ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 936–950

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 17.929

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© 2021 г. М. Н. Бахшалыева[1,*], Э. Г. Халилов[1,]**

[1] *AZ 1010 Баку, пр. Азадлыг 20, Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Азербайджан*

**e-mail: mehpara.bakhshalieva@mail.ru*

***e-mail: elnurkhalil@mail.ru*

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.
Переработанный вариант 18.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Рассматривается криволинейное интегральное уравнение внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Дан новый метод построения квадратурной формулы для сингулярного интеграла, и на основе этого метода построена квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя. В определенно выбранных точках уравнение заменяется системой алгебраических уравнений, при этом устанавливается существование и единственность решения этой системы. Доказывается сходимость решения этой системы к точному решению интегрального уравнения и указывается скорость сходимости метода. Библ. 21.

Ключевые слова: криволинейный сингулярный интеграл, метод коллокации, краевая задача Дирихле, уравнение Лапласа, метод граничных интегральных уравнений.

DOI: 10.31857/S0044466921030030

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей L, а f – заданная непрерывная функция на L.

Рассмотрим внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа: найти функцию $u \in C^{(2)}(R^2 \backslash \overline{D}) \cap C(R^2 \backslash D)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в $R^2 \backslash \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \operatorname{grad} u(x)\right) = o\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}\right), \quad x \to \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$ и граничному условию

$$u(x) = f(x) \quad \text{на} \quad L.$$

Известно, что одним из методов решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа является ее приведение к криволинейному интегральному уравнению. Основное преимущество применения метода интегральных уравнений к исследованию внешних краевых задач заключается в том, что подобный подход позволяет свести задачу, поставленную для неограниченной области, к задаче для ограниченной области меньшей размерности. Так как интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

В [1, с. 115–116] показано, что если решение $u(x)$ внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет нормальную производную в смысле равномерной сходимости, то неизвестная нормальная производная $\rho(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}(x)}$, $x \in L$, удовлетворяет интегральному уравнению II рода

$$\rho + \tilde{K}\rho = Tf \tag{1.1}$$

и интегральному уравнению I рода

$$S\rho = -f + Kf, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in L$,

$$(S\rho)(x) = 2\int_L \Phi(x,y)\rho(y)dL_y, \quad (K\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)}\rho(y)dL_y,$$

$$(\tilde{K}\rho)(x) = 2\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \mathbf{n}(x)}\rho(y)dL_y, \quad (Tf)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)}\left(\int_L \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} f(y)dL_y\right), \quad x \in L,$$

а $\Phi(x,y)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x-y|}, \quad x, y \in R^2, \quad x \neq y.$$

Несмотря на разрешимости интегральных уравнений (1.1) и (1.2), эти уравнения не имеют единственного решения. Однако Бертон и Миллер (см. [2]) доказали, что интегральное уравнение II рода

$$\rho + \tilde{K}\rho - i\eta S\rho = Tf - i\eta(Kf - f), \tag{1.3}$$

полученное из линейных комбинаций уравнений (1.1) и (1.2), разрешимо единственным образом в пространстве $C(L)$, где $\eta \neq 0$ – произвольное действительное число, а через $C(L)$ обозначено пространство всех непрерывных функций на L с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in L}|\varphi(x)|$.

Запишем уравнение (1.3) в виде

$$\rho(x) + (A\rho)(x) = (Bf)(x), \tag{1.4}$$

где

$$(A\rho)(x) = (\tilde{K}\rho)(x) - i\eta(S\rho)(x), \quad (Bf)(x) = (Tf)(x) - i\eta((Kf)(x) - f(x)), \quad x \in L.$$

Известно, что внешнюю краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа можно привести к различным интегральным уравнениям, приближенные решения которых исследованы, например, в [3]–[5]. Уравнение (1.4) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной в смысле равномерной сходимости решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа на L. При этом функция

$$u(x) = \int_L \left\{ f(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \mathbf{n}(y)} - \rho(y)\Phi(x,y) \right\} dS_y, \quad x \in R^2 \backslash \bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле.

