ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 5, с. 696–705

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.61

ЗАМКНУТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО *J*-СОПРЯЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ И ФОРМУЛЫ СМЕЩЕНИЯ[1)]

© 2021 г. Э. Боццо[1,*], П. Диедда[2,], К. ди Фиоре[3,***]**

[1] Удине, Отделение математических, физических и компьютерных наук, университет Удине, Италия

[2] Падуа, Отделение математики им. Туллио Леви–Чивиты, Падуанский университет, Италия

[3] Рим, Отделение математики, Римский университет “Tor Vergata”, Италия

**e-mail: enrico.bozzo@uniud.it*

***e-mail: deidda@math.unipd.it*

****e-mail: difiore@mat.uniroma2.it*

Поступила в редакцию 24.11.2020 г.
Переработанный вариант 24.11.2020 г.
Принята к публикации 14.01.2021 г.

Вводится понятие J-эрмитовости матрицы как обобщение классической эрмитовости, и, более общо, замкнутости множества матриц относительно J-сопряжения. Многие известные алгебры, такие как нижние и верхние тёплицевы, циркулятные и τ-матрицы, а также некоторые алгебры, чья размерность больше размера матриц, оказываются замкнутыми относительно J-сопряжения. В качестве приложения мы обобщаем теоремы о смещенных разложениях в предположении о замкнутости алгебры относительно J-сопряжения. Несмотря на то что предположение о структуре не является необходимым для алгебр, порожденных одной матрицей, было показано, что вышеупомянутый результат приводит к формулам смещения низкой сложности для алгебр, которые не порождаются одним элементом. Библ. 11.

Ключевые слова: матричные алгебры, матричный анализ, формулы смещения.

DOI: 10.31857/S0044466921050057

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые важные классы матриц характеризуются в терминах такого оператора $\mathfrak{L}$, что для любой матрицы A из заданного класса ранг матрицы $\mathfrak{L}(A)$ (который называется рангом смещения матрицы A) достаточно мал. Формула смещения позволяет выразить исходную матрицу A как сумму произведений матриц, принадлежащих двум структурированным матричным алгебрам, причем количество слагаемых совпадает с рангом смещения матрицы A.

Известны формулы, позволяющие разложить семейства матриц, расширяющие классы тёплицевых, ганкелевых, сумм тёплицевых и ганкелевых матриц, а также матриц Вандермонда, в короткие суммы произведений нижних и верхних тёплицевых, циркулянтных, и τ-матриц. Соответствующие формулы смещения можно найти в [1]–[8].

Матричные алгебры, использующиеся в формулах смещения, обладают свойствами симметричности, эрмитовости или персимметричности. Для обобщения перечисленных свойств мы вводим и исследуем понятия J-эрмитовости матрицы и замкнутости матричной алгебры относительно J-сопряжения. Они естественно обобщают классическое понятие эрмитовости матриц. В качестве приложения мы приводим теорему о формулах смещения с использованием алгебр, замкнутых относительно J-сопряжения. Она обобщает теоремы о формулах смещения в [1], [2], поскольку предположения о симметричности или персимметричности матриц алгебры содержатся в предположении о замкнутости относительно J-сопряжения. На самом деле, для алгебр, чьи элементы суть полиномы от фиксированной циклической матрицы (матрицы, мини-

[1)]К. ди Фиоре выражает благодарность за частичное финансирование итальянскому исследовательскому институту INdAM–GNCS и проекту Отдела передового опыта Министерства просвещения, университетов и научных исследований Италии, предоставленному Отделению математики Римского университета “Tor Vergata”, CUP E83C18000100006.

мальный многочлен которой совпадает с характеристическим), в [3] было показано, что ограничения на структуру алгебры не нужны. Однако из нашей теоремы следуют формулы низкой сложности, связанные с алгебрами, которые не порождаются одним элементом. Более того, алгебры, использованные в [9], имеют размерность большую, чем размер матриц, что может быть использовано для уменьшения числа слагаемых в формуле смещения. Эти алгебры являются замкнутыми относительно J-сопряжения, но не порождаются одним элементом. Мы планируем обобщить теорему для работы с подобными алгебрами.

