ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 4, с. 684–688

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.951

ВИХРЕВЫЕ ФАНТОМЫ В СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ О ПРОТЕКАНИИ КОЧИНА–ЮДОВИЧА[1)]

© 2021 г. О. В. Трошкин

117218 Москва, Нахимовский пр-т, 36, кор. 1, ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

e-mail: troshkin1955@mail.ru

Поступила в редакцию 04.06.2020 г.
Переработанный вариант 04.06.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Впервые увиденным в ярких вспышках света и обусловленным большим числом Рейнольдса спонтанным появлением нестационарных вихрей турбулентности, неизменно выравнивающих параболический профиль скорости в трубе, динамика сплошной среды отнюдь не исчерпывается. В окружающем пространстве наблюдаемы также и стационарные смерчи, и водовороты, приближаемые обычно аналитическими зависимостями, разложимыми в степенные ряды. Вопрос же о существовании, пусть сколь угодно гладкого, но не аналитического, а стало быть фантомного, т.е. классически уже не приближаемого полиномами с какой-либо заданной степенью точности, или, словом, точно не вычисляемого, но устанавливаемого со временем стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости в граничной задаче о протекании Кочина–Юдовича, как оказалось, тоже сводится к такого же рода вихрям, конкретно, к нахождению их бесконечно гладкого невычисляемого массового расхода как функции тока, разрешающей двумерную задачу Дирихле для отрицательного оператора Лапласа, с правой частью – бесконечно гладкой срезкой Соболева, известной еще в 30-х годах 20-го века, ставшей по ее окончанию сглаживателем Фридрихса. Эта задача кратко обсуждается ниже. Библ. 14. Фиг. 1.

Ключевые слова: стационарные гидродинамические уравнения Эйлера, задача о протекании Кочина–Юдовича, фантомные вихри неединственности.

DOI: 10.31857/S0044466921040128

1. ГЛАДКО ВМОРОЖЕННЫЕ ВИХРИ

Принимая во внимание срезку Соболева [1] и сглаживатель Фридрихса [2] и задавшись прямоугольником и достаточно малым расстоянием,

$$V : |x| < l, \quad 0 < y < h, \quad \varepsilon < \min\left(l, h/2\right) \quad \text{для} \quad l, h, \varepsilon = \text{const} > 0,$$

рассмотрим плоскопараллельное стационарное поле скоростей несжимаемой жидкости,

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega = -\Delta\psi = -\psi_{xx} - \psi_{yy},$$

из линий уровня $\psi(x, y) = \text{const}$ массового расхода, или функции тока ψ Дезина [3],

$$\psi = Uh\exp\frac{\varepsilon^2}{r^2 - \varepsilon^2} \quad \text{или} \quad \psi = 0 \quad \text{для} \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \quad \text{или} \quad r \geq \varepsilon,$$

соответственно, образующей плоский вихрь, как бы вмороженный в покоящуюся сплошную среду бесконечно гладкого линейного многообразия (см. [4])

$$C_0^\infty = \left\{\psi \in C^\infty = C^\infty(\bar{V}) : \psi|_{\partial V} = 0\right\}.$$

[1)]Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (фундаментальные научные исследования, ГП 14) по теме № 0065-2019-0005 “Математическое моделирование динамических процессов в деформируемых и реагирующих средах с использованием многопроцессорных вычислительных систем” (№ АААА-А19-119011590092-6).

Другой пример вмороженного вихря доставляет нетривиальное решение $\psi = \psi(x,y) > 0$, $(x,y) \in V$, граничной задачи

$$-\Delta\psi = f(\psi) = 1 - e^{-1/\psi^2} \quad \text{в} \quad V \quad \text{для} \quad \psi \in C_0^\infty \quad \text{и} \quad \psi \neq 0, \tag{1}$$

где строгий принцип максимума $-\Delta\psi > 0$ при $\psi \in C_0^\infty$ (см. [5]) влечет $\psi > 0$ в V.