Отметим, что в [6] дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения (1.4) внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве. А в [7] исследовано приближенное решение интегрального уравнения

$$\rho + K\rho - i\eta S\rho = 2f$$

внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца и, используя значения в определенных точках функции f, проведены численные расчеты. Кроме того, в [7] отмечено, что можно исследовать также приближенное решение уравнения (1.4) и провести численные расчеты. Однако построенный Ляпуновым контрпример показывает (см. [8, с. 89–90]), что для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью производная, вообще говоря, не существует. Поэтому вычислить значение функции $(Bf)(x)$ в определенных точках не представляется возможным. Следует указать, что в [9], рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как сильный сингулярный интеграл (см. [9, с. 115–116]), т.е. понимая интеграл в смысле конечного значения по Адамару, построена квадратурная формула для нормальной производной потенциала двойного слоя при дополнительно налагаемом условии на плотность f (см. [9, с. 290]). Однако известно, что при этом условии выражение для нормальной производной потенциала двойного слоя может быть представлено в виде с сингулярным интегралом (см. [1, с. 68], [9, с. 100], [10]), т.е. интеграл $(Tf)(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

В настоящей работе, рассматривая нормальную производную потенциала двойного слоя как интеграл в смысле главного значения Коши, построена квадратурная формула для $(Tf)(x)$, $x \in L$. Кроме того, с помощью построенных квадратурных формул для интегралов $(A\rho)(x)$ и $(Bf)(x)$ дано обоснование метода коллокации для уравнения (1.4).

2. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Предположим, что кривая L задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьем промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_1(b-a)/d$ равных частей: $t_k = a + \dfrac{(b-a)k}{n}$, $k = \overline{0,n}$, где $M_1 = \max\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$ (см. [11, с. 560–561]) и d – стандартный радиус (см. [11, с. 19], [12, с. 400]). В качестве опорных точек возмем $x(\tau_k)$, $k = \overline{1,n}$, где $\tau_k = a + \dfrac{(b-a)(2k-1)}{2n}$. Тогда кривая L разбивается на элементарные части: $L = \bigcup_{l=1}^n L_l$, где $L_k = \{x(t) : t_{k-1} \le t \le t_k\}$.

Известно, что (см. [13])

(1) $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$: $r_k(n) \sim R_k(n)$ ($a(n) \sim b(n) \Leftrightarrow C_1 \le \dfrac{a(n)}{b(n)} \le C_2$, где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n), где $r_k(n) = \min\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\}$ и $R_k(n) = \max\{|x(\tau_k) - x(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau_k)|\}$;

(2) $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$: $R_k(n) \le d/2$;

(3) $\forall k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$: $r_j(n) \sim r_k(n)$;

(4) $r(n) \sim R(n) \sim 1/n$, где $R(n) = \max\limits_{k=\overline{1,n}} R_k(n)$, $r(n) = \min\limits_{k=\overline{1,n}} r_k(n)$.

Лемма 1 (см. [14]). *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от n, для которых при $\forall k, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \ne k$, и $\forall y \in L_j$ справедливы следующие неравенства*:

$$C_0' |y - x(\tau_k)| \le |x(\tau_j) - x(\tau_k)| \le C_1' |y - x(\tau_k)|. \tag{2.1}$$

Для функции $\varphi(x) \in C(L)$ вводим модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi, \delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\overline{\omega}(\varphi, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\overline{\omega}(\varphi, \tau) = \max\limits_{\substack{|x-y|\le\tau \\ x,y\in L}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Кроме того, рассмотрим матрицу $A^n = (a_{lj})_{l,j=1}^n$ с элементами

$$a_{lj} = 0 \quad \text{при} \quad l = j;$$

$$a_{lj} = 2\frac{b-a}{n}\left(\frac{\partial \Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))}{\partial \mathbf{n}(x(\tau_l))} - i\eta\Phi(x(\tau_l), x(\tau_j))\right)\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \quad \text{при} \quad l \ne j.$$

Теорема 1. *Выражение*

$$A_n(x(\tau_l)) = \sum_{j=1}^n a_{lj}\rho(x(\tau_j)) \tag{2.2}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A\rho)(x)$, *причем* (здесь и далее через M будем обозначать положительные постоянные, разные в различных неравенствах)

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|A(x(\tau_l))-A_n(x(\tau_l))\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Доказательство. В [13] доказано, что выражения

$$S_n(x(\tau_k))=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\Phi(x(\tau_k),x(\tau_j))\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\rho(x(\tau_j))$$

и

$$\tilde{K}_n(x(\tau_k))=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n}\frac{\partial\Phi(x(\tau_k),x(\tau_j))}{\partial\mathbf{n}(x(\tau_k))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\rho(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_k)$, $k=\overline{1,n}$, являются квадратурными формулами для интегралов $(S\rho)(x)$ и $(\tilde{K}\rho)(x)$, соответственно, причем

$$\max_{k=\overline{1,n}}\left|(S\rho)(x(\tau_k))-S_n(x(\tau_k))\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right),$$

$$\max_{k=\overline{1,n}}\left|(\tilde{K}\rho)(x(\tau_k))-\tilde{K}_n(x(\tau_k))\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Отсюда получаем, что выражение (2.2) в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(A\rho)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|A(x(\tau_l))-A_n(x(\tau_l))\right|\le M\left(\omega(\rho,1/n)+\|\rho\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Теорема доказана.

