, продолжающей отрезок $\gamma_{\pm}^0$. В силу формулы (64) представление (46) решения задачи (45) включает функцию

$$\mathbf{u}^{\bullet}(y_2) = (2\pi)^{-1}\ln(\ell^2 - y_2^2) + \hat{\mathbf{u}}^{\bullet}(y_2) \tag{65}$$

с логарифмическими особенностями в точках $y_2 = \pm\ell$ и регулярным остатком $\hat{\mathbf{u}}^{\bullet} \in H^2(-\ell,\ell)$. Такая – слабая – сингулярность не оказывает влияния на разрешимость трехмерных задач (38), (39), (41) и (45), однако ее появление в краевом условии лишает задачу (38), (48) привычной постановки в пространствах Соболева.

Обобщенная формулировка задачи (12), (13), (28) состоит в отыскании функции v, для которой разность $v - g$ попадает в пространство $H_0^1(\theta;\gamma_{\pm}^0)$, и выполнено интегральное тождество [45]

$$\int_{\theta}\nabla_y v(x)\overline{\nabla_y\psi(x)}dx = \omega^2\int_{\theta}v(x)\overline{\psi(x)}dx \tag{66}$$

с пробными функциями $\psi \in H_0^1(\theta;\gamma_{\pm}^0)$. Здесь $H_0^1(\theta;\gamma_{\pm}^0)$ – подпространство функций из класса Соболева $H^1(\theta)$, подчиненных условиям Дирихле (14), а g – продолжение функций $g_{\pm}$ с отрезков $\gamma_{\pm}^0$ на прямоугольник θ в классе $H^1(\theta)$. К сожалению, для сингулярных функций (65) нужного продолжения не существует, однако на помощь приходит теория Кондратьева [46] (см. также [2], [47] и др.), которая передает все основные свойства оператора задачи в обычном пространстве Соболева $H^1(\theta)$ оператору той же задачи в весовом пространстве $V_{\mu}^1(\theta)$ с нормой

$$\left\|v; V_{\mu}^1(\theta)\right\| = \left(\left\|s^{\mu}\nabla_y v; L^2(\theta)\right\|^2 + \left\|s^{\mu-1}v; L^2(\theta)\right\|^2\right)^{1/2}$$

для весовых показателей $\mu \in (-1,1)$; здесь $s(y)$ – расстояние от точки $y \in \theta$ до вершин прямоугольника θ. Нетрудно убедиться в том, что правые части (48) с составляющей (65) допускают продолжение в классе $V_{\mu}^1(\theta)$ с любым показателем $\mu > 0$. Таким образом, задачу (12), (14), (48) приходится решать в весовом пространстве с положительным показателем μ – правильная переформулировка интегрального тождества (66) включает пробные функции $\psi \in V^1_{-\mu}(\theta)$, для которых выполнены условия Дирихле (14) и все интегралы оказываются сходящимися. Подчеркнем, что для собственной функции задачи (12)–(14) благодаря ее обращению в нуль в вершинах прямоугольника справедливо включение $\mathbf{v} \in V^1_{\varphi}(\theta)$ для всех показателей $\varphi > -1$, что и обеспечивает разрешимость нужных задач в прямоугольнике θ и сходимость всех возникших ранее интегралов.

Указанные слабые сингулярности усугубляются при дифференцировании, т.е. на следующих шагах итерационного процесса, и, как следствие, вблизи коротких сторон прямоугольников $\gamma^{\varepsilon}_{\pm}$, т.е. ребер параллелепипеда Θ^{ε}, реализуется явление трехмерного пограничного слоя. Оно описывается при помощи задачи Неймана для уравнения Лапласа в области (фиг. 2б), являющейся объединением полупространства $\mathbb{R}^3_-$ и четвертушки слоя $\mathbb{K} \times (-1/2, 1/2)$, где $\mathbb{K}$ – квадрант плоскости (первый или четвертый), – как обычно, такая область получается в результате растяжения координат в ε^{-1} раз и формального перехода к $\varepsilon = 0$. Исследование разрешимости названной задачи и асимптотики ее решений на бесконечности не проводилось (ср. близкую по тематике работу [48]) и поэтому построение младших асимптотических членов в разложении решения (8) задачи (4), (5) встречает серьезные затруднения и остается важным открытым вопросом.

Вместе с тем обоснование главных членов асимптотик (23), (27) и (26) не требует информации о младших членах. В некритическом случае оно достаточно просто, так как функция $u^{\varepsilon}_{\text{as}}$, заданная формулами (24) в рукавах $\Pi^0_{\pm}$ и (30) на перемычке Θ^{ε}, была сделана непрерывной и удовлетворяющей задаче (4), (5) всюду, кроме прямоугольников $\gamma^{\varepsilon}_{\pm}$, на которых ее производные по переменной x_3 имеют ограниченные скачки $J^{\varepsilon}_{\pm}$. В результате разность $\mathcal{U}^{\varepsilon} = u^{\varepsilon} - u^{\varepsilon}_{\text{as}} \in H^1_{loc}(\overline{\Omega}_{\varepsilon})$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\left(\nabla_x \mathcal{U}^{\varepsilon}, \nabla_x \mathcal{V}^{\varepsilon}\right)_{\Omega^{\varepsilon}} - \omega^2\left(\mathcal{U}^{\varepsilon}, \mathcal{V}^{\varepsilon}\right)_{\Omega^{\varepsilon}} = \mathcal{F}^{\varepsilon}\left(\mathcal{V}^{\varepsilon}\right) \quad \forall \mathcal{V}^{\varepsilon} \in W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon}) \tag{67}$$