В разд. 2 вводится понятие J-эрмитовости, и показывается, каким образом оно обобщает классическую эрмитовость. В разд. 3 мы исследуем свойства алгебр, замкнутых относительно J-сопряжения, и показываем, что многие известные алгебры тёплицевых, циркулянтных, антициркулянтных и $\tau_{\varepsilon,\varphi}$-матриц являются замкнутыми относительно J-сопряжения. В разд. 4 теоремы из [1], [2] обобщаются на случай замкнутых относительно J-сопряжения алгебр, а известные формулы смещения получаются как следствия. В разд. 5 подведены итоги работы.

2. J-ЭРМИТОВЫ МАТРИЦЫ

Определение 1. Пусть J — унитарная эрмитова комплексная матрица размера $n \times n$. Комплексная матрица A размера $n \times n$ называется J-эрмитовой, если $JAJ = A^h$.

Отметим, что A является J-эрмитовой тогда и только тогда, когда $JA = A^hJ = (JA)^h$. Иначе говоря, A является J-эрмитовой тогда и только тогда, когда JA эрмитова.

Рассмотрим несколько примеров. Любая эрмитова матрица является J-эрмитовой для $J = I$. Если J является матрицей перестановки следующего вида (обменной матрицей)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то J-эрмитовость матрицы является обобщением понятия персимметричности для комплексных матриц. Например, матрица Z является J-эрмитовой для вышеописанной матрицы J:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \mathbf{i} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -\mathbf{i} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & -\mathbf{i} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

J-эрмитовы матрицы обладают свойствами, аналогичными свойствам эрмитовых матриц. Например, если две эрмитовы матрицы коммутируют, то их произведение также является эрмитовым. Обобщение этого утверждения на случай J-эрмитовых матриц тривиально.

Предложение 1. *Если две J-эрмитовых матрицы коммутируют, то их произведение J-эрмитово.*

Известно, что любая матрица представляется в виде суммы эрмитовой и косоэрмитовой матриц. Следующее предложение содержит обобщение этого факта, использующее J-эрмитовость.

Предложение 2. *Любая матрица H представима в виде $H = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 — J-эрмитовы.*

Доказательство. Матрицы

$$H_1 = \frac{H + JH^hJ}{2}, \quad H_2 = \frac{H - JH^hJ}{2i},$$

являются J-эрмитовыми и, очевидно,

$$H = H_1 + iH_2.$$

3. АЛГЕБРЫ, ЗАМКНУТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО J-СОПРЯЖЕНИЯ

Определение 2. Пусть J — унитарная эрмитова комплексная $n\times n$ матрица. Множество комплексных $n\times n$ матриц H называется замкнутым относительно J-сопряжения, если $(JXJ)^h \in \mathcal{H}$ для любого $X \in \mathcal{H}$. В частном случае $J = I$ множество, замкнутое относительно J-сопряжения, называется замкнутым относительно сопряжения.

Пример 1. Рассмотрим несколько примеров.

• Очевидно, любое множество эрмитовых матриц замкнуто относительно сопряжения.

• Пусть U — унитарная матрица. Тогда множество $\mathcal{U} = \{UDU^h \mid D$ диагональна$\}$ является алгеброй матриц, одновременно диагонализуемых матрицей $\mathcal{U}$ (SDU-алгеброй). Алгебра U замкнута относительно сопряжения. Действительно, если $X = U\operatorname{diag}(\lambda_i)U^h$, то

$$X^h = U\operatorname{diag}(\bar{\lambda}_i)U^h \in \mathcal{U}.$$

• Пусть U — унитарная матрица, а P — симметричная матрица перестановки. Тогда множество $\mathcal{U} = \{U(D_1 + D_2P)U^h \mid D_1$ и D_2 диагональны$\}$ является алгеброй матриц, замкнутой относительно сопряжения. Действительно, если $X = U(D_1 + D_2P)U^h$, то

$$X^h = U(D_1^h + PD_2^hPP)U^h \in \mathcal{U},$$

• так как PD_2^hP диагональна.

• Алгебры $\tau_{\alpha,\beta}$, введенные в [2], замкнуты относительно сопряжения. Они определяются как алгебры, состоящие из полиномов от матрицы

$$T_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix},$$

для некоторых вещественных α и β.

• Если J — это обменная матрица, то каждая замкнутая относительно сопряжения персимметричная алгебра является замкнутой относительно J-сопряжения. Рассмотрим несколько примеров:

— Множество тёплицевых матриц.