Очевидно, что существует натуральное число n_0 такое, что

$$\sqrt{R(n)}\le\min\{1,d/2\}\quad\forall n>n_0.$$

Пусть

$$P_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n,\ \left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|\le\sqrt{R(n)}\right\},\quad Q_l=\left\{j\,|\,1\le j\le n,\ \left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|>\sqrt{R(n)}\right\}.$$

Рассмотрим матрицу $B^n=(b_{lj})_{l,j=1}^{n}$ с элементами

$$b_{ll}=\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{n}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}-$$

$$-\frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{\left|x(\tau_j)-x(\tau_l)\right|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}+i\eta\quad\text{при}\quad l=\overline{1,n};$$

$$b_{lj}=-\frac{2(b-a)}{n}\left[\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{\pi\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4}+\right.$$

$$\left.+i\eta\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\mathbf{n}(x(\tau_j))}\right]\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\quad\text{при}\quad j\in P_l\quad\text{и}\quad j\ne l;$$

$$b_{lj}=-\frac{2(b-a)}{n}\left[\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{\pi\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4}-\right.$$

$$-\frac{\left(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l))\right)}{2\pi\left|x(\tau_j)-x(\tau_l)\right|^2}+i\eta\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\mathbf{n}(x(\tau_j))}\Bigg]\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\quad \text{при}\quad j\in Q_l.$$

Теорема 2. *Пусть функция f непрерывно дифференцируема на L и*

$$\int_0^d\frac{\omega(\operatorname{grad}f,t)}{t}dt<\infty.$$

Тогда выражение

$$(Bf)^n(x(\tau_l))=\sum_{j=1}^n b_{lj}f(x(\tau_j))\tag{2.3}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Bf)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Bf)(x(\tau_l))-(Bf)^n(x(\tau_l))\right|\le M\left[\frac{\|f\|_\infty+\|\operatorname{grad}f\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad}f,t)}{t}dt\right].$$

Доказательство. В [13] доказано, что выражение

$$K_n(x(\tau_l))=\frac{2(b-a)}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^n\frac{\partial\Phi(x(\tau_l),x(\tau_j))}{\partial\mathbf{n}(x(\tau_j))}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}f(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Kf)(x)$, причем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Kf)(x(\tau_l))-K_n(x(\tau_l))\right|\le M\left(\omega(f,1/n)+\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right).$$

Тогда, принимая во внимание неравенство

$$\omega(f,1/n)\le\frac{\|\operatorname{grad}f\|_\infty}{n},\tag{2.4}$$

получаем, что

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Kf)(x(\tau_l))-K_n(x(\tau_l))\right|\le M\left(\|\operatorname{grad}f\|_\infty+\|f\|_\infty\right)\frac{\ln n}{n}.$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $(Tf)(x)$.

В [10] доказано, что

$$(Tf)(x)=T_1(x)+T_2(x),$$

где

$$T_1(x)=-\frac{2}{\pi}\int_L\frac{(x-y,\mathbf{n}(y))(x-y,\mathbf{n}(x))}{|x-y|^4}(f(y)-f(x))\,dL_y$$

и

$$T_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x))}{|x-y|^2}(f(y)-f(x))\,dL_y,\quad x\in L,$$

причем интеграл $T_2(x)$ существует в смысле главного значения Коши.

Построим квадратурную формулу для интеграла $T_1(x)$. Выражение

$$T_1^n(x(\tau_l))=-\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^n\frac{\left(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j))\right)\left(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l))\right)}{\left|x(\tau_l)-x(\tau_j)\right|^4}\times\tag{2.5}$$
$$\times\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\left(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))\right)$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_1(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.5). Очевидно, что

$$T_1(x(\tau_l))-T_1^n(x(\tau_l))=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{L_l}\frac{(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(y))(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times$$

$$\times\left(\operatorname{mes}L_j-\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(y))(x(\tau_l)-y,\mathbf{n}(x(\tau_l)))-(x(\tau_j)-x(\tau_l),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_j)-x(\tau_l),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-y|^4}\times$$

$$\times(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\left(\frac{1}{|x(\tau_l)-y|^4}-\frac{1}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\right)\times$$

$$\times(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))(f(y)-f(x(\tau_l)))dL_y-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}\int\limits_{L_j}\frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}(f(y)-f(x(\tau_j)))dL_y.$$

Слагаемые выражения в правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_1,x(\tau_l))$, $r_2(T_1,x(\tau_l))$, $r_3(T_1,x(\tau_l))$, $r_4(T_1,x(\tau_l))$ и $r_5(T_1,x(\tau_l))$ соответственно.