с непрерывным (анти)линейным функционалом $\mathcal{F}^{\varepsilon}$ в правой части,

$$\mathcal{F}^{\varepsilon}\left(\mathcal{V}^{\varepsilon}\right) = \sum_{\pm} \int_{\gamma^{\varepsilon}_{\pm}} \overline{\mathcal{V}^{\varepsilon}(x', \pm L)} J^{\varepsilon}_{\pm}(x') dx'. \tag{68}$$

При этом $\beta \in \left(0, \sqrt{\omega_1(\varpi)^2 - \omega^2}\right)$ и $\tau \in (-1, 0)$ – весовые показатели, а $W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon})$ – пополнение линейного множества $C^{\infty}_c(\overline{\Omega}_{\varepsilon})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по весовой норме

$$\left\|\mathcal{V}^{\varepsilon}; W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon})\right\| = \left(\int_{\Omega^{\varepsilon}} e^{2\beta|x_1|}\left(s^{\tau}_{1,\varepsilon}(x)|\nabla_x \mathcal{V}^{\varepsilon}(x)|^2 + s^{\tau}_{0,\varepsilon}(x)|\mathcal{V}^{\varepsilon}(x)|^2\right) dx\right)^{1/2},$$

а весовые множители $s^{\tau}_{j,\varepsilon}$ заданы формулами

$$s^{\tau}_{1,\varepsilon}(x) = \begin{cases} (\varepsilon + \min\{1, r_{\pm}\})^{2\tau}, & x \in \Pi^{\varepsilon}_{\pm}, \\ \varepsilon^{2\tau}, & x \in \Theta^{\varepsilon}, \end{cases} \qquad s^{\tau}_{0,\varepsilon}(x) = \begin{cases} (\varepsilon + \min\{1, r_{\pm}\})^{2\tau-2}, & x \in \Pi^{\varepsilon}_{\pm}, \\ \varepsilon^{2\tau}(\varepsilon + L^{\varepsilon} - |y_1|)^{-2}, & x \in \Theta^{\varepsilon}, \end{cases}$$

и согласованы по порядку при подходе из перемычки и из рукавов к зоне их соединения.

Функции из пространства $W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon})$ исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, и поэтому решение задачи (67) ищется в классе $W^{1,\varepsilon}_{-\beta,-\tau}(\Omega^{\varepsilon})$ функций с некоторым экспоненциальным ростом на бесконечности. Вместе с тем носитель функционала (68) компактен, а значит, этот функционал попадает в сопряженное пространство $W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon})^*$. Таким образом, общие результаты монографии [2; гл. 5] (см. также статьи [49], [50] и др.) показывают, что решение, подчиненное условиям излучения

$$\mathcal{U}^{\varepsilon}(x) = \chi_-(x_1)\mathcal{R}^{\varepsilon} e^{-i\omega(x_1 + L^{\varepsilon})} + \chi_+(x_1)\mathcal{T}^{\varepsilon} e^{+i\omega(x_1 - L^{\varepsilon})} + \widetilde{\mathcal{U}}^{\varepsilon}(x),$$

обладает экспоненциально затухающим ($\beta > 0$) остатком, становится единственным (захваченных волн нет) и допускает оценку

$$\left\| \widetilde{\mathcal{U}}^{\varepsilon}; W^{1,\varepsilon}_{\beta,-\tau}(\Omega^{\varepsilon}) \right\| + |\mathcal{R}^{\varepsilon}| + |\mathcal{T}^{\varepsilon}| \leq c_{\varepsilon} \left\| \mathcal{F}^{\varepsilon}; W^{1,\varepsilon}_{\beta,\tau}(\Omega^{\varepsilon})^{*} \right\|. \tag{69}$$

Множитель c_{ε}, вообще говоря, зависит от малого параметра ε, но развитая в работе [40] техника весовых пространств с отделенной асимптотикой (см. также [43], [2]) доказывает, что в некритическом случае (22) этот множитель равномерно ограничен относительно параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$. Наконец, очевидная оценка функционала (68)

$$|\mathcal{F}^{\varepsilon}(\mathcal{V}^{\varepsilon})| \leq c \sum_{\pm} |\gamma^{\varepsilon}_{\pm}|^{1/2} \left\| \mathcal{V}^{\varepsilon}; L^2(\gamma^{\varepsilon}_{\pm}) \right\| \leq c\varepsilon^{1/2} \left\| \mathcal{V}^{\varepsilon}; L^2(\gamma^{\varepsilon}_{-} \cup \gamma^{\varepsilon}_{+}) \right\|$$