Разрешимость же задачи (1) гарантирует отрицательная производная

$$f_\psi = \left(-e^{-1/\psi^3}\right)_\psi = -2e^{-1/\psi^3}/\psi^3 < 0, \quad \psi \neq 0,$$

что для гильбертовых норм

$$\|\nabla\varphi\| = \sqrt{\langle|\nabla\varphi|^2\rangle} \quad \text{и} \quad \|\varphi\| = \sqrt{\langle\varphi^2\rangle} \quad \text{при} \quad \langle\varphi\rangle = \int_V \varphi dV \quad \text{и} \quad dV = dxdy,$$

предполагает как положительную определенность квадратичной формы

$$(E''\varphi,\varphi) = \|\nabla\varphi\|^2 - \langle f_\psi\varphi^2\rangle \geq \|\nabla\varphi\|^2 \geq \lambda_{\min}\|\varphi\|^2, \quad \lambda_{\min} = \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2,$$

повторного дифференциала Фреше [6], так и, по известным конструкциям Соболева [7, § 16], наличие минимума ψ у функционала

$$E = E[\psi] = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|^2 - \int_0^\psi f(\tau)d\tau,$$

в его критической точке ψ, в замыкании

$$W^1 = \left\{\psi : \lim_{n\to\infty}\|\nabla\psi_n - \nabla\psi\| = 0,\ \psi_n \in C_0^\infty\right\}$$

пространства C_0^∞, обобщенно разрешающей задачу (1),

$$(E',\varphi) = \langle\nabla\psi\cdot\nabla\varphi\rangle - \langle f(\psi)\varphi\rangle = 0 \quad \text{для любой} \quad \varphi \in C_0^\infty \subset W^1$$

и обладающей к тому же требуемой гладкостью, $\psi \in C_0^\infty$, обеспечиваемой как необходимыми приграничными оценками [8], так и тождеством

$$\langle\nabla\psi\cdot\nabla\varphi\rangle = -\langle\varphi\Delta\psi\rangle \quad \text{при} \quad \psi \in C_0^\infty.$$

2. ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ ВИХРИ ПРОСТОГО ПРОТЕКАНИЯ

В подвижной стационарной жидкой среде вмороженные вихри превращаются в точно невычисляемые, но сколь угодно гладкие вихревые фантомы бесконечно гладкого неаналитического расхода ψ и завихренности ω, по-прежнему связанные лапласианом и скалярным коммутатором в области течения,

$$-\Delta\psi = v_x - u_y = \omega \quad \text{и} \quad [\psi,\omega] = \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = u\omega_x + v\omega_y = 0 \quad \text{в} \quad V, \tag{2}$$

что и обеспечивает выполнение соотношений (1) для $\omega = f(\psi)$.

Взяв теперь в роли такой области канал V с непроницаемыми стенками $y = 0, h$ и постоянной завихренностью ω на участке втекания $x = -l$ границы ∂V, приходим к следующей граничной задаче Кочина–Юдовича [9], в ее стационарной постановке [10], [11] для (2),

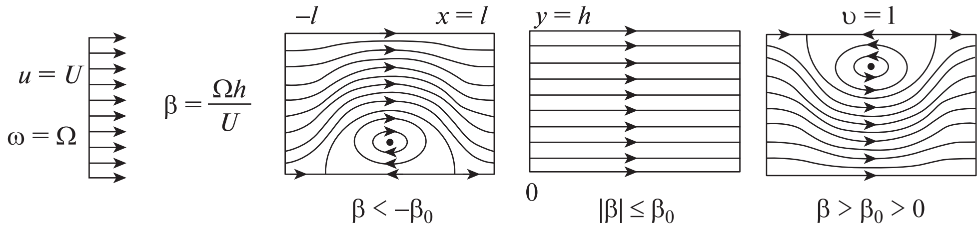
$$\omega|_{x=-l} = \Omega = \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad u|_{x=\mp l} = U = \text{const} > 0 \quad \text{и} \quad v|_{y=0,h} = 0. \tag{3}$$

Как известно [10], последняя обладает единственным аналитическим решением из

$$\omega = \Omega \quad \text{и} \quad \psi = \psi_* = Uy + \Omega h\Phi + \text{const} \quad \text{для} \quad -\Delta\Phi = 1/h \quad \text{в} \quad V \quad \text{и} \quad \Phi|_{\partial V} = 0,$$

одиночный вихрь которой с расходом Φ оказывается симметричным,

$$\Phi(-x,y) = \Phi(x,y) = \Phi(x,h-y), \quad |x| \leq l, \quad 0 \leq y \leq h,$$



Фиг. 1. Картины аналитического течения (2), (3).