Так как функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то существует такая точка $y^*=x+\theta(y-x)$ (здесь $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ и $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$), что

$$f(y)-f(x)=(\operatorname{grad}f(y^*),y-x),\quad x,y\in L. \tag{2.6}$$

Тогда, применяя неравенство

$$|(x-y,\mathbf{n}(y))|\le M|x-y|^2$$

и формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$|r_1(T_1,x(\tau_l))|\le M\|\operatorname{grad}f\|_\infty(R(n))^2.$$

Учитывая неравенство

$$\left|\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right|\le MR(n)\quad\forall t\in[t_{j-1},t_j],$$

получаем, что

$$\left|1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes}L_j}\right|=\frac{\left|\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)dt\right|}{\operatorname{mes}L_j}\le$$

$$\le M\frac{\frac{b-a}{n}R(n)}{\frac{b-a}{n}m_1}\le MR(n), \tag{2.7}$$

где $m_1 = \min\limits_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} > 0$ (см. [11, с. 560–561]). Тогда, принимая во внимание (2.1), (2.6) и (2.7), получаем

$$\left|r_2\left(T_1, x\left(\tau_l\right)\right)\right| = \left|\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\left(1 - \frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes} L_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{L_j}\frac{\left(x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_j\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_j\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_j\right)\right|^4}\left(f\left(x\left(\tau_j\right)\right) - f\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)dL_y\right| \le$$

$$\le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n).$$

Пусть $y\in L_j$ и $j\neq l$. Тогда, учитывая (2.1) и (2.6), получаем

$$\left|\frac{\left(x\left(\tau_l\right) - y, \mathbf{n}(y)\right)\left(x\left(\tau_l\right) - y, \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right) - \left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^4}\times\right.$$

$$\left.\times\left(f(y) - f\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)\right| =$$

$$= \left|\left(f(y) - f\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)\left(\frac{\left(\left(y - x\left(\tau_j\right), \mathbf{n}(y)\right) + \left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}(y) - \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\right)\left(y - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^4} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(\left(y - x\left(\tau_j\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right) - \mathbf{n}(y)\right) + \left(y - x\left(\tau_j\right), \mathbf{n}(y)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^4}\right)\right| \le$$

$$\le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n).$$

Следовательно,

$$\left|r_3\left(T_1, x\left(\tau_l\right)\right)\right| \le M\left\|\operatorname{grad}\rho\right\|_\infty R(n).$$

Принимая во внимание (2.1) и (2.6), получаем, что если $y\in L_j$ и $j\neq l$, то

$$\left|\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)\left(f(y) - f\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)\right|\times$$
$$\times\left|\frac{1}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^4} - \frac{1}{\left|x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_j\right)\right|^4}\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty\frac{R(n)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|}$$

и

$$\left|\frac{\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\left(x\left(\tau_j\right) - x\left(\tau_l\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_j\right)\right|^4}\left(f(y) - f\left(x\left(\tau_j\right)\right)\right)\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty\frac{R(n)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|}.$$

Тогда

$$\left|r_4\left(T_1, x\left(\tau_l\right)\right)\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n)\left|\ln R(n)\right|$$

и

$$\left|r_5\left(T_1, x\left(\tau_l\right)\right)\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n)\left|\ln R(n)\right|.$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_j\left(T_1, x\left(\tau_l\right)\right)$, $j = \overline{1,5}$, находим

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_1\left(x\left(\tau_l\right)\right) - T_1^n\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right| \le M\left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n)\left|\ln\left(R(n)\right)\right|.$$

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $T_2(x)$. Выражение

$$T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))) \tag{2.8}$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $T_2(x)$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.8). Очевидно, что

$$T_2(x(\tau_l)) - T_2^n(x(\tau_l)) = \frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\times$$

$$\times\left(\operatorname{mes}L_j - \frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\right)(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\int_{L_j}\left(\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l))) - \frac{f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\right)dL_y +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\bigcup_{j\in P_l}L_j}\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\,dL_y.$$

Слагаемые выражения в правой части последнего равенства обозначим через $r_1(T_2,x(\tau_l))$, $r_2(T_2,x(\tau_l))$ и $r_3(T_2,x(\tau_l))$ соответственно.