вместе с обычным следовым неравенством (см., например, [45])

$$\left\| \mathcal{V}^{\varepsilon}; L^2(\gamma^{\varepsilon}_{-} \cup \gamma^{\varepsilon}_{+}) \right\| \leq c\varepsilon^{1/2} \left(\left\| \nabla_x \mathcal{V}^{\varepsilon}; L^2(\Theta^{\varepsilon}) \right\| + \left\| (\varepsilon + L^{\varepsilon} - |y_1|)^{-1} \mathcal{V}^{\varepsilon}; L^2(\Theta^{\varepsilon}) \right\| \right)$$

предоставляет мажоранту $c\varepsilon^{\tau+1/2}$ для правой части (69). Поскольку левая часть (69) содержит модули коэффициентов рассеяния $\mathcal{R}^{\varepsilon} = R^{\varepsilon} - R^0$ и $\mathcal{T}^{\varepsilon} = T^{\varepsilon} - T^0$, получаем оценку асимптотических остатков в представлениях (11) коэффициентов отражения и прохождения волны (8):

$$|\widetilde{R}^{\varepsilon}| + |\widetilde{T}^{\varepsilon}| \leq c\varepsilon^{\delta} \quad \forall \delta < 1. \tag{70}$$

В критическом случае (43) требуется модификация рассуждений и выкладок из [40], в частности, областью определения оператора задачи (67) объявляется пространство функций, представимых в виде

$$\mathcal{U}^{\varepsilon}(x) = \mathcal{U}^{\varepsilon}_0(x) + \varepsilon^{-1} a^{\varepsilon} \mathcal{X}^{\varepsilon}(x_1) \sin(\omega(x_1 + L)) \tag{71}$$

и имеющих норму $\inf \left(\left\| \mathcal{U}^{\varepsilon}_0; W^{1,\varepsilon}_{\beta,-\tau}(\Omega^{\varepsilon}) \right\| + |a^{\varepsilon}| \right)$, причем инфимум вычисляется по всем представлениям (71), а $\mathcal{X}^{\varepsilon}$ – гладкая срезающая функция,

$$\mathcal{X}^{\varepsilon}(x_1) = 1 \quad \text{при} \quad |x_1| > L^{\varepsilon} + 2\varepsilon, \quad \mathcal{X}^{\varepsilon}(x_1) = 0 \quad \text{при} \quad |x_1| < L^{\varepsilon} + \varepsilon. \tag{72}$$

Появление в (71) дополнительного слагаемого с собственной функцией задачи (12)–(14), локализованного на перемычке Θ^{ε} благодаря множителю (72) и гладко продолженного на рукава $\Pi^{\varepsilon}_{\pm}$, согласуется с анзацем (43). Поэтому более сложная конструкция приближенного решения задачи (4), (5) приводит к прежней оценке (70) остатков в асимптотических формулах (10) и (63) для коэффициентов рассеяния из (8), а значит, действительно наблюдается почти полное прохождение поршневых мод (6). Именно упомянутые формулы представляют собой основной асимптотический результат работы.

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ, ДОСТУПНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

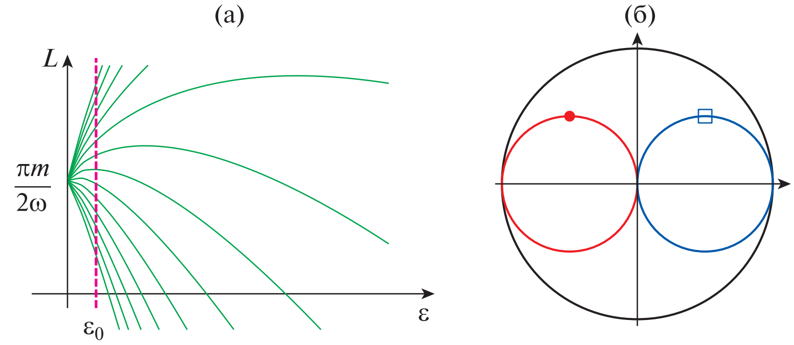
1°. Можно изменить постановку вопроса: зафиксировать длину $L > 0$ перемычки и отыскивать частоты $\omega^{\varepsilon}_m \in (0, \omega_1(\varpi))$, при которых происходит почти полное прохождение волны. Эти частоты находятся по формуле

$$\omega^{\varepsilon}_m = \frac{\pi}{2} \frac{m}{L} \left(1 + \frac{\varepsilon}{L} \left(\frac{1}{\pi} |\ln \varepsilon| + C_{\Xi} + \overline{u}^{\bullet} + O(\varepsilon^{3/2}) \right) \right), \tag{73}$$

где m – натуральное число на интервале $(0, 2L)$. Если $L < (2\omega_1(\varpi))^{-1}\pi$, то критических частот (73) не существует.

2°. Пусть точная настройка (61) приращения длины перемычки (7) нарушена, т.е.

$$L' = t - \pi^{-1} |\ln \varepsilon| - C_{\Xi} - \overline{\mathbf{u}}^{\bullet} \quad \text{при} \quad t \neq 0.$$



Фиг. 3. Графики длин канала при разных значениях параметра $t \in \mathbb{R}$ (а). Окружности (помечены символами ● и □), заметаемые главными членами коэффициентов рассеяния $T^0(t)$ и $R^0(t)$ при нечетном $m \in \mathbb{N}$ (б).

