
**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 512.64

**О ТОЧНОСТИ КРЕСТОВЫХ И СТОЛБЦОВЫХ МАЛОРАНГОВЫХ
МАХVOL-ПРИБЛИЖЕНИЙ В СРЕДНЕМ¹⁾**

© 2021 г. Н. Л. Замарашкин^{1,*}, А. И. Осинский^{1,2,**}¹ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН, Россия² 121205 Москва, Большой бульвар, 30, стр. 1, Сколтех, Россия

*e-mail: nikolai.zamarashkin@gmail.com

**e-mail: a.osinskiy@skoltech.ru

Поступила в редакцию 24.11.2020 г.

Переработанный вариант 24.11.2020 г.

Принята к публикации 14.01.2021 г.

В данной статье рассматривается проблема малорангового столбцового и крестового (*CGR*, *CUR*) приближения матриц по норме Фробениуса с точностью до фиксированного множителя $1 + \varepsilon$. Доказывается, что для случайных матриц в среднем справедлива оценка вида $1 + \varepsilon \leq \frac{m+1}{m-r+1} \frac{n+1}{n-r+1}$, где m и n – число строк и столбцов крестового приближения. Таким образом, оказывается, что матрицы, для которых принцип максимального объема не позволяет гарантировать высокой точности, довольно редки. Также рассматривается связь полученных оценок с методами поиска подматрицы максимального объема и максимального проективного объема. Численные эксперименты показывают близость теоретических оценок и достижимых на практике результатов быстрой крестовой аппроксимации. Библ. 16. Фиг. 1.

Ключевые слова: малоранговое приближение матриц, крестовое/скелетное разложение, максимальный объем.

DOI: 10.31857/S0044466921050185

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{M \times N}$, а A_r – ее наилучшее приближение ранга r по норме Фробениуса

$$\|A - A_r\|_F = \min_{\text{rank}(B) \leq r} \|A - B\|_F. \quad (1)$$

Построение приближения A_r предполагает получение сингулярного разложения для A , что слишком дорого для большого числа современных приложений, использующих малоранговые приближения. С другой стороны, как правило, не требуется искать именно A_r , а лишь такое приближение Ψ , $\text{rank}(\Psi) \leq r$, что

$$\|A - \Psi\|_F = (1 + \varepsilon) \|A - A_r\|_F, \quad (2)$$

для некоторого заданного ε . Создание алгоритмов малой сложности для приближений матрицами малого ранга, удовлетворяющих (2), является интенсивной областью современных исследований [1]–[3].

В настоящей работе изучается точность так называемых *CGR* (иногда говорят *CUR*) малоранговых приближений, основанных на столбцах $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ и строках $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ приближаемой матрицы A . Поскольку выбранные строки и столбцы образуют в матрице A крест, то такие приближения принято называть *крестовыми*.

Известные *CGR* алгоритмы можно условно подразделить на 2 группы: детерминистические и рандомизированные. На данный момент теория рандомизированных алгоритмов развита намного полнее, чем теория детерминистических. Однако, на наш взгляд, на практике детермини-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (соглашение № 075-15-2019-1624 с Минобрнауки РФ).

стические алгоритмы имеют ряд преимуществ. Во-первых, такие алгоритмы имеют меньшую сложность при получении приближений заданной точности. Во-вторых, что, возможно, даже более важно, наиболее востребованные алгоритмы используют для построения приближения лишь малую часть элементов приближаемой матрицы. Последнее делает детерминистические крестовые алгоритмы незаменимым инструментом при построении тензорных ТТ-приближений.

Настоящая работа является попыткой построения теории для детерминистических крестовых *CGR* приближений с выбором столбцов C и строк R на основе обобщенного принципа максимального объема.

Объемом прямоугольной матрицы $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ называется произведение всех ее сингулярных чисел

$$\text{vol}(B) = \prod_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i(B).$$

В соответствии с принципом максимального объема, малоранговое *CGR* приближение высокой точности получается, если на пересечении строк R и столбцов C оказывается подматрица \hat{A} , обладающая максимальным объемом среди всех подматриц данного размера. Теоретическое обоснование высокой поэлементной точности (в норме Чебышёва $\|A\|_C = \max_{i,j} |a_{i,j}|$) maxvol -приближений дано в [4] и обобщено в [5]. Этих оценок, тем не менее, недостаточно для доказательства существования приближений вида (2).

С другой стороны, рандомизированные алгоритмы крестовых приближений позволяют достичь высокой точности приближения в норме Фробениуса. Например, в [3] предложен алгоритм, гарантирующий точность

$$\|A - CUR\|_F \leq (1 + \varepsilon) \|A - A_r\|_F, \quad \varepsilon = \text{const} \cdot \frac{r}{n - 4r}, \quad (3)$$

с числом n строк R и столбцов C таким, что $n > 4r$. Как следует из (3), увеличивая n , можно делать точность приближения сколь угодно близкой к наилучшей. Оценка (3) является наилучшей известной оценкой крестовых аппроксимаций с точки зрения асимптотики по числу требуемых строк и столбцов n . Кроме того, нижние оценки в [6], [7] показывают, что асимптотическая оценка $\varepsilon = O(r/n)$ не может быть улучшена.

Несмотря на свойство асимптотической оптимальности, алгоритм из [3] обладает общими для рандомизированных алгоритмов недостатками. Во-первых, при построении приближения используются все элементы исходной матрицы. Кроме того, для достижения точности с $\varepsilon = 1$ реальный размер n превышает заданный ранг в десятки раз при использовании медленного метода, на основе процедуры дерандомизации, и даже тысячи раз при использовании более быстрого полностью рандомизированного алгоритма. Эти недостатки, как будет видно, отсутствуют у алгоритмов, основанных на принципе обобщенного максимального объема.

Определенные основания для предположения, что крестовые приближения на принципе максимального объема обладают высокой точностью в фробениусовой норме, было получено в [8]. Было доказано, что при выборе подматрицы $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ с вероятностью, пропорциональной квадрату ее объема, матожидание ошибки во фробениусовой норме, отличается от ошибки наилучшего приближения не более чем в $r + 1$ раз.