Принимая во внимание (2.1), (2.6) и (2.7), получаем

$$|r_1(T_2,x(\tau_l))| = \left|\frac{1}{\pi}\sum_{j\in Q_l}\left(1-\frac{\frac{b-a}{n}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}}{\operatorname{mes}L_j}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{L_j}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))\,dL_y\right| \le$$

$$\le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\,R(n)\int_{\sqrt{R(n)}}^{\operatorname{diam}L}\frac{dt}{t} \le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\,R(n)\,|\ln R(n)|.$$

Пусть $y\in L_j$, $j\in Q_l$. Тогда

$$\left|\frac{f(y)-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l))) - \frac{f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\right| \le$$

$$\le\left|\frac{(f(y)-f(x(\tau_l)))(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))\left(|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2-|x(\tau_l)-y|^2\right)}{|x(\tau_l)-y|^2\,|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2}\right| +$$

$$+\frac{|(f(y)-f(x(\tau_j)))(\mathbf{n}(y),\mathbf{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2} + \frac{|(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))(\mathbf{n}(y)-\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))|}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^2} \le$$

$$\le M\,\|\operatorname{grad} f\|_\infty\frac{R(n)}{|x(\tau_l)-y|^2}.$$

Отсюда находим

$$\left|r_2\left(T_2, x\left(\tau_l\right)\right)\right| \leq M \left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty R(n) \int\limits_{\sqrt{R(n)}}^{\operatorname{diam} L} \frac{dt}{t^2} \leq M \left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

Так как существует такая точка $\tilde{y}(l) = x\left(\tau_l\right) + \theta\left(y - x\left(\tau_l\right)\right)$ (здесь $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ и $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$), что

$$f(y) - f\left(x\left(\tau_l\right)\right) = \left(\operatorname{grad} f\left(\tilde{y}(l)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right), \quad y \in \bigcup_{j \in P_l} L_j, \tag{2.9}$$

то выражение $r_3\ \left(T_3, x\left(\tau_l\right)\right)$ можно представить в виде

$$r_3\left(T_3, x\left(\tau_l\right)\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{\left(\operatorname{grad} f\left(\tilde{y}(l)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^2} \left(\mathbf{n}(y) - \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right) dL_y +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{\left(\operatorname{grad} f\left(\tilde{y}(l)\right) - \operatorname{grad} f\left(x\left(\tau_l\right)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^2} dL_y + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{\left(\operatorname{grad} f\left(x\left(\tau_l\right)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^2} dL_y.$$

Пусть $y \in \partial\left(\bigcup_{j \in P_l} L_j\right)$. Очевидно, что существуют натуральные числа $s \in P_l$ и $m \in Q_l$ такие, что $y \in \partial L_s$ и $y \in \partial L_m$. Отсюда имеем

$$\left|x\left(\tau_l\right) - y\right| \leq \left|x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_s\right)\right| + \left|x\left(\tau_s\right) - y\right| \leq \sqrt{R(n)} + R(n)$$

и

$$\left|x\left(\tau_l\right) - y\right| \geq \left|x\left(\tau_l\right) - x\left(\tau_m\right)\right| - \left|x\left(\tau_m\right) - y\right| > \sqrt{R(n)} - R(n).$$

Следовательно,

$$\sqrt{R(n)} - R(n) < \left|x\left(\tau_l\right) - y\right| \leq \sqrt{R(n)} + R(n) \quad \forall y \in \partial\left(\bigcup_{j \in P_l} L_j\right). \tag{2.10}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{\left(\operatorname{grad} f\left(\tilde{y}(l)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^2} \left(\mathbf{n}(y) - \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right), \mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right) dL_y\right| \leq$$

$$\leq M \left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \int\limits_0^{\sqrt{R(n)} + R(n)} dt \leq M \left\|\operatorname{grad} f\right\|_\infty \sqrt{R(n)}.$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство (2.9), находим

$$\left|\int\limits_{\bigcup_{j \in P_l} L_j} \frac{\left(\operatorname{grad} f\left(\tilde{y}(l)\right) - \operatorname{grad} f\left(x\left(\tau_l\right)\right), y - x\left(\tau_l\right)\right)}{\left|x\left(\tau_l\right) - y\right|^2} dL_y\right| \leq M \int\limits_0^{\sqrt{R(n)} + R(n)} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t} dt.$$

Известно (см. [11, с. 19], [12, с. 400–401]), что для любой точки $x \in L$ окрестность $L_d(x) = \left\{y \in L\colon \left|y - x\right| < d\right\}$ пересекается с прямой, параллельной нормали $\mathbf{n}(x)$, в единственной точке, либо вообще не пересекается, т.е. множество $L_d(x)$ однозначно проектируется на промежуток $\Omega_d(x)$, лежащий на касательной прямой $\Gamma(x)$ к L в точкеx. На куске $L_d\left(x\left(\tau_l\right)\right)$ выберем локальную прямоугольную систему координат (u, v) с началом в точке $x\left(\tau_l\right)$, где ось v направим вдоль нормали $\mathbf{n}\left(x\left(\tau_l\right)\right)$, а ось u направим вдоль положительного направления касательной прямой $\Gamma\left(x\left(\tau_l\right)\right)$. Известно, что при этом координаты точек $x\left(\tau_l\right)$ будут $(0, 0)$. Кроме того, в этих координатах окрестность $L_d\left(x\left(\tau_l\right)\right)$ можно задать уравнением $v = g(u)$, $u \in \Omega_d\left(x\left(\tau_l\right)\right)$, причем