— Множество верхних (нижних) треугольных тёплицевых матриц.

— Множества циркулянтных и антициркулянтных матриц.

— Матричная τ-алгебра.

— Алгебры $\mathcal{C}_e = \{C_1 + JC_2 \mid C_1$ и C_2 циркулянтны$\}$ и $\mathcal{S}_e = \{S_1 + JS_2 \mid S_1$ и S_2 антициркулянтны$\}$ (они имеют размерность больше, чем n, см. [9]).

Предложение 3. *Если H есть J-эрмитова матрица, то верно следующее:*

• *алгебра $\mathcal{H}$, порожденная матрицей H, замкнута относительно J-сопряжения;*

• *коммутант множества $\{H\}$ (множество матриц, коммутирующих с H) замкнут относительно J-сопряжения.*

Тривиальное доказательство оставляется читателю. Пусть, например, J является обменной матрицей. Рассмотрим алгебру $\mathcal{H}$, порожденную матрицей Z из (1). Поскольку Z является J-эрмитовой, алгебра $\mathcal{H}$ замкнута относительно J-сопряжения. Если Z — циклическая матрица, известно, что коммутант множества $\{Z\}$ равен $\mathcal{H}$.

Из предложения 2 легко вывести следующее полезное утверждение.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{H}$ — алгебра, замкнутая относительно J-сопряжения. Тогда любая матрица $H \in \mathcal{H}$ представима в виде $H = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 суть J-эрмитовы матрицы из $\mathcal{H}$. Более того, $\mathcal{H}$ имеет базис, состоящий из J-эрмитовых матриц.

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{H}$ есть n-мерная коммутативная алгебра, замкнутая относительно J-сопряжения, порожденная матрицей H. Тогда найдется J-эрмитова матрица H', которая порождает алгебру $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение $H = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 суть J-эрмитовы. Рассмотрим жорданово разложение матрицы H. H является циклической матрицей, а значит, на каждое собственное значение приходится ровно один жорданов блок:

$$XHX^{-1} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & K_m \end{pmatrix}, \quad K_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Поскольку матрицы XH_1X^{-1} и XH_2X^{-1} коммутируют с XHX^{-1}, они являются блочно-диагональными матрицами с верхними треугольными тёплицевыми блоками:

$$XH_1X^{-1} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & T_m \end{pmatrix}, \quad XH_2X^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{T}_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{T}_m \end{pmatrix}.$$

Для доказательства утверждения достаточно доказать существование таких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что $\forall i = 1, \ldots, n$ матрица $\alpha T_i + \beta \tilde{T}_i = T_{i,\alpha,\beta}$ является циклической, и $(T_{i,\alpha,\beta})_{11} \neq (T_{j,\alpha,\beta})_{11}$ $\forall i \neq j$.

Мы знаем, что матрица $T_i + j\tilde{T}_i = K_i$ циклическая для всех i. Значит, $\forall i$, для почти всех $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\alpha T_i + \beta \tilde{T}_i$ – тёплицева матрица с ненулевыми числами над главной диагональю. Эта матрица является циклической, так как $T_{i,\alpha,\beta} - (T_{i,\alpha,\beta})_{11} I$ содержит $(n-1) \times (n-1)$ невырожденную подматрицу.

Более того, поскольку $(K_i)_{11} \neq (K_j)_{11}$ $\forall i \neq j$, для почти всех $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ выполнено $(\alpha T_i + \beta \tilde{T}_i)_{11} \neq (\alpha T_j + \beta \tilde{T}_j)_{11}$, так что существует такое $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, что матрица $\alpha XH_1X^{-1} + \beta XH_2X^{-1}$ циклическая.

Теперь мы вводим важное для вывода формул смещения понятие.

Определение 3. Пусть $\mathcal{H}$ есть n-мерная матричная алгебра.

- Говорят, что вектор $w \in \mathbb{C}^n$ характеризует $\mathcal{H}$ строчно, если $\forall x \in \mathbb{C}^n$ существует единственная матрица $\mathcal{H}_{(w)}(x) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющая равенству $w^t \mathcal{H}_{(w)}(x) = x^t$.