В настоящей работе мы определяем две вероятностные модели и рассматриваем подчиняющиеся им семейства случайных матриц. Мы доказываем, что средняя в норме Фробениуса ошибка *CGR* приближения на основе принципа максимального объема отличается от ошибки наилучшего приближения не более чем в $r + 1$ раз. Более того, при использовании большего числа строк и столбцов можно получить среднюю погрешность, сколь угодно близкую к оптимальной, с числом строк и столбцов, существенно меньшим, чем в [3].

В работе также рассматривается средняя погрешность, даваемая так называемыми столбцовыми приближениями вида SW , где S — столбцы матрицы A , содержащие подматрицу максимального объема. Эти результаты аналогичны результатам из [7], [9]. Численные эксперименты показывают высокое совпадение наблюдаемых погрешностей с их теоретическим предсказанием.

2. ПОЧЕМУ НЕОБХОДИМ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД?

Напомним наилучшие известные результаты для точности *CGR* приближений. Все они относятся к поэлементной аппроксимации или, другими словами, к аппроксимации в *C*-норме.

Теорема 1 (см. [5]). Пусть $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $n \geq r$, является подматрицей максимального объема матрицы A ранга не ниже r . Пусть C и R – столбцы и строки матрицы A , содержащие \hat{A} . Тогда

$$\|A - C\hat{A}^\dagger R\|_C \leq \sqrt{r+1} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \sigma_{r+1}(A). \tag{4}$$

Прямое применение неравенства (4) не позволяет получить оценку высокой точности для погрешности в норме Фробениуса. Действительно, суммируя квадрат ошибки для всех ненулевых элементов $A - C\hat{A}^{-1}R$, мы получим

$$\|A - C\hat{A}^\dagger R\|_F \leq \sqrt{(M-r)(N-r)} \|A - C\hat{A}^{-1}R\|_C,$$

что в итоге приводит к

$$\|A - C\hat{A}^\dagger R\|_F \leq \sqrt{(M-r)(N-r)} \sqrt{r+1} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} \|A - A_r\|_F.$$

От ошибки наилучшего приближения последняя оценка отличается на множитель, пропорциональный $\sqrt{(M-r)(N-r)}$. Последний зависит от размера приближаемой матрицы и делает оценку бесполезной для матриц больших размеров.

Более того, избежать такого множителя в наихудшем случае невозможно. Рассмотрим матрицы $A \in \mathbb{R}^{(r+1) \times N}$ вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{N-r+1}} & \frac{1}{\sqrt{N-r+1}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{N-r+1}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{\sqrt{N-r+1}} & \frac{\varepsilon}{\sqrt{N-r}\sqrt{N-r+1}} & \dots & \frac{\varepsilon}{\sqrt{N-r}\sqrt{N-r+1}} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Каким бы ни было значение ε , матрица максимального объема находится в первых r столбцах. Обозначим эти столбцы через C ,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{N-r+1}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{\sqrt{N-r+1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1) \times r}.$$

Оценим ошибку наилучшего столбцового приближения CW для A . Заметим, что такое приближение достигается для матрицы $W = C^\dagger A$. Действительно, обозначив через b произвольный столбец в A , а через w соответствующий ему столбец W , найдем

$$\arg \min_w \|b - Cw\|_2 = C^\dagger b.$$

Объединив все столбцы в матрицу W , получим $W = C^\dagger A$. Поскольку ранг проектора $I - CC^\dagger$ равен 1, то матрица ошибки приближения $A - CC^\dagger A$ будет ранга 1, и

$$\|A - CC^\dagger A\|_2 = \|A - CC^\dagger\|_F.$$

Прямыми вычислениями получаем

$$\|A - CC^\dagger A\|_2 = \left\| A - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1 + \varepsilon^2(N-r)} & \frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{1 + \varepsilon^2(N-r)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{1 + \varepsilon^2(N-r)} & \frac{\varepsilon^2(N-r)}{1 + \varepsilon^2(N-r)} \end{bmatrix} A \right\|_2.$$

Учитывая то, что ошибка приближения в каждом из столбцов с номерами больше r одна и та же, и то, что для одного столбца верно равенство

$$\frac{\|A - CC^\dagger A\|_2}{\sqrt{N-r}} = \left\| \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2(N-r)} & \frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{1 + \varepsilon^2(N-r)} \\ \frac{\varepsilon\sqrt{N-r}}{1 + \varepsilon^2(N-r)} & 1 - \frac{\varepsilon^2(N-r)}{1 + \varepsilon^2(N-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N-r+1}} \\ \frac{\varepsilon}{\sqrt{N-r}\sqrt{N-r+1}} \end{bmatrix} \right\|_2,$$

приходим к оценке

$$\|A - CC^\dagger A\|_2 \geq \sqrt{N-r} \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon(\sqrt{N-r} - 1/\sqrt{N-r})}{(1 + \varepsilon^2(N-r))\sqrt{N-r+1}} \end{bmatrix} \right\|_2 = \varepsilon\Omega(\sqrt{N-r}).$$

Осталось заметить, что крестовое приближение, являясь частным случаем столбцового ($CUR = CW$ для $W = UR$), не может давать оценку лучше.

Таким образом, при больших N для крестовых алгоритмов, основанных на принципе максимального объема, нельзя гарантировать высокую точность получаемых приближений. Тем не менее наблюдаемая на практике высокая эффективность таких алгоритмов говорит в пользу того, что примеры, подобные рассмотренному выше, встречаются редко. Обоснование данного наблюдения является целью настоящей работы.

3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ МЕРА

Формализуем понятие редкости, определив RANDSVD ансамбль на матрицах с фиксированными сингулярными числами.

Определение 1. Будем говорить, что A является случайной и писать

$$A \sim \text{RANDSVD}(\Sigma),$$

если она выбирается из множества матриц вида

$$A = W_L \Sigma W_R,$$

где $\Sigma \in \mathbb{C}^{M \times N}$ – фиксированная матрица с неотрицательными элементами σ_i на диагонали, а $W_L \in \mathbb{C}^{M \times M}$ и $W_R \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – независимые случайные унитарные матрицы с определенной для них инвариантной мерой Хаара. Без ограничения общности считаем, что диагональные элементы σ_i матрицы Σ упорядочены в порядке невозрастания $\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$.

В соответствии с определением ансамбль $\text{RANDSVD}(\Sigma)$ получает структуру вероятностного пространства и содержит все матрицы, имеющие одну и ту же матрицу сингулярных чисел Σ . Редкие события будут определяться множествами матриц, имеющих малую вероятностную меру.