$$g \in C^{(2)}\left(\Omega_d\left(x\left(\tau_l\right)\right)\right) \quad \text{и} \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Через Ω_l обозначим проекцию множества $\bigcup_{j\in P_l} L_j$ на касательную прямую $\Gamma(x(\tau_l))$. Пусть $d_l = \min_{\tilde{y}\in\partial\Omega_l}|x(\tau_l)-\tilde{y}|$. Так как

$$\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2} dL_y = \int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(y_1 - x_1(\tau_l))\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1} + (y_2 - x_2(\tau_l))\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}}{(y_1 - x_1(\tau_l))^2 + (y_2 - x_2(\tau_l))^2} dL_y,$$

то по формуле вычисления криволинейного интеграла получаем, что

$$\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\operatorname{grad} f(x(\tau_l)), y - x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2} dL_y = \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{du}{u} +$$

$$+\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{g(u)}{u^2+(g(u))^2}\sqrt{1+(g'(u))^2}du + \frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1+(g'(u))^2}-1\right)}{u^2+(g(u))^2}du + \tag{2.11}$$

$$+\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2+(g(u))^2}-\frac{1}{u^2}\right)du + \int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)}\frac{\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}u + \dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}g(u)}{u^2+(g(u))^2}\sqrt{1+(g'(u))^2}du.$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.11) существует в смысле главного значения Коши и равно нулю. Кроме того, учитывая неравенства

$$|g'(u)| \le M|u|$$

и

$$|g(u)| = |g(u)-g(0)| \le M|u|^2,$$

имеем

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{g(u)}{u^2+(g(u))^2}\sqrt{1+(g'(u))^2}du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty\sqrt{R(n)},$$

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l}\frac{u\left(\sqrt{1+(g'(u))^2}-1\right)}{u^2+(g(u))^2}du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n)$$

и

$$\left|\frac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}\int\limits_{-d_l}^{d_l} u\left(\frac{1}{u^2+(g(u))^2}-\frac{1}{u^2}\right)du\right| \le M\|\operatorname{grad} f\|_\infty R(n).$$

Прежде всего существует точка $\tilde{y}_* \in \Omega_l$ такая, что $d_l = |x(\tau_l)-\tilde{y}_*|$. Обозначим через $y_* \in \partial\left(\bigcup_{j\in P_l} L_j\right)$ прообраз точки $\tilde{y}_*$, а через $\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$ угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Применяя неравенство (2.10), получаем, что

$$\begin{gathered} d_l = |x(\tau_l)-y_*|\cos\alpha(y_*-x(\tau_l),\tilde{y}_*-x(\tau_l)) = |x(\tau_l)-y_*|\sqrt{1-\cos^2\alpha(y_*-x(\tau_l),\mathbf{n}(x(\tau_l)))} \ge \\ \ge |x(\tau_l)-y_*|\sqrt{1-M^2|x(\tau_l)-y_*|^2} \ge \left(\sqrt{R(n)}-R(n)\right)\sqrt{1-M^2\left(\sqrt{R(n)}+R(n)\right)^2} \ge \\ \ge \left(\sqrt{R(n)}-R(n)\right)\sqrt{1-M^2\left(2\sqrt{R(n)}\right)^2} = \left(\sqrt{R(n)}-R(n)\right)\sqrt{\left(1-2M\sqrt{R(n)}\right)\left(1+2M\sqrt{R(n)}\right)} \ge \\ \ge \left(\sqrt{R(n)}-R(n)\right)\left(1-2M\sqrt{R(n)}\right) \ge \sqrt{R(n)}-(1+2M)R(n). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Принимая во внимание неравенство (2.12) для последнего слагаемого в правой части равенства (2.11), получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega_l\setminus(-d_l,d_l)} \frac{\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_1}u+\dfrac{\partial f(x(\tau_l))}{\partial x_2}f(u)}{u^2+(g(u))^2}\sqrt{1+(g'(u))^2}du\right| \le$$

$$\le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \int\limits_{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)}^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{dt}{t} = M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \ln\frac{\sqrt{R(n)}+R(n)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)} =$$

$$= M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \ln\left(1+\frac{R(n)(2+2M)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)}\right) \le$$

$$\le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty \frac{R(n)(2+2M)}{\sqrt{R(n)}-R(n)(1+2M)} \le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty\sqrt{R(n)}.$$