Графики функций $\varepsilon \mapsto (2\omega)^{-1}\pi m + \varepsilon L'$ приведены на фиг. 3а. Решение алгебраической системы (57), (60) принимает вид

$$R^0(t) = 1 - \frac{b}{b - it}, \quad T^0(t) = \frac{(-1)^m b}{b - it}, \quad a(t) = -\frac{1}{t + ib}, \quad \text{где} \quad b = \frac{2\ell}{|\varpi|}. \tag{74}$$

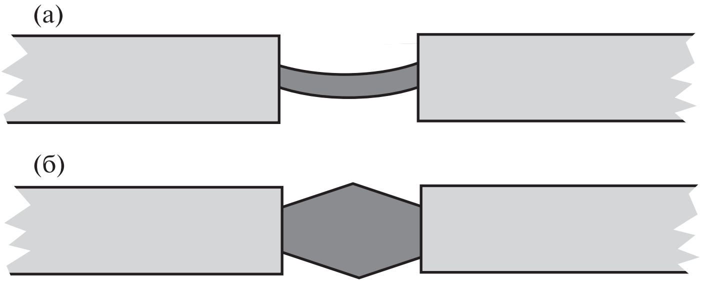
Кривые $\{R^0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ и $\{R^0(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, изображенные на фиг. 3б, показывают, что главные асимптотические члены коэффициентов отражения R^ε и прохождения T^ε при приращении εt длины L^ε канала двигаются вдоль окружностей с радиусом $\frac{1}{2}$ и соответственно с центрами в точках $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}(-1)^m$ на вещественной оси. В частности, формулы (74) поясняют, как при изменении длины перемычки (в быстром масштабе $\varepsilon^{-1}(1 + |\ln\varepsilon|)^{-1}$) почти полное прохождение поршневой моды трансформируется в ее почти полное отражение:

$$R^0(0) = 0, \quad T^0(0) = (-1)^m, \quad \text{но} \quad \lim_{t\to\pm\infty} R^0(t) = 1, \quad \lim_{t\to\pm\infty} T^0(t) = 0.$$

Подчеркнем, что в случае $L' = 0$, т.е. при невозмущенной критической длине $L^\varepsilon = \pi m/2\omega$ соотношения (11) приобретают остатки $\widetilde{R}^\varepsilon, \widetilde{T}^\varepsilon = O((1 + |\ln\varepsilon|)^{-1})$, т.е. эффект почти полного отражения сохраняется, правда, с бóльшими погрешностями.

3°. Разработанные процедуры нуждаются в переработке при рассмотрении частот ω выше первой положительной точки отсечки $\omega_1(\varpi)$ непрерывного спектра, в частности, потому, что помимо поршневых мод возникают другие уходящие волны в каждом из рукавов (1), и приходится искать асимптотики нескольких коэффициентов рассеяния, главным членам которых требуется придать вполне определенные значения (возможность сделать это – сложная алгебраическая задача). Остается совершенно открытым вопрос о возможности обеспечить почти полное прохождение двух разных волн, приходящих с бесконечности в рукаве Π_-^ε. При этом обращение в нуль всех коэффициентов отражения вовсе не означает почти полное прохождение какой-либо волны из-за перераспределения энергии между несколькими волнами в "принимающем" рукаве Π_+^ε.

4°. Благодаря симметрии волновода Ω^ε относительно плоскости $\{x : x_1 = 0\}$ можно не только сделать малым коэффициент отражения R^ε, но и обратить его в нуль, т.е. добиться полного прохождения поршневой моды через тонкий канал Θ^ε. Для этой цели пригодна схема, разработанная в [51], [23] и предлагающая представить поле (8) как сумму $u_D^\varepsilon + u_N^\varepsilon$ решений задач в половине $\Omega_+^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : x_1 > 0\}$ волновода (3) с искусственными условиями Дирихле и Неймана на малой усекающей поверхности $\{x \in \Theta^\varepsilon : x_1 = 0\}$. Функция u_D^ε гладко зависит от параметра L, так как при



Фиг. 4. Перемычка переменной толщины – вид сбоку (а). Перемычка с изломанным сечением – вид сверху (б).

нечетном m число $(2L)^{-2}\pi^2 m^2$ не является собственным для аналогичной (12)–(14) предельной двумерной задачи на половине $\theta_+ = \{y \in \theta : y_1 > 0\}$ прямоугольника θ. В то же время у решения u_N^ε сохраняется быстрая осцилляция коэффициента отражения, а значит, повторение аргументов из работ [51], [23] позволяет убедиться в том, что кривая $L \mapsto R^\varepsilon$ проходит через нуль при вариации полудлины L в малой окрестности ее критического значения L^ε.