Замечание 1. RANDSVD ансамбль является довольно известной конструкцией в вычислительной математике. Случайную RANDSVD матрицу для некоторых распределений сингулярных чисел можно получить в Matlab с помощью вызова функции `gallery('randsvd', ...)`. Кроме того, RANDSVD ансамбли используются при тестировании программного пакета LAPACK. LAPACK функция `zlange` позволяет получить матрицу из данного ансамбля.

4. СТОЛБЦОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ

Вероятностную меру на множестве матриц можно использовать для получения разнообразных оценок в среднем. Нас будут интересовать средние погрешности некоторых малоранговых приближений. Мы начнем исследование со случая так называемых столбцовых приближений.

Столбцовым приближением ранга r матрицы A называется выражение вида CW , где $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ – некоторые столбцы A , а $W \in \mathbb{C}^{n \times M}$ – произвольная матрица ранга не выше r , строки которой не обязаны принадлежать линейной оболочке строк A .

4.1. Модель RANDSVD шум

Пусть матрица A представляется в виде

$$A = Z + F = Z + W_L F_0 W_R,$$

с фиксированной матрицей Z , $\text{rank } Z = r$, и случайной RANDSVD(F_0) матрицей F . Таким образом, A является суммой постоянной матрицы малого ранга Z и случайной матрицы шума F .

Для матрицы Z запишем ее сингулярное разложение в виде

$$Z = U \Sigma V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{r \times N}.$$

Сделаем важное наблюдение о том, что подматрица $\hat{Z} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ максимального объема в Z располагается в столбцах с теми же номерами, что и подматрица $\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ максимального объема в матрице V .

В дальнейшем мы будем часто использовать свойство ограниченности фробениусовой нормы, псевдообратной для подматрицы максимального объема \hat{V} в ортонормированных строках V .

Утверждение 1 (см. [5]). Пусть $V \in \mathbb{C}^{r \times N}$ – матрица с ортонормированными строками: $VV^* = I_r$, а $\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ – подматрица матрицы V , обладающая наибольшим объемом среди всех подматриц такого размера. Тогда

$$\|\hat{V}^\dagger\|_F \leq \sqrt{r + \frac{r(N-n)}{n-r+1}}.$$

Кроме того, нам понадобится следующая простая

Лемма 1. Для произвольных фиксированных матриц A и B выполняется следующее соотношение:

$$\mathbb{E}_W \|AWB\|_F^2 = \frac{\|A\|_F^2 \|B\|_F^2}{N},$$

где математическое ожидание берется по множеству случайных унитарных матриц $W \in \mathbb{C}^{N \times N}$ с заданной на них инвариантной мерой Хаара.

Доказательство. Пусть $A = U_A \Sigma_A V_A$ и $B = U_B \Sigma_B V_B$ – сингулярные разложения матриц A и B . Тогда

$$\|AWB\|_F^2 = \|U_A \Sigma_A V_A W U_B \Sigma_B V_B\|_F^2 = \|\Sigma_A V_A W U_B \Sigma_B\|_F^2.$$

В силу унитарной инвариантности меры Хаара матрица $W' = V_A W U_B$ сама является случайной унитарной матрицей.

Представив квадрат нормы Фробениуса в виде суммы квадратов всех элементов $\Sigma_A W' \Sigma_B$, и воспользовавшись тем, что для каждого элемента случайной унитарной матрицы W' справедливо соотношение $\mathbb{E}[|w_{ij}|^2] = 1/N$, запишем:

$$\mathbb{E}_W \|AWB\|_F^2 = \sum_{ij} |v'_{ij}|^2 \sigma_i^2(A) \sigma_j^2(B) = \sum_{ij} \frac{1}{N} \sigma_i^2(A) \sigma_j^2(B) = \frac{\|A\|_F^2 \|B\|_F^2}{N}.$$

Последнее равенство доказывает утверждение леммы.

Теперь мы готовы сформулировать теорему о средней точности столбцовых приближений.

Теорема 2. Пусть $A = Z + F$, $F \in \text{RANDSVD}(F_0)$, $\text{rank } Z = r$, и

$$Z = U\Sigma V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{r \times N},$$

есть сингулярное разложение Z . Если столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ матрицы A выбираются как столбцы, соответствующие подматрице $\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times n}$, являющейся подматрицей **максимального объема** среди всех $r \times n$ подматриц матрицы V , то

$$\mathbb{E}_{W_L, W_R} \left[\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы прежде всего получим общее выражение погрешности.

Поскольку для столбцов C матрицы A выполняется соотношение

$$C = U\Sigma\hat{V} + F_C,$$

с матрицей F_C , составленной из столбцов матрицы F , соответствующих столбцам C , то для ошибки столбцового приближения с матрицей $W = \hat{V}^\dagger V$ справедливо представление

$$A - C\hat{V}^\dagger V = Z + F - (U\Sigma\hat{V} + F_C)\hat{V}^\dagger V = F - F_C\hat{V}^\dagger V = F - FP_C\hat{V}^\dagger V. \quad (6)$$

Матрица P_C составлена из столбцов единичной матрицы, для которых $AP_C = C$, $F_C = FP_C$ и, соответственно, $\hat{V} = VP_C$. Используя тождество $I = (I - V^*V) + V^*V$ и применяя равенства $\hat{V} = VP_C$ и $\hat{V}^\dagger \hat{V} = I_r$, преобразуем (6) к виду

$$\begin{aligned} A - C\hat{V}^\dagger V &= F - F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V - FV^*VP_C\hat{V}^\dagger V = \\ &= F - F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V - FV^*V. \end{aligned} \quad (7)$$

Объединяя первое и третье слагаемые в (7), представим ошибку как сумму двух ортогональных слагаемых

$$A - C\hat{V}^\dagger V = F(I - V^*V) - F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V. \quad (8)$$

В силу столбцовой ортогональности матриц в правой части (8) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 &= \|F(I - V^*V)\|_F^2 + \|F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 = \\ &= \|F_0 W_R(I - V^*V)\|_F^2 + \|F_0 W_R(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V\|_F^2, \end{aligned} \quad (9)$$

где мы учли, что фробениусова норма не меняется при умножении на ортонормированные строки V .