и, сверх того, выпуклым отдельно по x и y,

$$\Phi_{xx}, \Phi_{yy} < 0 \quad \text{в} \quad V \quad \text{при} \quad \Phi|_{\partial V} = 0.$$

Им же определяется число

$$\beta_0 = 1/\Phi_y(0,0) = -1/\Phi_y(0,h) > 0,$$

которое оказывается критическим значением безразмерного параметра

$$\beta = \frac{\Omega h}{U} \quad \text{для} \quad u(x,y) = u(-x,y) \le u(0,y) = U + \Omega h \Phi_y(0,y),$$

или для

$$u(0,0) = U(1 + \beta/\beta_0) \quad \text{и} \quad u(0,h) = U(1 - \beta/\beta_0),$$

как на фиг. 1.

3. ФАНТОМЫ ПРОСТОГО ПРОТЕКАНИЯ

Как и в покоящейся среде разд. 1, в простом протекании из разд. 2 каждый фантом возникает при нарушении принципа максимума

$$0 = \min_{\partial V} \psi \le \psi|_V \le \max_{\partial V} \psi = Uh$$

для секундного расхода ψ перемешиваемой жидкости в замыкании $\bar{V} = V + \partial V$ области течения V, т.е. при $|\beta| > \beta_0$, как выше на фиг. 1. Он как бы садится на вычисляемый аналитический вихрь, если регулируемый на участке втекания $x = -l$ секундный расход ψ в области течения V превосходит измеряемый на границе: $\max_V \psi > \max_{\partial V} \psi$ при $\beta > \beta_0$ либо $\min_V \psi < \min_{\partial V} \psi$ при $\beta < -\beta_0$.

Конкретно для задачи (2), (3) это происходит следующим образом.

Желаемое однозначное продолжение центрального условия

$$-\Delta\psi = \Omega \quad \text{с} \quad 0 \le \psi(-l, 0 \le y \le h) \le Uh \quad \text{на} \quad -\infty < \psi = \psi(x,y) < \infty \quad \text{в} \quad V$$

с участка втекания $x = -l$ на всю область стационарного течения V действительно возможно только для вычисляемых расходов, т.е. для аналитических функций тока $\psi = \psi_* \in C^*$ [10]. В классе же $C^\# = C^\infty \backslash C^*$ такое продолжение уже неединственно [11]:

$$-\Delta\psi = \omega = \Omega + \varepsilon\Omega \begin{cases} e^{Uh/(\psi_* - \psi)}, & \psi > \psi_*, \\ 0, \quad 0 \le \psi \le \psi_*, \\ e^{Uh/\psi}, & \psi < 0, \end{cases} \quad \text{в} \quad V, \quad (\psi - \psi_*)|_{\partial V} = 0, \quad |\beta| > \beta_0, \tag{4}$$

и, как и в разд. 1, приводит к нетривиальному решению

$$\psi = \psi_* + Uh\varphi, \quad \varphi > 0 \quad \text{для} \quad -\Delta\varphi = \frac{-\Delta\psi + \Delta\psi_*}{Uh} = \varepsilon\beta e^{-1/\varphi} \quad \text{в} \quad V, \quad \varphi|_{\partial V} = 0,$$

задачи (2), (4), или решению $\varphi \in C_0^{\#}$ задачи (4), поскольку производная

$$\left(\varepsilon\beta \exp\left(\frac{-1}{\varphi}\right)\right)_{\varphi} = \frac{\varepsilon\beta}{\varphi^2}\exp\left(\frac{-1}{\varphi}\right) > 0 \quad \text{при} \quad \beta > \beta_0 > 0,$$