5°. Представленный в статье асимптотический анализ годится и в случае тонкой перемычки переменной толщины (фиг. 4а) или искривленного продольного сечения (фиг. 4б)

$$\Theta^\varepsilon = \left\{x : y \in \theta, -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\right\}.$$

Здесь $H_\pm \in C^2(\overline{\theta})$ – профильные функции, $H = H_- + H_+ > 0$ в замыкании $\overline{\theta}$ области $\theta \in \mathbb{R}^2$, расположенной в полосе $\{y : |y_1| < L\}$ и ограниченной кусочно-гладким контуром $\partial\theta$, который состоит из отрезков $\gamma_\pm^0\{y : y_1 = \pm L, |y_2 - h_\pm| < \ell_\pm\}$ и замкнутых дуг, соединяющих пары точек $(-L, h_- \pm \ell_-)$ $(+L, h_+ \pm \ell_+)$. Разумеется, погружения названных отрезков на плоскости $\{x : x_3 = \pm L\}$ должны попасть вовнутрь торцов $\varpi_\pm$ полуцилиндров $\Pi_\pm^0$.

Если спектральный параметр ω^2 не является собственным значением предельной задачи (ее вывод несложен – см., например, [43; гл. 11])

$$-\nabla_y(H(y)\nabla_y v(y)) = \omega^2 H(y) v(y), \quad y \in \theta,$$

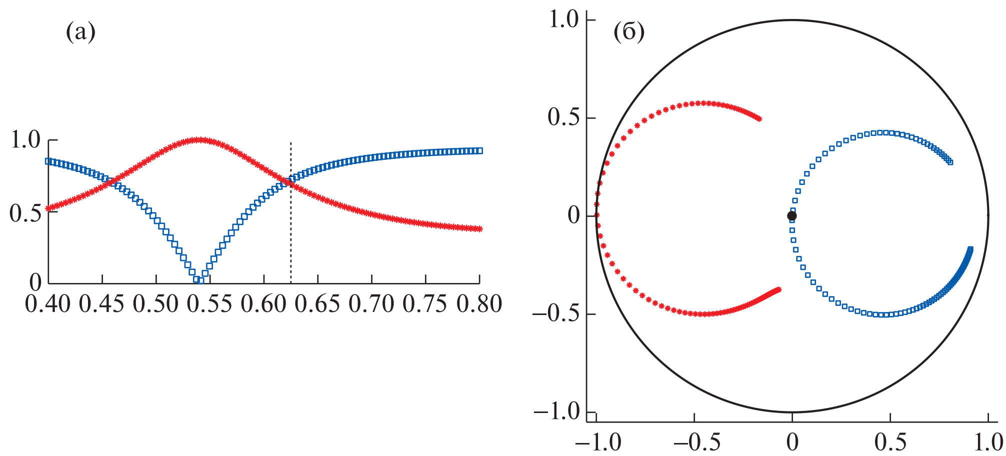
$$v(y) = 0, \quad y \in \gamma_\pm^0,$$

$$\partial_\nu v(y) = 0, \quad y \in \partial\theta \backslash (\gamma_-^0 \cup \gamma_+^0),$$

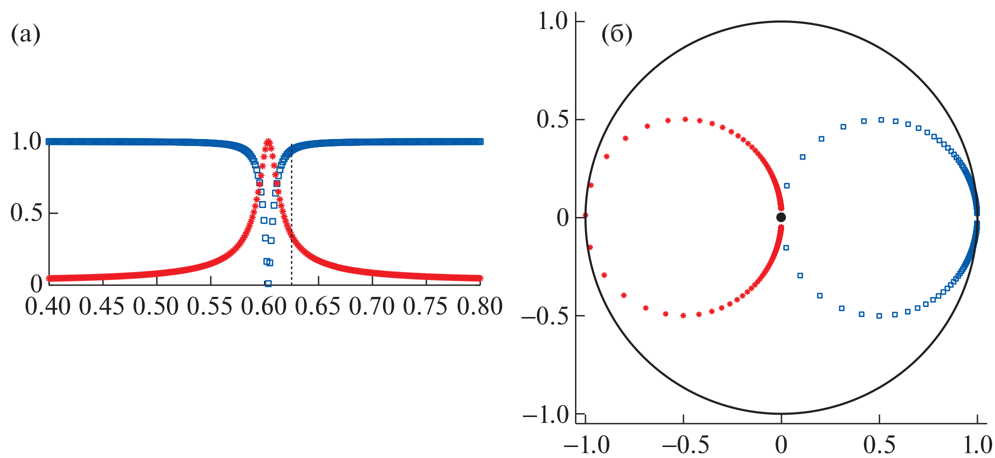
то построение асимптотики решения (8) задачи (4), (5) в целом следует схеме, изложенной в данной статье. Если же ω^2 – простое собственное число (критический случай), то асимптотические анзацы (23), (49) и (31) сохраняются, однако процедура "точной настройки", обеспечивающая почти полное прохождение волны w^+, усложняется существенно: в частности, около торцов полуцилиндров Π_-^ε и Π_+^ε могут потребоваться разные приращения длины перемычки Θ^ε.