В результате находим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\bigcup_{j\in P_l} L_j} \frac{(\mathrm{grad}\, f(x(\tau_l)), y-x(\tau_l))}{|x(\tau_l)-y|^2}dL_y\right| \le M\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty\sqrt{R(n)}.$$

Следовательно,

$$|r_3(T_2,x(\tau_l))| \le M\left[\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty\sqrt{R(n)} + \int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f,t)}{t}dt\right].$$

Суммируя полученные оценки для выражений $r_1(T_2,x(\tau_l))$, $r_2(T_2,x(\tau_l))$ и $r_3(T_2,x(\tau_l))$, имеем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|T_2(x(\tau_l))-T_2^n(x(\tau_l))\right| \le M\left[\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty\sqrt{R(n)} + \int\limits_0^{\sqrt{R(n)}+R(n)} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f,t)}{t}dt\right].$$

В итоге, принимая во внимание построенные квадратурные формулы для интегралов $T_1(x)$, $T_2(x)$ и оценки их погрешностей, получаем, что выражение

$$(Tf)^n(x(\tau_l)) = -\frac{2(b-a)}{\pi n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne l}}^{n} \frac{(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_j)))(x(\tau_l)-x(\tau_j),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_l)-x(\tau_j)|^4}\times$$

$$\times\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))+$$

$$+\frac{b-a}{\pi n}\sum_{j\in Q_l}\frac{(\mathbf{n}(x(\tau_j)),\mathbf{n}(x(\tau_l)))}{|x(\tau_j)-x(\tau_l)|^2}\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,(f(x(\tau_j))-f(x(\tau_l)))$$

в опорных точках $x(\tau_l)$, $l=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(Tf)(x)$, причем, учитывая соотношение $R(n)\sim\dfrac{1}{n}$, имеем

$$\max_{l=\overline{1,n}}\left|(Tf)(x(\tau_l))-(Tf)^n(x(\tau_l))\right| \le M\left[\frac{\|\mathrm{grad}\, f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int\limits_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f,t)}{t}dt\right].$$

В результате, принимая во внимание построенные квадратурные формулы для интегралов $(Kf)(x)$, $(Tf)(x)$ и оценки их погрешностей, получаем доказательство теоремы.

Замечание 1. Отметим, что методом построения квадратурной формулы для интеграла $T_2(x)$ можно построить квадратурную формулу и для других сингулярных интегралов по кривой Ляпунова.

Замечание 2. Данный метод для построения квадратурной формулы для сингулярного интеграла в отличие от других известных методов (см., например, [15]–[18]) обладает тем преимуществом, что очень простым способом можно вычислить коэффициенты этой квадратурной формулы.

Замечание 3. Как видно, если $f \equiv \mathrm{const}$, то $(Tf)^n(x(\tau_l)) = 0 \ \ \forall\, l = \overline{1,n}$, и по теореме Гаусса (см. [12, с. 452])

$$\int_L \frac{(x-y,\mathbf{n}(y))}{|x-y|^2}dL_y = -\pi, \quad x \in L,$$

а значит, $(Tf)(x) = 0$, $x \in L$. Следовательно, в классе постоянных функций f выполняется равенство

$$(Tf)^n(x(\tau_l)) = (Tf)(x(\tau_l)) = 0 \quad \forall l = \overline{1,n},$$

т.е. построенная квадратурная формула для нормальной производной логарифмического потенциала двойного слоя является эффективным.

3. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Пусть C^n — пространство n-мерных векторов $z^n = (z_1^n, \ldots, z_n^n)^{\mathrm{T}}$, $z_l^n \in C$, $l = \overline{1,n}$, с нормой $\|z^n\| = \max\limits_{l=\overline{1,n}} |z_l^n|$, где запись "$a^{\mathrm{T}}$" означает транспонировку вектора a. Используя квадратурные формулы (2.2) и (2.3), интегральное уравнение (1.4) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^n — приближенных значений $\rho(x(\tau_l))$, $l = \overline{1,n}$, которую запишем в виде

$$(I^n + A^n)z^n = B^n f^n, \tag{3.1}$$

где I^n — единичный оператор на пространстве C^n, $f^n = p^n f$, а $p^n : C(L) \to C^n$ — линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^n f = (f(x(\tau_1)), \ldots, f(x(\tau_n)))^{\mathrm{T}}$$

и называемый оператором простого сноса.