- Говорят, что вектор $\exists v \in \mathbb{C}^n$ характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, если $\forall y \in \mathbb{C}^n$ существует единственная матрица, $\mathcal{H}^{(v)}(y) \in \mathcal{H}$, удовлетворяющая равенству $\mathcal{H}^{(v)}(y)v = y$.

Два типа характеризации для замкнутых относительно J-сопряжения алгебр связаны между собой следующим тривиальным утверждением.

Предложение 5. *Если $\mathcal{H}$ – алгебера, замкнутая относительно J-сопряжения, а v характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, то $J^t\overline{v}$ характеризует $\mathcal{H}$ строчно.*

Для коммутативных алгебр выполнено также следующее элементарное равенство.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{H}$ есть n-мерная коммутативная матричная алгебра:*

- *если w характеризует $\mathcal{H}$ строчно, то $y^t\mathcal{H}_{(w)}(x) = x^t\mathcal{H}_{(w)}(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$;*

- *если v характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, то $\mathcal{H}^{(v)}(y)x = \mathcal{H}^{(v)}(x)y$ $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$.*

Теорема 2.5 в [10] утверждает, что если $\mathcal{H}$ порождена циклической матрицей H, то найдутся два вектора, которые характеризуют ее строчно и столбцово соответственно. Однако не каждая матричная алгебра размерности n порождается одним элементом, даже если существуют векторы, которые характеризуют ее. Далее приведен пример такой алгебры, причем каждый ее элемент не является циклическим.

Пример 2:

$$\mathcal{H} = \left\{ X = \begin{pmatrix} T & Q \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| T, Q - \text{верхние треугольные тёплицевы } \frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \text{ матрицы} \right\}.$$

Для каждой матрицы $H \in \mathcal{H}$, $H - H_{11}I$ — матрица ранга не больше, чем $n - 2$, так что собственное значение H_{11} имеет геометрическую кратность не меньше, чем 2, а значит, матрица H не может быть циклической. Если J — обменная матрица, то $\mathcal{H}$ замкнута относительно J-сопряжения, характеризуется строчно вектором e_1 и столбцово вектором e_n.

Если $\mathcal{U}$ — SDU-алгебра, то легко получить явное выражение для матриц $\mathcal{U}^{(v)}(z)$ и $\mathcal{U}_{(w)}(z)$.

Предложение 7. *Пусть $\mathcal{U}$ есть SDU-алгебра.*

- *Если v — такой вектор, что $(U^h v)_i \neq 0\ \forall i$, то*

$$\mathcal{U}^{(v)}(z) = U \operatorname{diag}(U^h z) \operatorname{diag}(U^h v)^{-1} U^h.$$

- *Если w — такой вектор, что $(w^t U)_i \neq 0\ \forall i$, то*

$$\mathcal{U}_{(w)}(z) = U \operatorname{diag}(U^t z) \operatorname{diag}(U^t w)^{-1} U^h.$$

Если $L = \operatorname{diag}(U^h v)^{-1} U^h$, то собственные значения матрицы $\mathcal{U}^{(v)}(z)$ совпадают с компонентами вектора Lz. Таким образом, эрмитовы элементы алгебры $\mathcal{U}$ образуют множество $\{\mathcal{U}^{(v)}(z) | Lz - \text{вещественный вектор}\}$. Этот результат можно обобщить на случай алгебр, замкнутых относительно J-сопряжения.

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{H}$ есть n-мерная коммутативная алгебра, замкнутая относительно J-сопряжения, а v — вектор, характеризующий $\mathcal{H}$ столбцово. Тогда существует такая невырожденная матрица L, зависящая от v, что*

$$\{H \in \mathcal{H} | H - J\text{-эрмитова}\} = \{\mathcal{H}^{(v)}(x) | LJx - \text{вещественный вектор}\}.$$

Доказательство. Для начала рассмотрим J-эрмитову матрицу $H \in \mathcal{H}$. Если $Hv = x$, то $H = \mathcal{H}^{(v)}(x)$. Из предложения 1 вытекает, что число

$$v^h J \mathcal{H}^{(v)}(y) \mathcal{H}^{(v)}(x) v = v^h J \mathcal{H}^{(v)}(y) x = v^h (\mathcal{H}^{(v)}(y))^h J x = y^h J x$$

является вещественным для всех таких y, что матрица $\mathcal{H}^{(v)}(y)$ есть J-эрмитова.