6°. Если $\omega^2 = \mu_{jk}$ и μ_{jk} – собственное значение задачи (12)–(14) с индексом $j \geq 1$, но выполнено требование (22), то задача (12), (13), (28) с данными (29) разрешима, а значит, эффект почти полного прохождения отсутствует. Вместе с тем он может проявиться выше первой частоты отсечки, т.е. при $\omega > \omega_1(\varpi)$ для распространяющихся волн, отличных от поршневой. Такой феномен нуждается в отдельном изучении (ср. разд. 3°).

7°. На протяжении всей статьи считалось, что грани $\gamma_\pm^\varepsilon$ параллелепипеда (2) лежали строго внутри торцов полуцилиндров (1) – это сделано для унификации изложения. Вместе с тем при квадратном сечении $\varpi = \{x' : |x_2| < \ell, |x_3| < 1/2\}$ и канале (2) задача (4), (5) допускает разделение переменных и после исключения переменной x_2 сводится к задаче Неймана в двумерной области $\{x \in \Omega^0 : x_2 = 0\}$, содержащейся в единичной полосе (см. формулы (1)–(3) и фиг. 1б), в которой



Фиг. 5. Графики (а) модулей коэффициентов рассеяния $L \mapsto |R(L)|$ (□) и $L \mapsto |T(L)|$ (∗) при $\varepsilon = 0.2$, причем вертикальная штрихпунктирная линия относится к критическому значению $L = 0.603 \approx L_*$. Сами коэффициенты внутри единичного круга на комплексной плоскости (б).

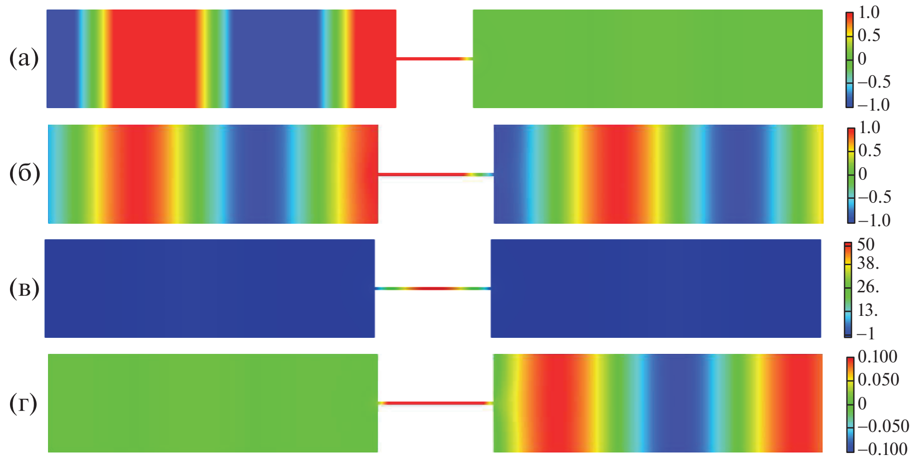


Фиг. 6. То же, что на фиг. 5, но при $\varepsilon = 0.02$.

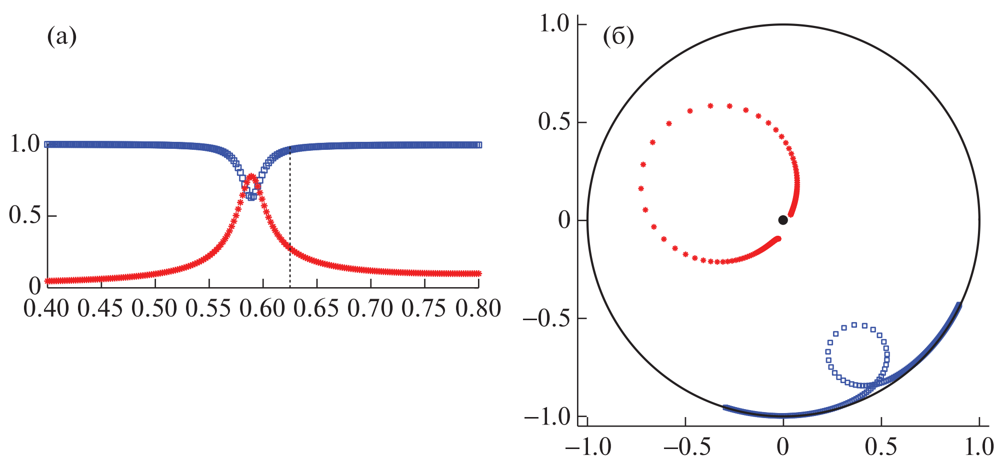
$\omega_1(\varpi) = \pi$. Для вычислений в усеченном волноводе применен P2-метод конечных элементов и на усекающих отрезках назначены прозрачные искусственные краевые условия с оператором Стеклова–Пуанкаре (Dirichlet-to-Neumann mapping), удерживая пятнадцать членов в разложении Фурье. При $\omega = 0.8\pi < \omega_1(\varpi)$ первая критическая полудлина равна $L_c = 0.625$ (ср. (17) и (43)). Коэффициенты рассеяния вычисляем по найденному решению при помощи соотношений

$$R^\varepsilon = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(u^\varepsilon(-H, x_3) - w^+(-H + L^\varepsilon)\right) w^+(-H + L^\varepsilon)dx_3, \quad T^\varepsilon = \int\limits_{-1/2}^{1/2} u^\varepsilon(+H, x_3)w^-(+H - L^\varepsilon)dx_3,$$