Применение леммы 1 к первому слагаемому в (9) приведет к оценке

$$\mathbb{E}_{W_R} \left[\|F_0 W_R(I - V^*V)\|_F^2 \right] = \frac{\|F\|_F^2 \|I - V^*V\|_F^2}{N} = \|F\|_F^2 \frac{N-r}{N} = \|F\|_F^2 - \frac{r}{N} \|F\|_F^2. \quad (10)$$

Аналогично для второго слагаемого с $B = (I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E}_{W_R} \left[\|F_0 W_R(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] = \frac{\|F\|_F^2 \|(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V\|_F^2}{N} \leq \|F\|_F^2 \frac{\|\hat{V}^\dagger V\|_F^2}{N}.$$

Так как \hat{V} — подматрица максимального объема, то согласно утверждению 1 имеем

$$\|\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \leq r + \frac{r(N-r)}{n-r+1}$$

и

$$\mathbb{E}_{W_R} \left[\|F_0 W_R(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \|F\|_F^2 \left(\frac{r}{n-r+1} + \frac{r}{N} \right).$$

Суммируя последнее выражение с (10), получаем

$$\mathbb{E}_{W_r} \left[\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \|F\|_F^2 - \frac{r}{N} \|F\|_F^2 + \frac{r}{n-r+1} \|F\|_F^2 + \frac{r}{N} \|F\|_F^2 = \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2.$$

Замечание 2. Оценка из теоремы 2 близка по виду к результату [7]

$$\mathbb{E} \left[\|A - CC^\dagger A\|_F^2 \right] \leq \frac{n+1}{n-r+1} \|A - A_r\|_F^2.$$

Однако смысл усреднений различен. В случае [7] матрица A фиксирована, и усреднение берется по группам столбцов. В случае теоремы 2 усреднение берется по ансамблю матриц $A = Z + F$.

Замечание 3. Часть приведенных выше рассуждений можно применить для доказательства небольшой величины ошибки столбцовой аппроксимации даже в том случае, когда матрица F не является случайной, но ее 2-норма сильно меньше нормы Фробениуса.

Действительно, из формулы (9) следует

$$\begin{aligned} \|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 &= \|F(I - V^*V)\|_F^2 + \|F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger\|_F^2 \leq \|F\|_F^2 + \|F\|_2^2 \|(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger\|_F^2 = \\ &= \|F\|_F^2 + \|F\|_2^2 \left(\|\hat{V}^\dagger\|_F^2 - \|V^*\hat{V}^\dagger\|_F^2 \right) = \|F\|_F^2 + \|F\|_2^2 \left(\|\hat{V}^\dagger\|_F^2 - r \right) \leq \|F\|_F^2 + \frac{r(N-n)}{n-r+1} \|F\|_2^2. \end{aligned}$$

Данная оценка гарантирует эффективность выбора приближения на основе подматрицы максимального объема, когда сингулярные числа погрешности одинаковы или почти одинаковы.

4.2. Модель RANDSVD матрица

Рассмотрим другую вероятностную модель. А именно, предположим, что сами матрицы A берутся из RANDSVD ансамбля. Анализ этого случая сложнее. Если в доказательстве теоремы 2 положение “хороших” столбцов C в матрице A не менялось от выбора случайной матрицы, то теперь это не так. Все столбцы в RANDSVD ансамбле равноправны, а положение столбцов, содержащих подматрицу большого объема, имеет случайный характер. Чтобы учесть это обстоятельство при вычислении средних погрешностей, нам понадобится обобщение леммы 1.

Лемма 2. Для случайной унитарной матрицы $W \in \mathbb{C}^{N \times N}$ будем рассматривать ее блочное представление вида

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix},$$

где $W_1 \in \mathbb{C}^{r \times N}$ — ее первые r строк, а $W_2 \in \mathbb{C}^{(N-r) \times N}$ — оставшиеся $N - r$ строк. Определим случайную матрицу F соотношением вида

$$F = F_2 W_2$$

с фиксированной матрицей $F_2 \in \mathbb{C}^{M \times (N-r)}$.

Пусть $P_C \in \mathbb{C}^{M \times k}$ составлена из некоторых столбцов единичной матрицы, а F_C , как и ранее, определяется выражением $F_C = F P_C$. Пусть, наконец, $G \in \mathbb{C}^{k \times k}$ — произвольная матрица.

Тогда для условного матожидания по W при фиксированных строках W_1 справедливо неравенство

$$\mathbb{E}_W \left[\|F_C G\|_F^2 \mid W_1 \right] \leq \frac{\|F_2\|_F^2 \|G\|_F^2}{N-r} \left(1 - \frac{\|W_1 P_C G\|_F^2}{\|G\|_F^2} \right). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $F_2 = U_F \Sigma_F V_F$ — сингулярное разложение матрицы F_2 . Определим матрицу Ψ в виде

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & V_F \end{bmatrix} W = \begin{bmatrix} W_1 \\ V_F W_2 \end{bmatrix}.$$

В силу унитарной инвариантности меры Хаара матрицы Ψ имеют то же распределение, что и матрицы W . Теперь F_C можно представить в виде

$$F_C = U_F \Sigma_F \Psi_2 P_C. \quad (12)$$

Подставим (12) в $\|F_C G\|_F^2$ и воспользуемся унитарной инвариантностью фробениусовой нормы. Тогда

$$\|F_C G\|_F^2 = \|U_F \Sigma_F \Psi_2 P_C G\|_F^2 = \|\Sigma_F \Psi_2 P_C G\|_F^2.$$

Представим $\|\Sigma_F \Psi_2 P_C G\|_F^2$ как сумму квадратов 2-норм строк

$$\|F_C G\|_F^2 = \|\Sigma_F \Psi_2 P_C G\|_F^2 = \sum_{k=1}^{N-r} \sigma_k^2(F_2) \|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2, \quad (13)$$