Ввиду следствия 1, $\mathcal{H}$ допускает базис $\{\mathcal{H}^{(v)}(y_i)\}_{i=1}^n$, состоящий из J-эрмитовых матриц. Векторы $y_1, \ldots, y_n$, очевидно, линейно независимы. Определив матрицу L равенствами

$$e_i^t L = y_i^h,$$

получаем, что L невырождена, а LJx веществен.

Чтобы доказать обратное включение, рассмотрим матрицу $\mathcal{H}^{(v)}(x)$, не являющуюся J-эрмитовой. Пользуясь следствием 1, мы можем записать равенство

$$\mathcal{H}^{(v)}(x) = \mathcal{H}^{(v)}(x_1) + i\mathcal{H}^{(v)}(x_2),$$

где $\mathcal{H}^{(v)}(x_2)$ — ненулевая J-эрмитова матрица. Тогда $LJx = LJx_1 + iLJx_2$ не вещественен, так как векторы LJx_2 и LJx_1 вещественны, а LJx_2 отличен от нуля.

В случае когда w характеризует алгебру строчно, можно доказать существование такой невырожденной матрицы M, зависящей от w, что $\mathcal{H}_{(w)}(x)$ есть J-эрмитова тогда и только тогда, когда $x^t JM$ веществен.

4. ТЕОРЕМЫ СМЕЩЕНИЯ ДЛЯ ЗАМКНУТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО J-СОПРЯЖЕНИЯ АЛГЕБР

В качестве приложения в этом разделе мы докажем обобщения теорем из [1], [2], использующихся в разложениях смещения замкнутых относительно J-сопряжения алгебр.

В [3] используются алгебры, порожденные циклической матрицей. Приведем основной результат.

Теорема 1 (см. 6 в [3]). *Пусть H — циклическая матрица, порождающая алгебру $\mathcal{H}$, вектор v характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, а w характеризует $\mathcal{H}$ строчно. Рассмотрим алгебру $\mathcal{K}$, порожденную матрицей $K = H + vw^t$. Для любой матрицы A, если*

$$AH - HA = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^t,$$

то

$$A = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i) + \mathcal{H}^{(v)}(Av).$$

Ниже мы получим аналогичный результат для алгебр, замкнутых относительно J-сопряжения. Для алгебр, порожденных циклическим элементом, наш результат слабее, чем теорема 1. Однако наша теорема подходит для работы с алгебрами, которые не порождаются одной матрицей, как в примере 2 и в [9]. Более того, из нижеследующей теоремы можно вывести значительную часть известных формул смещения.

Предположим, что $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ — две n-мерные коммутативные матричные алгебры, замкнутые относительно J-сопряжения. Более того, пусть $H \in \mathcal{H}$, $K \in \mathcal{K}$ суть J-эрмитовы матрицы, $v \in \mathbb{C}^n$, причем $H + vv^hJ = K$. Наконец, пусть вектор v характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, а вектор $w = (v^hJ)^t$ характеризует $\mathcal{K}$ строчно.

Замечание 1. Для SDU-алгебр, если $U[z] + Uxx^hU^h = \mathcal{V}[z']$, где $x_i \neq 0\ \forall i$, а Ux характеризует алгебру $\mathcal{U}$, то унитарная матрица $W = U^hV$ такова, что $U^hVD(z')V^hU = D(z) + xx^h$. Следовательно, столбцы $\{w_i\}$ матрицы W являются собственными векторами матрицы $D(z) + xx^h$:

$$\lambda_i w_i = (D(z) + xx^h)w_i,$$
$$w_i = (x^h w_i)(\lambda_i I - D(z))^{-1}x.$$

Следовательно,

$$W_{ij} = (x^h w_j)\frac{x_i}{(\lambda_j - z_i)};$$

а значит, W — унитарная матрица типа Коши. Таким образом, для рассмотрения SDU-алгебр, удовлетворяющих условиям теоремы 2, придется исследовать унитарные матрицы типа Коши.

Определение 4. J-разложением матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ мы будем называть разложение

$$A = \sum_{m=1}^{r} x_m y_m^t,$$

где векторы x_m, y_m таковы, что $\mathcal{H}^{(v)}(x_m)$ и $\mathcal{K}_{(w)}(y_m)$ являются J-эрмитовыми.