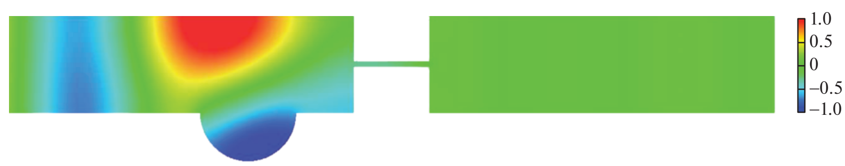
где $H > L$. На фиг. 5 и 6 представлены коэффициенты рассеяния для полудлин L из интервала $(0.4, 0.8) \ni L_c$, причем $\varepsilon = 0.2$ на фиг. 5 и $\varepsilon = 0.02$ на фиг. 6. Как предсказал асимптотический анализ, для большинства рассмотренных значений L коэффициент прохождения $T(L)$ близок к нулю, однако для некоторого L_* наблюдается эффект почти полного прохождения поршневой моды, причем $L_* < L_c$ и можно уточнить значение L_* так, чтобы обеспечить условие $R(L_*) = 0$ полного прохождения поршневой моды. Более того, изменяемость коэффициентов рассеяния увеличивается при уменьшении ε, а также $L^\varepsilon \to L_c$ при $\varepsilon \to +0$.



Фиг. 7. (а) – функция $\mathrm{Re}\,u^\varepsilon$ при $L = 0.4$, (б), (в) – соответственно $\mathrm{Re}\,u^\varepsilon$ и $\mathrm{Im}\,u^\varepsilon$ при $L = 0.603 \approx L_*$, (г) – рассеянное поле $\mathrm{Re}(u^\varepsilon - w^+)$ при $L = 0.603 \approx L_*$. Всюду $\varepsilon = 0.02$.



Фиг. 8. (а) – графики модулей коэффициентов рассеяния $L \mapsto |R(L)|$ ($\square$) и $L \mapsto |T(L)|$ ($*$), причем вертикальная штрихпунктирная линия относится к критическому значению $L = 0.603 \approx L_*$, (б) – сами коэффициенты внутри единичного круга на комплексной плоскости.



Фиг. 9. Поле $\mathrm{Re}\,u^\varepsilon$ при $L = 0.4$ и $\varepsilon = 0.05$ для асимметричного волновода.

На фиг. 7 представлены конкретные вычисления поля u^ε при $\varepsilon = 0.02$ в случае общего положения, для которого коэффициент прохождения близок к нулю, и при $L \approx L_*$. В последнем случае действительно рассеянное поле экспоненциально затухает при $x_1 \to -\infty$, причем в согласии с формулами (49), (50) и (63) внутри канала Θ^ε величина $\mathrm{Re}\,u^\varepsilon$ приобрела порядок $\varepsilon^{-1} = P$.