где обозначение $(\Psi_2 P_C)_k$ используется для строки матрицы $\Psi_2 P_C$ с номером k . Заметим, что строки $(\Psi_2 P_C)_k$ распределены одинаково (это очевидным образом следует из того, что строки матрицы W_2 распределены одинаково). Более того, одинаково распределенными являются и строки $(\Psi_2 P_C)_k G$. Следовательно, учитывая $\Psi_1 = W_1$, для произвольного k получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Psi \left[\|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2 \Psi_1 \right] &= \frac{1}{N-r} \mathbb{E}_\Psi \left[\sum_{k=1}^{N-r} \|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2 \Psi_1 \right] = \\ &= \frac{1}{N-r} \mathbb{E}_\Psi \left[\|\Psi_2 P_C G\|_F^2 \Psi_1 \right] = \frac{1}{N-r} \mathbb{E}_\Psi \left[(\|\Psi P_C G\|_F^2 - \|\Psi_1 P_C G\|_F^2) \Psi_1 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку второе слагаемое в (14) не меняется при усреднении, то имеем

$$\mathbb{E}_\Psi \left[\|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2 \mid \Psi_1 \right] \leq \frac{1}{N-r} \mathbb{E}_\Psi \left[\|\Psi P_C\|_2^2 \|G\|_F^2 \mid \Psi_1 \right] - \frac{\|\Psi_1 P_C G\|_F^2}{N-r} = \frac{\|G\|_F^2}{N-r} \left(1 - \frac{\|\Psi_1 P_C G\|_F^2}{\|G\|_F^2} \right). \quad (15)$$

Усредняя (13) и подставляя в него (15), для $\mathbb{E}_W \left[\|F_C G\|_F^2 W_1 \right]$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W \left[\|F_C G\|_F^2 W_1 \right] &= \mathbb{E}_\Psi \left[\sum_{k=1}^{N-r} \sigma_k^2(F_2) \|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2 W_1 \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{N-r} \sigma_k^2(F_2) \mathbb{E}_\Psi \left[\|(\Psi_2 P_C)_k G\|_2^2 W_1 \right] \leq \frac{\|F_2\|_F^2 \|G\|_F^2}{N-r} - \frac{\|F_2\|_F^2 \|\Psi_1 P_C G\|_F^2}{N-r}. \end{aligned}$$

Следствие 1. При $r = 0$ мы получаем $W_2 = W$, неравенства преобразуются в равенства, и оценка принимает вид

$$\mathbb{E}_W \left[\|F_C G\|_F^2 \right] = \frac{\|F_2\|_F^2 \|G\|_F^2}{N},$$

соответствующий утверждению леммы 1.

Замечание 4. Заметим, что оценка (11) леммы 2 не зависит от числа k столбцов, которые были выбраны у случайной матрицы F вида $F = F_2 W_2$ с помощью проектора P_C .

Теперь мы готовы доказать аналог теоремы 2 для случая, когда сама матрица A выбирается случайным образом из ансамбля RANDSVD

$$A = W_L (Z_0 + F_0) W_R = Z + F,$$

причем W_L и W_R – случайные унитарные матрицы, а Z_0 , $\text{rank} Z_0 = r$, и F_0 – фиксированные матрицы.

Теорема 3. Пусть

$$A = Z + F = W_L Z_0 W_R + W_L F_0 W_R,$$

$A \in \text{RANDSVD}(Z_0 + F_0)$, $\text{rank} Z = r$, и

$$Z = U \Sigma V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{r \times N},$$

есть сингулярное разложение Z . Если столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$ матрицы A выбираются как столбцы, соответствующие подматрице $\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times n}$, являющейся подматрицей **максимального объема** среди всех $r \times n$ подматриц матрицы V , то верно следующее:

$$\mathbb{E}_{W_L, W_R} \left[\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2.$$

Доказательство. Зафиксируем матрицу W_L . Как и ранее, справедливо равенство

$$A - C\hat{V}^\dagger V = F - F_C\hat{V}^\dagger V. \tag{16}$$

Повторяя преобразования из теоремы 2, будем иметь

$$\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 = \|F(I - V^*V)\|_F^2 + \|F(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger\|_F^2 \leq \|F\|_F^2 + \|F_0W_R(I - V^*V)P_C\hat{V}^\dagger\|_F^2. \tag{17}$$

Займемся оценкой второго слагаемого в (17). Заметим, во-первых, что строки матрицы V являются одинаково распределенными. Действительно, если обозначить через $V_0 \in \mathbb{C}^{r \times N}$ правые сингулярные векторы Z_0 , то $V = V_0W_R$. Кроме того,

$$\hat{V} = V_0W_RP_C$$

для некоторой матрицы $P_C \in \mathbb{C}^{N \times n}$, составленной из подмножества столбцов единичной матрицы. Подчеркнем, что P_C не является фиксированной матрицей, поскольку выбор позиций столбцов, в которых находится подматрица \hat{V} максимального 2-объема в V , вообще говоря, зависит от случайной матрицы W_R . В дальнейшем для P_C будем указывать ее явную зависимость от W_R (или других матриц) и писать $P_C = P_C(W_R)$.

Обозначим матрицу во втором слагаемом в (17) через Δ и подставим туда полученные выражения для V и \hat{V} . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta &= F_0W_R(I - V^*V)P_C(W_R)\hat{V}^\dagger = F_0W_R(I - (V_0W_R)^*(V_0W_R))P_C(W_R)(V_0W_RP_C(W_R))^\dagger = \\ &= F_0(I - V_0^*V_0)W_RP_C(W_R)(V_0W_RP_C(W_R))^\dagger. \end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим матрицу $F' = F_0(I - V_0^*V_0)$ с сингулярным разложением $F' = U_F\Sigma_FV_F'$. Ранг F' не больше $N - r$, ее норма Фробениуса не превосходит $\|F_0\|_F$, а матрица правых сингулярных векторов V_F' ортогональна V_0 . Подставим ее в (18) и вычислим норму Фробениуса матрицы Δ :

$$\|\Delta\|_F^2 = \left\| \Sigma_F' V_F' W_R P_C(W_R) (V_0 W_R P_C(W_R))^\dagger \right\|_F^2. \tag{19}$$

Так как V_0 и V_F' ортогональны и образуют базис в \mathbb{C}^N , то соотношение

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_F' \end{bmatrix} W_R$$

определяет случайную унитарную матрицу Ψ . Более того, введенная ранее матрица P_C определяется только элементами Ψ_1 . Действительно,

$$P_C = \arg \max_{P_C} \text{vol}(V_0W_RP_C) = \arg \max_{P_C} \text{vol}(V_0[V_0^* \ V_F'^*]\Psi P_C) = \arg \max_{P_C} \text{vol}(\Psi_1P_C),$$