Из следствия 1 и предложения 8 следует, что существуют такие L, M (зависящие от алгебр $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$ и векторов v, w), что у матрицы A имеется J-разложение тогда и только тогда, когда $LJAJM$ — вещественная матрица. Следовательно, если у A существует J-разложение, то также существует "оптимальное" J-разложение, в котором число слагаемых совпадает с рангом матрицы A (достаточно рассмотреть вещественное скелетное разложение матрицы $LJAJM = \sum ex_m\tilde{y}_m^t$, а потом разложение матрицы $A = \sum JL^{-1}\tilde{x}_m\tilde{y}_m^tM^{-1}J$).

Лемма 1. *Если у A существует J-разложение, то у $AH - HA$ также существует J-разложение.*

Доказательство. Рассмотрим J-разложение $A = \sum_{i=1}^{l} x_i y_i^t$ и скелетное разложение коммутатора

$$AH - HA = \sum_{i=1}^{l} (x_i y_i^t H - H x_i y_i^t).$$

Чтобы показать, что мы получили J-разложение, достаточно доказать, что $\mathcal{H}^{(v)}(Hx_i)$ и $\mathcal{K}_{(w)}(H^t y_i)$ являются J-эрмитовыми. Из равенства

$$\mathcal{H}^{(v)}(Hx_i) = H\mathcal{H}^{(v)}(x_i)$$

следует, что матрица $\mathcal{H}^{(v)}(Hx_i)$ — J-эрмитова, поскольку она равна произведению коммутирующих J-эрмитовых матриц.

Теперь для матрицы $\mathcal{K}_{(w)}(H^t y_i)$ запишем равенство:

$$\mathcal{K}_{(w)}(H^t y_i) = \mathcal{K}_{(w)}((y_i^t(K - vv^h J))^t) = \mathcal{K}_{(w)}((y_i^t K)^t) - \mathcal{K}_{(w)}((y_i^t v v^h J)^t) =$$
$$= \mathcal{K}_{(w)}(y_i)K - (y_i^t v)\mathcal{K}_{(w)}(w) = \mathcal{K}_{(w)}(y_i)K - (y_i^t v)I.$$

Матрица $\mathcal{K}_{(w)}(y_i)K$, очевидно, J-эрмитова. Для завершения доказательства осталось показать, что число $(y_i^t v)$ вещественно:

$$(y_i^t v) = w^t \mathcal{K}_{(w)}(y_i) v = w^t J J \mathcal{K}_{(w)}(y_i) J J v = v^h (\mathcal{K}_{(w)}(y_i))^h \tilde{w} = \overline{(y_i^t v)}.$$

Значит, матрица $(y_i^t v)I = (y_i^t v)JJ$ также J-эрмитова.

Лемма 2 (см. [1], [11]). *Пусть $A \in \mathcal{C}^{n\times n}$ и $\mathfrak{C}_H(A) = AH - HA = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^t$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^t \tilde{H}^t y_i = 0 \quad \forall \tilde{H} \in \mathcal{H}.$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i^t \tilde{H}^t y_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m,j=1}^{n} x_{i\,m} \tilde{H}^t_m y_{i\,j} = \sum_{m,j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_{i\,m} \tilde{H}^t_m y_{i\,j} = \sum_{m,j=1}^{n} \tilde{H}_{jm} \sum_{i=1}^{k} (x_i y_i^t)_{mj} = \sum_{m,j=1}^{n} \tilde{H}_{jm} (AH - HA)_{mj} =$$
$$= \mathrm{tr}(\tilde{H}(AH - HA)) = \mathrm{tr}(\tilde{H}AH - H\tilde{H}A) = 0,$$

где последнее равенство следует из совпадения характеристических многочленов матриц $\tilde{H}AH$ и $H\tilde{H}A$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ суть n-мерные коммутативные матричные алгебры, замкнутые относительно J-сопряжения. Пусть $H \in \mathcal{H}$, $K \in \mathcal{K}$ суть J-эрмитовы матрицы, $\exists v \in \mathbb{C}^n$, причем $H + vv^h J = K$, вектор v характеризует $\mathcal{H}$ столбцово, а вектор $w = (v^h J)^t$ характеризует $\mathcal{K}$ строчно.*

1. *Для любой $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, если $\mathfrak{C}_H(A) = AH - HA = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i^t$, то*

$$A = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^{(v)}(x_i) \mathcal{K}_{(w)}(y_i) + C,$$

где C — матрица, коммутирующая с H.