Фиг. 8 включает те же графики коэффициентов рассеяния при $L \in (0.4, 0.8)$, что и на фиг. 5, однако для несимметричного волновода, схематично изображенного на фиг. 9 и не обладающего симметрией относительно оси ординат. Последнее обстоятельство не позволяет применить изложенный ранее асимптотический анализ. На фиг. 8 видно, что модуль коэффициента отражения существенно отличен от нуля, т.е. эффект почти полного прохождения, вообще говоря, отсутствует при потере волноводом симметрии. Вместе с тем результат вычислений на фиг. 9 подсказывает, что, возможно, симметрия все-таки не нужна для достижения полного прохождения волны, однако сделать этот вывод на основе асимптотического анализа не удается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
2. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
3. *Вайнштейн Л.А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966.
4. *Shanin A.V.* Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation // SIAM J. Appl. Math. 2009. V. 70. P. 1201–1218.
5. *Назаров С.А.* Аномалии рассеяния в резонаторе выше порогов непрерывного спектра // Матем. сборник. 2015. Т. 206. № 6. С. 15–48.
6. *Korolkov A.I., Nazarov S.A., Shanin A.V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. № 10. P. 1245–1260.
7. *Shanin A.V., Korolkov A.I.* Diffraction of a mode close to its cut-off by a transversal screen in a planar waveguide // Wave Motion. 2017. V. 68. P. 218–241.
8. *Корольков А.И., Шанин А.В.* Дифракция на решетке из поглощающих экранов разной высоты. Новые уравнения // Зап. научн. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 2014. Т. 422. С. 62–89.
9. *Назаров С.А.* О прохождении волн через малое отверстие в перегородке акустического волновода // Сибирск. матем. журнал. 2018. Т. 59. № 1. С. 110–129.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № . P. 718–752.
12. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resomamnces for waveguide junctions // J. of Math. Anal. and Appl. 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
13. *Fano U.* Effects of configuration interaction on intensities and phase shifts // Physical Review. 1961. V. 124. № 6. P. 1866–1878.
14. *Duan Y., Koch W., Linton C.M., McIver M.* Complex resonances and trapped modes in ducted domains // J. Fluid. Mech. 2007. V. 571. P. 119–147.
15. *Cattapan G., Lotti P.* Fano resonances in stubbed quantum waveguides with impurities // Eur. Phys. J. B. 2007. V. 60. № 1. P. 51–60.
16. *El Boudouti E.H., Mrabti T., Al-Wahsh H., Djafari-Rouhani B., Akjouj A., Dobrzynski L.* Transmission gaps and Fano resonances in an acoustic waveguide: analytical model // J. Phys. Condens. Matter. 2008. V. 20. № 25. 255212.
17. *Hohage T., Nannen L.* Hardy space infinite elements for scattering and resonance problems // SIAM J. Numer. Anal. 2009. V. 47. № 2. P. 972–996.
18. *Hein S., Koch W., Nannen L.* Trapped modes and Fano resonances in two-dimensional acoustical duct-cavity systems // J. Fluid. Mech. 2012. V. 692. P. 257–287.
19. *Shipman S.P., Venakides S.* Resonant transmission near nonrobust periodic slab modes // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 2. 026611.
20. *Shipman S.P., Tu H.* Total resonant transmission and reflection by periodic structures // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72. № 1. P. 216–239.
21. *Shipman S.P., Welters A.T.* Resonant electromagnetic scattering in anisotropic layered media // J. Math. Phys. 2013. V. 54. № 10. 103511.
22. *Abeynanda G.S., Shipman S.P.* Dynamic resonance in the high-Q and near-monochromatic regime // 2016. MMET, IEEE, 10.1109, MMET. 7544100.
23. *Chesnel L., Nazarov S.A.* Non reflection and perfect reflection via Fano resonance in waveguides // Comm. Math. Sci. 2018. V. 16. № 7. P. 1779–1800.
24. *Kriegsmann G.A.* Complete transmission through a two-dimensional difffraction grating // SIAM J. Appl. Math. 2004. V. 65. № 1. P. 24–42.
25. *Bonnetier É., Triki F.* Asymptotic of the Green function for the diffraction by a perfectly conducting plane perturbed by a sub-wavelength rectangular cavity // Math. Method. Appl. Sci. 2010. V. 33. № 6. P. 772–798.

26. *Lin J., Zhang H.* Scattering and field enhancement of a perfect conducting narrow slit // SIAM J. Appl. Math. 2017. V. 77. № 3. P. 951–976.
27. *Lin J., Zhang H.* Scattering by a periodic array of subwavelength slits I: field enhancement in the diffraction regime // Multiscale Model. Sim. 2018. V. 16. № 2. P. 922–953.
28. *Lin J., Shipman S., Zhang H.* A mathematical theory for Fano resonance in a periodic array of narrow slits // arXiv preprint arXiv:1904.11019, 2019.
29. *Beale J.T.* Scattering frequencies of resonators // Comm. Pure Appl. Math. 1973. V. 26. № 4. P. 549–563.
30. *Арсеньев А.А.* О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 3. С. 718–724.
31. *Гадыльшин Р.Р.* О собственных частотах тел с тонкими отростками. I // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 10–21.
32. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1994. V. 8. № 2. P. 105–143.
33. *Назаров С.А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1 // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 18. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 3–78.
34. *Назаров С.А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 18. М.: Изд-во МГУ, 1997. С. 155–195.
35. *Назаров С.А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 24. М.: Изд-во МГУ, 2004. С. 95–214.
36. *Гадыльшин Р.Р.* О собственных значениях "гантели с тонкой ручкой" // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69. № 2. С. 45–110.
37. *Joly P., Tordeux S.* Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion // SIAM Multiscale Model. Simul. 2006. V. 5. № 1. P. 304–336.
38. *Бахарев Ф.Л., Назаров С.А.* Лакуны в спектре волновода, составленного из областей с различными предельными размерностями // Сибирск. матем. журнал. 2015. Т. 56. № 4. С. 732–751.
39. *Bonnet-Ben Dhia A.-S., Chesnel L., Nazarov S.A.* Perfect transmission invisibility for waveguides with sound hard walls // J. Math. Pures Appl. 2018. V. 111. P. 79–105.
40. *Chesnel L., Nazarov S.A., Taskinen J.* Surface waves in a channel with thin tunnels at the bottom: non-reflecting underwater topography // Asymptotic Analysis. 2020. V. 118. № 1. P. 81–122.
41. *Ван Дайк М.Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
42. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
43. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 1 & 2. Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
44. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
45. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
46. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Труды Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
47. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence: Amer. Math. Soc., 1997.
48. *Назаров С.А.* Задача Неймана в угловых областях с периодическими и параболическими возмущениями границы // Труды Московск. матем. общества. 2007. Т. 69. С. 183–243.
49. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теор. и матем. физ. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
50. *Назаров С.А.* Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
51. *Chesnel L., Nazarov S.A., Pagneux V.* Invisibility and perfect re ectivity in waveguides with nite length branches // SIAM J. Appl. Math. 2018. V. 78. № 4. P. 2176–2199.