а потому далее будем писать $P_C = P_C(\Psi_1)$. После соответствующих замен в (19) получим

$$\|\Delta\|_F^2 \leq \left\| \Sigma_F \Psi_2 P_C(\Psi_1) (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2. \tag{20}$$

Наконец, применим лемму 2 для оценки математического ожидания $\|\Delta\|_F^2$ по Ψ при условии фиксированной Ψ_1

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\Psi \left[\|\Delta\|_F^2 \mid \Psi_1 \right] &\leq \frac{\|\Sigma'_F\|_F^2}{N-r} \left\| (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2 - \frac{\|\Sigma'_F\|_F^2}{N-r} \left\| \Psi_1 P_C(\Psi_1) (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2 = \\ &= \frac{\|\Sigma'_F\|_F^2}{N-r} \left(\left\| (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2 - r \right) \leq \frac{\|F\|_F^2}{N-r} \left(\left\| (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2 - r \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Так как $\hat{V} = \Psi_1 P_C(\Psi_1)$ подматрица максимального объема в строках Ψ_1 , то в силу утверждения 1 справедливо неравенство

$$\left\| (\Psi_1 P_C(\Psi_1))^\dagger \right\|_F^2 \leq r + \frac{r(N-n)}{n-r+1}. \quad (22)$$

Откуда, после подстановки (22) в (21) и сокращений получаем

$$\mathbb{E}_\Psi \left[\|\Delta\|_F^2 \mid \Psi_1 \right] \leq \frac{r}{n-r+1} \|F\|_F^2. \quad (23)$$

Правая часть (23) не зависит от Ψ_1 , поэтому эта же оценка верна и для безусловного среднего $\mathbb{E}_\Psi \left(\|\Delta\|_F^2 \right)$. Окончательно имеем

$$\mathbb{E}_{W_R} \left[\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] = \mathbb{E}_\Psi \left[\|A - C\hat{V}^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \|F\|_F^2 + \frac{r}{n-r+1} \|F\|_F^2 = \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right) \|F\|_F^2.$$

Поскольку оценка справедлива для любой фиксированной W_L , то усреднение по ней ничего не изменит, и утверждение теоремы доказано.

Замечание 5. Так как W_L с самого начала фиксировалась, теорема верна и для семейства матриц, где умножение на W_L не производится.

5. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ КРЕСТОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Наконец, мы готовы перейти к доказательству основного результата о средней точности крестовых аппроксимаций, построенных на основе обобщенного принципа максимального проективного объема для матриц A из RANSDVD ансамбля

$$A = Z + F = W_L(Z_0 + F_0)W_R.$$

Напомним определение r -проективного объема.

Определение 2 (см. [5]). r -Проективным объемом матрицы X называется произведение ее первых (наибольших) r сингулярных чисел

$$\text{vol}_r(X) = \prod_{i=1}^r \sigma_i(X).$$

Почему мы говорим об обобщенном принципе максимального объема? На это есть несколько причин, но основной является следующая.

С точки зрения теории крестовых приближений идеальный принцип максимального проективного объема звучит так: если для матрицы A требуется построить CGR приближение ранга не выше r , то в A выбираются подматрица \hat{A} максимального проективного объема, столбцы C и строки R , на пересечении которых стоит \hat{A} , а приближение имеет вид

$$A \approx C\hat{A}_r^\dagger R, \quad G = \hat{A}_r^\dagger,$$

где B_r^\dagger обозначает обобщенную обратную для первых r сингулярных чисел B .

Наиболее сложная часть данной конструкции состоит в анализе подматрицы максимального проективного объема и ее положения в исходной матрице. В работе мы предлагаем упрощенный подход, который и называем обобщенным принципом максимального проективного объема.

Пусть как и везде ранее

$$Z = U\Sigma V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{r \times N}$$

есть сингулярное разложение для Z . Будем выбирать столбцы C , строки R и генератор G с помощью следующего алгоритма обобщенного принципа максимального проективного объема:

1) столбцы $C = AP_C$ соответствуют столбцам $Z_C = ZP_C$, содержащим подматрицу максимального проективного объема в Z ;

2) строки R соответствуют подматрице максимального проективного объема в матрице $CZ_C^\dagger Z$;

3) если \hat{A} обозначает подматрицу матрицы A , стоящую на пересечении столбцов C и строк R , то $G = (\hat{A}Z_C^\dagger Z_C)^\dagger = (A\mathcal{P})^\dagger$, где $\mathcal{P} = Z_C^\dagger Z_C$ – ортопроектор на пространство размерности r .

Справедлива следующая

Теорема 4. Пусть $A \in \text{RANDSVD}(Z_0 + F_0)$

$$A = Z + F = W_L Z_0 W_R + W_L F_0 W_R,$$

$\text{rank } Z = r, u$

$$Z = U\Sigma V, \quad U \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad V \in \mathbb{C}^{r \times N},$$

есть сингулярное разложение Z . Пусть столбцы $C \in \mathbb{C}^{M \times n}$, строки $R \in \mathbb{C}^{m \times N}$ и генератор $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$ выбираются в соответствии с обобщенным принципом максимального проективного объема. Тогда имеем

$$\mathbb{E}_{W_L, W_R} \left[\|A - CGR\|_F^2 \right] \leq \frac{m+1}{m-r+1} \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2.$$

Доказательство. Начнем доказательство с важного наблюдения. Рассмотрим произвольную матрицу $X \in \mathbb{C}^{M \times N}$ ранга r . Пусть $X = U_X \Sigma_X V_X$ – сингулярное разложение X с матрицами $U_X \in \mathbb{C}^{M \times r}$ и $V_X \in \mathbb{C}^{r \times N}$. Тогда подматрица $\hat{X} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ максимального проективного объема в X удовлетворяет соотношению

$$\hat{X} = \hat{U}_X \Sigma_X \hat{V}_X, \quad \hat{U}_X \in \mathbb{C}^{m \times r}, \quad \hat{V}_X \in \mathbb{C}^{r \times n},$$

с подматрицами \hat{U}_X и \hat{V}_X , имеющими максимальный объем в U_X и V_X соответственно.