2. *Если H является циклической, то $C = \mathcal{H}^{(v)}(Av)$.*

Доказательство. Матрица C коммутирует с H тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{C}_H(A) = \mathfrak{C}_H\left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^{(v)}(x_i) \mathcal{K}_{(w)}(y_i)\right).$$

Рассмотрим подробнее правую часть последнего равенства:

$$\sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)H - H\sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)(K - vv^hJ) - \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)H\mathcal{K}_{(w)}(y_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)(vv^hJ)\mathcal{K}_{(w)}(y_i) - \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)vv^hJ =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}x_iy_i^t - \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)vv^hJ = \mathfrak{C}_H(A) - \sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)vv^hJ.$$

Значит, для завершения доказательства первой части достаточно показать, что

$$\sum_{i=1}^{k}\mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)v = 0. \tag{2}$$

Из следствия 1 следует, что матрицы $\mathcal{H}^{(v)}(x_i)$, $\mathcal{K}_{(w)}(y_i)$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций J-эрмитовых матриц:

$$\mathcal{H}^{(v)}(x_i) = \mathcal{H}^{(v)}(\varphi_i) + i\mathcal{H}^{(v)}(\psi_i),$$
$$\mathcal{K}_{(w)}(y_i) = \mathcal{K}_{(w)}(\xi_i) + i\mathcal{K}_{(w)}(\eta_i).$$

Теперь имеем

$$AH - HA = \sum_{j=1}^{k}(\varphi_j\xi_j^t - \psi_j\eta_j^t) + i\sum_{j=1}^{k}(\varphi_j\eta_j^t + \psi_j\xi_j^t).$$

Положим

$$C_1 = \sum_{j=1}^{k}(\varphi_j\xi_j^t - \psi_j\eta_j^t), \quad C_2 = \sum_{j=1}^{k}(\varphi_j\eta_j^t + \psi_j\xi_j^t).$$

Из предложения 8 и леммы 1 следует, что

$$C_1 = A_1H - HA_1, \quad C_2 = A_2H - HA_2, \tag{3}$$

где A_1 и A_2 определены в виде

$$A_1 = JL^{-1}\operatorname{Re}(LJAJM)M^{-1}J, \quad A_2 = JL^{-1}\operatorname{Im}(LJAJM)M^{-1}J.$$

Значит, для завершения доказательства первой части достаточно показать равенства:

$$J\sum_{j=1}^{k}(\mathcal{H}^{(v)}(\varphi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\xi_j) - \mathcal{H}^{(v)}(\psi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\eta_j))v = 0, \tag{4}$$

$$J\sum_{j=1}^{k}(\mathcal{H}^{(v)}(\varphi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\eta_j) + \mathcal{H}^{(v)}(\psi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\xi_j))v = 0. \tag{5}$$

Запишем подробнее m-й столбец в (4):

$$e_m^tJ\sum_{j=1}^{k}(\mathcal{H}^{(v)}(\varphi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\xi_j) - \mathcal{H}^{(v)}(\psi_j)\mathcal{K}_{(w)}(\eta_j))v =$$
$$= e_m^tJ\sum_{j=1}^{k}(J(\mathcal{H}^{(v)}(\varphi_j))^hJ\mathcal{K}_{(w)}(\xi_j) - J(\mathcal{H}^{(v)}(\psi_j))^hJ\mathcal{K}_{(w)}(\eta_j))v =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (\varphi_j^h(\mathcal{H}^{(v)}(e_m))^h(\mathcal{K}_{(w)}(\xi_j))^h J - \psi_j^h(\mathcal{H}^{(v)}(e_m))^h(\mathcal{K}_{(w)}(\eta_j))^h J)v =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^h(\mathcal{H}^{(v)}(e_m))^h \overline{\xi}_j - \sum_{j=1}^{k} \psi_j^h(\mathcal{H}^{(v)}(e_m))^h \overline{\eta}_j = 0.$$

Для преобразований мы использовали предложение 6, а последнее равенство вытекает из (3) и леммы 2. Аналогичным образом преобразуется m-я строка в (5), а значит, первая часть теоремы доказана.