и

$$\psi = \psi_* - Uh\varphi, \quad \varphi > 0 \quad \text{для} \quad -\Delta\varphi = \frac{\Delta\psi - \Delta\psi_*}{Uh} = -\varepsilon\beta e^{1/\varphi} \quad \text{в} \quad V, \quad \varphi|_{\partial V} = 0,$$

в альтернативном случае

$$\left(-\varepsilon\beta \exp\frac{1}{\varphi}\right)_{\varphi} = \frac{\varepsilon\beta}{\varphi^2}\exp\frac{1}{\varphi} < 0 \quad \text{при} \quad \beta < -\beta_0 < 0,$$

чтобы обеспечить положительную определенность квадратичной формы функционала задачи (4), как в разд. 1.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Включение ньютоновых вязкости и условий прилипания в простое протекание для плоского периодического канала [12], разумеется, избавит его от катастрофы неединственности стационарного течения, обусловленной рассмотренными выше фантомами, или пространственными вихревыми трубками, продолжаемыми, однако, вихревыми кольцами без закрутки [13], но с осевой симметрией [14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Новый метод решения задачи Коши для уравнений в частных производных нормального гиперболического типа // Матем. сб. 1936. Т. 1(43). № 1. С. 39–72. *S. Soboleff*. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations lineaires hyperboliques normales. Rec. Math. Mat. Sbornik. N.S., 1936, V. 1(43), No. 1. P. 39–72.
2. *Friedrichs K.O.* The identity of weak and strong extensions of differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 55. P. 132–151.
3. *Дезин А.А.* Об одном классе векторных полей. Комплексный анализ и его приложения. М.: Наука, 1978. С. 203–208. *Dezin A.A.* A class of vector fields // in “Complex analysis and its applications”. Moscow: Nauka, 1978. P. 203–208.
4. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач.М.: Наука, 1980. 207 с. *Dezin A.A.* Partial differential equations: An introduction to a general theory of linear boundary value problems. Springer, 1987. 161 p.
5. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971. 287 с. *Landis E.M.* Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type. Translation of Mathematical Monographs. US–Rhode Island–Providence: American Mathematical Society. 1997. V. 171. 203 p.
6. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems.–Amsterdam–Oxford: North–Holland Publ. Company, 1976. 402 p. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
7. *Sobolev S.L.* Some applications of functional analysis in mathematical physics. Translation of Mathematical Monographs. US–Rhode Island–Providence: American Mathematical Society, 1963. V. 7. 239 p. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. Изд. 3-е. 337 с.
8. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II // Comm. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. Iss. 4. P. 623–727. 1964. V. 17. Iss. 1. P. 35–92. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.
9. *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача протекания идеальной жидкости через заданную область // Матем. сб. 1964. Т. 64. С. 562–588. *Yudovich V. I.* A two-dimensional problem of unsteady flow of an ideal incompressible fluid across a given domain // Amer. Math. Soc. Translations. 1966. V. 57. P. 277–304.

10. *Трошкин О.В.* О топологическом анализе структуры гидродинамических течений // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. Вып. 4(262). С. 129–158. *Troshkin O.V.* Topological analysis of the structure of hydrodynamic flows // Russian Mathematical Surveys. 1988. V. 43. No. 4. P. 153–190.

11. *Трошкин О.В.* Двумерная задача о протекании для стационарных уравнений Эйлера // Матем. сб. 1989. Т. 180. В. 3. С. 354–374. *Troshkin O.V.* A two-dimensional flow problem for steady-state Euler equations // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1990. V. 66. No. 2. P. 363–382.

12. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с. *Ladyzhenskaya O.A.* The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. 2014 Reprint of 1963 Edition–NY: Gordon and Breach, 1969. 224 p.

13. *Moffatt H.K.* Generalised vortex rings with and without swirl // Fluid Dynamic Research. 1988. V. 3. P. 22–30.

14. *Troshkin O.V.* On Smooth Vortex Catastrophe of Uniqueness for Stationary Flows of an Ideal Fluid // Comput. Math. and Math. Phys. 2019. V. 59. No. 10. P. 1742–1752. *Трошкин О.В.* О гладкой вихревой катастрофе единственности стационарных течений идеальной жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 1803–1814.