Принимая во внимание выбор столбцов C в матрице A , можем записать

$$CZ_C^\dagger Z = C(U\Sigma\hat{V})^\dagger U\Sigma V = C(\Sigma\hat{V})^\dagger U^* U\Sigma V = C(\Sigma\hat{V})^\dagger \Sigma V = C(\hat{V})^\dagger \Sigma^{-1} \Sigma V = C(\hat{V})^\dagger V. \quad (24)$$

По замечанию к теореме 3, приближение ранга r вида $CZ_C^\dagger Z$ в среднем обладает хорошими аппроксимационными свойствами. А именно,

$$\mathbb{E}_{W_R} \left[\|A - CZ_C^\dagger Z\|_F^2 \right] = \mathbb{E}_{W_R} \left[\|A - C(\hat{V})^\dagger V\|_F^2 \right] \leq \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2. \quad (25)$$

Обозначим через Φ матрицу $\Phi = CZ_C^\dagger Z$. Очевидным образом ранг Φ не превосходит r . Применяя замечание к теореме 3 к Φ (только теперь рассматривается строчное приближение), запишем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{W_L} \|A - \Phi\Phi^\dagger R\|_F^2 &= \mathbb{E}_{W_L} \|A - C(P_R^T CZ_C^\dagger Z)^\dagger R\|_F^2 = \\ &= \mathbb{E}_{W_L} \|A - C(\hat{A}Z_C^\dagger Z_C)^\dagger R\|_F^2 \leq \frac{m+1}{m-r+1} \|A - \Phi\|_F^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где по аналогии с P_C матрица P_R составлена из соответствующих столбцов единичной матрицы, а $\hat{A} = P_R^T A P_C$ – подматрица с большим проективным объемом. Комбинируя (25) и (26), заканчиваем доказательство теоремы

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{W_L, W_R} \|A - CGR\|_F^2 &= \mathbb{E}_{W_R} \left(\mathbb{E}_{W_L} \|A - C(\hat{A}Z_C^\dagger Z_C)^\dagger R\|_F^2 \right) \leq \frac{m+1}{m-r+1} \mathbb{E}_{W_R} \|A - CZ_C^\dagger Z\|_F^2 \leq \\ &\leq \frac{m+1}{m-r+1} \frac{n+1}{n-r+1} \|A - CZ_C^\dagger Z\|_F^2 = \frac{m+1}{m-r+1} \frac{n+1}{n-r+1} \|F\|_F^2. \end{aligned}$$

Замечание 6. При $r = m = n$ коэффициент будет равен $(r+1)^2$. Интересно, что тот же коэффициент наблюдается в аппроксимации по норме Чебышёва [10], и при усреднении по подматрицам с вероятностью, пропорциональной квадрату их объема [8]. В этом случае можно в условиях теоремы использовать понятие объема вместо проективного объема.

Тот факт, что коэффициент при ошибке крестовой аппроксимации является произведением коэффициентов для столбцовой и строковой аппроксимации, встречается в различных работах. Например, при переходе от $r+1$ в столбцовой аппроксимации [9] к $(r+1)^2$ в крестовой [8]. Та же ситуация наблюдается и в случае известных оценок точности малоранговых приближений в спектральной норме [5], [11], [12]. Наконец, аналогичное произведение появляется при оценке ошибки неполного LU разложения [13], которое основано на алгоритме неполного QR разложения [14].

Замечание 7. Тот факт, что подматрица \hat{A} , определяемая алгоритмом для обобщенного принципа максимального проективного объема, действительно обладает большим проективным объемом, едва ли вызывает сомнения. Однако конструкция обобщенного принципа имеет еще одно существенное отличие от конструкции “идеального”. А именно, в идеальной конструкции $G = \hat{A}_r^\dagger$. В то же время для обобщенной конструкции $G = (\hat{A}\mathcal{P})' = (\hat{A}\mathcal{P})_r^\dagger$, с проектором $\mathcal{P} = Z_C^\dagger Z_C = \hat{V}^\dagger \hat{V}$. Подробный теоретический анализ этого различия выходит за рамки данной статьи. Практика показывает, что отличие несущественное.

6. СВЯЗЬ С ЧИСЛЕННЫМИ АЛГОРИТМАМИ

Прежде всего следует указать на то, что все доказанные результаты остаются в силе в случае замены подматриц максимального объема на подматрицы локально максимального объема.

Определение 3. Говорят, что подматрица \hat{A} матрицы A обладает локально максимальным объемом в матрице A , если объем любой другой подматрицы \tilde{A} того же размера, и отличающейся от \hat{A} не более чем в одной строке и в одном столбце

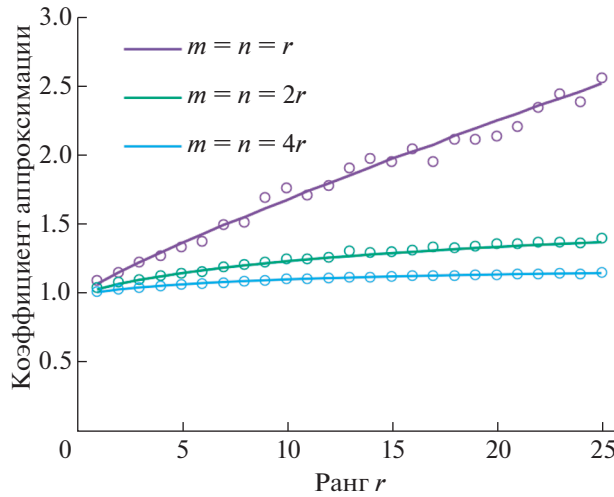
$$\text{vol}(\tilde{A}) \leq \text{vol}(\hat{A}).$$

Алгоритмы maxvol [15] и Dominant-C [16] позволяют находить подматрицы локально максимального объема в предписанных строках и/или столбцах, а потому формально позволяют достичь доказанных ранее результатов, если только матрица Z известна.