Если матрица H — циклическая, то коммутант множества $\{H\}$ совпадает с алгеброй $\mathcal{H}$, а значит, C принадлежит алгебре $\mathcal{H}$,

$$C = \mathcal{H}^{(v)}(\rho) = A - \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i).$$

Значит, используя (2), получаем выражение для ρ:

$$\rho = \left(A - \sum_{i=1}^{k} \mathcal{H}^{(v)}(x_i)\mathcal{K}_{(w)}(y_i)\right)v = Av.$$

Теорема доказана.

Теперь мы хотим показать, что, с учетом примера 1, из теоремы 2 можно вывести некоторые известные формулы.

1. Формулы Гейдера в [7], использующие циркулянтные и треугольные тёплицевы матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad K - H = e_n e_n^t J,$$

где J – обменная матрица.

2. Формулы Гохберга–Ольшевского в [4], использующие циркулянтные и антициркулянтные матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \ddots & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad K - H = 2e_n e_n^t J.$$

3. Формулы Гохберга–Семенцула в [5], использующие верхние и нижние треугольные тёплицевы матрицы:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & \cdot & \ddots & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K - H = ee^t.$$

4. Формулы Боццо–ди Фиоре в [2], использующие $\tau_{\varepsilon,\varphi}$-алгебры с $\varepsilon, \varphi = 0, 1, -1$:

$$H, K = T_{\varepsilon\varphi} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \varphi \end{pmatrix},$$

где $J = I$ — единичная матрица.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы ввели понятия J-эрмитовости и замкнутости множества матриц относительно J-сопряжения. В качестве приложения мы доказали теорему о формулах разложения смещения, которая обобщает и структурирует известные результаты. Поскольку эта теорема применима к алгебрам, отличным от алгебр полиномов от фиксированной матрицы, она может привести к новым формулам низкой сложности, связанным с алгебрами, не порожденными одним элементом. Также есть потенциал для обобщения на алгебры с размерностью, большей чем размер матрицы, таких как в [9]. Эти темы могут быть исследованы в будущем.

Мы с радостью отмечаем доброжелательность и эффективность организационного комитета конференции MMMA2019, а также вспоминаем множество прекрасных и важных моментов, проведенных в Москве вместе с участниками конференции, в Институте вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН, в Сколковском институте науки и технологий и в МГУ им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Di Fiore C., Zellini P.* Matrix decompositions using displacement rank and classes of commutative matrix algebras // Linear Algebra and its Appl. 1995. V. 229. P. 49–99.
2. *Bozzo E., Di Fiore C.* On the use of certain matrix algebras associated with discrete trigonometric transforms in matrix displacement decomposition // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1995. V. 16. P. 312–326.
3. *Bozzo E.* A note on matrix displacement representation // Integral Equations and Operator Theory. 1997. V. 29. P. 368–372.
4. *Gohberg I., Olshevsky V.* Circulants, displacements and decompositions of matrices // Integral Equations and Operator Theory. 1992. V. 15. P. 730–743.
5. *Gohberg I., Semencul A.* On the inversion of finite Toeplitz matrices and their continuous analogs // Mat. Issled. 1972. V. 7. P. 201–233.
6. *Kailath T., Kung S., Morf M.* Displacement ranks of matrices and linear equations // J. Math. Anal. Appl. 1979. V. 68. P. 395–407.
7. *Gader P.D.* Displacement operator based decompositions of matrices using circulants or other group matrices // Linear Algebra Appl. 1990. V. 139. P. 111–131.
8. *Bini D., Pan V.* Polynomial and Matrix Computations, Fundamental Algorithms. Boston: Birkhäuser, 1994.
9. *Bozzo E.* Algebras of higher dimension for diplacement decompositions and computations with Toeplitz plus Hankel matrices // Linear Algebra and its Appl. 1995. V. 230. P. 127–150.
10. *Di Fiore C., Zellini P.* Matrix algebras in optimal preconditioning // Linear Algebra and its Appl. 2001. V. 335. P. 1–54.
11. *Di Fiore C.* Matrix algebras and displacement decompositions // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2000. V. 21. P. 646–667.