На практике наилучшее приближение $Z = A_r$ является неизвестным. Задача состоит именно в поиске приближения, близкого к наилучшему. Для этого поиск ведется в самой матрице A , а вместо проектора P используется сокращенное сингулярное разложение подматрицы \hat{A} , что приводит к аппроксимации вида $C\hat{A}_r^\dagger R$. В связи с тем, что доказанные выше результаты уже не гарантируют оценки ошибки $\|A - C\hat{A}_r^\dagger R\|_F$, представляет интерес то, насколько ошибка на практике близка к той, что указана в теоремах. А именно, выполняется ли неравенство

$$\mathbb{E} \|A - C\hat{A}_r^\dagger R\|_F^2 \leq \frac{m+1}{m-r+1} \frac{n+1}{n-r+1} \|A - A_r\|_F^2. \quad (27)$$

Для более точного сравнения уточним смысл доказанных результатов. А именно, вместо того, чтобы явно оценивать $\|\hat{V}\|_F^2$ сверху, заменим оценку на $\mathbb{E}_{\hat{V}} \|\hat{V}\|_F^2$, где \hat{V} ищется как подматрица с



Фиг. 1. Кружки обозначают значения $\|A - \hat{C}A_r^\dagger R\|_F / \|A - A_r\|_F$ для случайных $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $N = 1000$, с сингулярными числами $\sigma_1 = \dots = \sigma_r = 100\sigma_{r+1} = \dots = 100\sigma_N$. Значения ошибки получены с помощью алгоритма `maxvol-proj` [16]. Линии показывают ожидаемое значение коэффициента аппроксимации для каждого ранга и размера. Данный коэффициент равен $1 + \frac{1}{N-r} \left(\mathbb{E}_{\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times m}} \|\hat{V}^\dagger\|_F^2 - r \right)$. Различные цвета показывают результаты для различных размеров подматрицы $\hat{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$: $m = n = r$, $m = n = 2r$ и $m = n = 4r$.

локально максимальным объемом. В этом случае коэффициенты в (27) изменятся следующим образом:

$$\mathbb{E} \|A - \hat{C}A_r^\dagger R\|_F^2 \approx \left(1 + \frac{\mathbb{E}_{\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times m}} \|\hat{V}^\dagger\|_F^2 - r}{M - r} \right) \left(1 + \frac{\mathbb{E}_{\hat{V} \in \mathbb{C}^{r \times m}} \|\hat{V}^\dagger\|_F^2 - r}{N - r} \right) \|A - A_r\|_F^2. \tag{28}$$

Выражение (28) является наиболее близкой гипотезой. Матожидания вида $\mathbb{E}_V \|\hat{V}^\dagger\|_F^2$ можно получить путем отдельной (независимой от A) генерации матриц U и V , поиска в них подматриц локально максимального объема и последующего усреднения.

На фиг. 1 показаны численные значения величины $\|A - \hat{C}A_r^\dagger R\|_F^2$ на основе алгоритмов, не использующих знания матрицы Z , в сравнении с правой частью (28).

Как видим, численные значения ошибки близки к предсказанным теоретически и обладают малой дисперсией, особенно при числе строк и столбцов, большем r . Более подробные эксперименты из [16] также подтверждают гипотезу (28).

Использованные для тестирования процедуры поиска подматриц локально максимального объема и большого проективного объема доступны в GitHub:

<https://github.com/RodniO/Projective-volume-low-rank>

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что в определенном смысле для большинства матриц принцип максимального объема позволяет строить столбцовые и крестовые аппроксимации высокой точности с небольшим числом дополнительных строк и столбцов. Полученные оценки имеют тот же коэффициент вида $\frac{n+1}{n-r+1}$, что и наилучшие известные оценки крестовой и столбцовой аппроксимации и имеют ту же асимптотическую зависимость от числа строк и столбцов, что и наилучшие оценки снизу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Halko N., Martinsson P., Tropp J.* Finding structure with randomness: probabilistic algorithms for constructing approximate matrix decompositions // *SIAM Rev.* 2011. V. 53. P. 217–288.
2. *Civril A., Magdon-Ismail M.* Column subset selection via sparse approximation of SVD // *Theor. Comput. Sci.* 2012. V. 412. P. 1–14.
3. *Boutsidis C., Woodruff D.P.* Optimal cur matrix decompositions // *SIAM J. Comput.* 2017. V. 46. P. 543–589.
4. *Goreinov S.A., Tyrtshnikov E.E.* The maximal-volume concept in approximation by low-rank matrices // *Contemp. Math.* 2001. V. 268. P. 47–51.
5. *Osinsky A.I., Zamarashkin N.L.* Pseudo-skeleton approximations with better accuracy estimates // *Linear Algebra Appl.* 2018. V. 537. P. 221–249.
6. *Deshpande A., Vempala S.* Adaptive sampling and fast low-rank matrix approximation // *Lect. Not. Comp. Sci.* 2006. V. 1. P. 292–303.
7. *Guruswami V., Sinop A.K.* Optimal column-based low-rank matrix reconstruction // *ArXiv e-prints.* 2012. arXiv:1104.1732.
8. *Замарашкин Н.Л., Осинский А.И.* О существовании близкой к оптимальной скелетной аппроксимации матрицы во фробениусовой норме // *Докл. АН.* 2018. Т. 479. № 5. С. 489–492.
9. *Deshpande A., Rademacher L.* Efficient volume sampling for row/column subset selection // *IEEE 51st Annual Symposium on Foundations of Computer Science.* 2010. P. 329–338.
10. *Горейнов С.А., Тыртышников Е.Е.* Квазиоптимальность скелетного приближения матрицы в чебышёвской норме // *Докл. АН.* 2011. Т. 438. № 5. С. 593–594.
11. *Goreinov S.A., Tyrtshnikov E.E., Zamarashkin N.L.* A theory of pseudo-skeleton approximations // *Linear Algebra Appl.* 1997. V. 261. P. 1–21.
12. *Michalev A.Y., Oseledets I.V.* Rectangular maximum-volume submatrices and their applications // *Linear Algebra Appl.* 2018. V. 538. P. 187–211.
13. *Pan C.T.* On the existence and computation of rank revealing LU factorizations // *Linear Algebra Appl.* 2000. V. 316. P. 199–222.
14. *Gu M., Eisenstat S.C.* Efficient algorithms for computing a strong rank-revealing qr factorization // *SIAM J. Sci. Comput.* 1996. V. 17. No. 4. P. 848–869.
15. *Goreinov S.A., Oseledets I.V., Savostyanov D.V., Tyrtshnikov E.E., Zamarashkin N.L.* How to find a good submatrix // *Matrix Methods: Theory, Algorithms, Applications* / Ed. by V. Olshevsky, E. Tyrtshnikov. World Scientific Publishing, 2010. P. 247–256.
16. *Osinsky A.I.* Rectangular maximum volume and projective volume search algorithms // *ArXiv e-prints.* 2018. arXiv:1809.02334.