Теорема 3. *Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция на L и*

$$\int_0^d \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}dt < \infty.$$

Тогда уравнения (1.4) *и* (3.1) *имеют единственные решения $\rho_* \in C(L)$ и $z_*^n \in C^n$ $(n \geq n_0)$ соответственно, и $\|z_*^n - p^n\rho_*\| \to 0$ при $n \to \infty$ с оценкой скорости сходимости*

$$\|z_*^n - p^n\rho_*\| \leq M\left[\omega(\mathrm{grad}\, f, 1/n) + \frac{\|f\|_\infty + \|\mathrm{grad}\, f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\mathrm{grad}\, f, t)}{t}dt\right].$$

Доказательство. Отметим, что здесь мы будем пользоваться теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [19]), при этом обозначения и необходимые определения и предложения возьмем из [19]. Теперь проверим выполнение условий теоремы 4.2 из [19]. В [2] доказано, что $\mathrm{Ker}(I + A) = \{0\}$, где I — единичный оператор на пространстве $C(L)$. Кроме того, операторы $I^n + A^n$ фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $p^n : C(L) \to C^n$ линейны и ограничены. Принимая во внимание способ разбиения кривой L на элементарные части, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\|p^n\varphi\| = \lim_{n\to\infty}\max_{l=\overline{1,n}}|\varphi(x(\tau_l))| = \max_{x\in L}|\varphi(x)| = \|\varphi\|_\infty \quad \forall\, \varphi \in C(L).$$

Следовательно, система операторов простого сноса $P = \{p^n\}$ является связывающей для пространств $C(L)$ и C^n. Тогда из теоремы 2 получаем, что по определению 1.1 из [19] $B^n f^n \xrightarrow{P} Bf$. Кроме того, из теоремы 1 получаем, что по определению 2.1 из [19] $I^n + A^n \xrightarrow{PP} I + A$. Так как по определению 3.2 из [19] $I^n \to I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из [19] осталось проверить условие компактности, которое, ввиду предложения 1.1 из [19], равносильно условию: $\forall\{z^n\},\ z^n \in C^n,\ \left\|z^n\right\| \le M$ существует относительно компактная последовательность $\{A_n z^n\} \subset C(L)$ такая, что

$$\left\|A^n z^n - p^n\left(A_n z^n\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В качестве $\{A_n z^n\}$ выберем последовательность

$$\left(A_n z^n\right)(x) = \left(\tilde{K}_n z^n\right)(x) - i\eta\left(S_n z^n\right)(x),$$

где

$$\left(S_n z^n\right)(x) = 2\sum_{j=1}^{n} z_j^n \int_{L_j} \Phi(x,y)\,dL_y, \quad \left(\tilde{K}_n z^n\right)(x) = 2\sum_{j=1}^{n} z_j^n \int_{L_j} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \vec{n}(x)}\,dL_y, \quad x \in L.$$

Возьмем любые точки $x', x'' \in L$ такие, что $|x' - x''| = \delta < \min\{1, d\}/2$. Очевидно, что

$$\left|\left(S_n z^n\right)(x') - \left(S z^n\right)(x'')\right| \le 2\left\|z^n\right\| \int_L \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y \le$$

$$\le 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y +$$

$$+ 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y +$$

$$+ 2\left\|z^n\right\| \int_{L_d(x')\backslash(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y + 2\left\|z^n\right\| \int_{L\backslash L_d(x')} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y.$$

Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, имеем

$$\int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x' - y|}\,dL_y \le M \int_0^{\delta/2} \left|\ln t\right| dt \le M\delta\left|\ln\delta\right|,$$

$$\int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|,$$

$$\int_{L_{\delta/2}(x')} \left|\Phi(x'',y)\right| dL_y = \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x'' - y|}\,dL_y \le \frac{1}{2\pi} \int_{L_{\delta/2}(x')} \ln\frac{1}{|x' - y|}\,dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|$$

и

$$\int_{L_{\delta/2}(x'')} \left|\Phi(x',y)\right| dL_y \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Так как для любого $y \in L_d(x')\backslash(L_{\delta/2}(x') \cup L_{\delta/2}(x''))$

$$|x' - y| \le |x' - x''| + |x'' - y| \le 3|x'' - y|,$$

$$|x'' - y| \le 3|x' - y|,$$

то

$$\left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\ln\frac{|x'' - y|}{|x' - y|}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\ln\left(1 + \frac{|x'' - y| - |x' - y|}{|x' - y|}\right)\right| \le$$

$$\le M\frac{|x'' - y| - |x' - y|}{|x' - y|} \le M\frac{|x' - x''|}{|x' - y|} \le \frac{M\delta}{|x' - y|} \quad \forall y \in L_d(x')\backslash(L_{\delta/2}(x') \cup L_{\delta/2}(x'')),$$

а значит,

$$\int_{L_d(x')\backslash(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \left|\Phi(x',y) - \Phi(x'',y)\right| dL_y \le M\delta \int_{L_d(x')\backslash(L_{\delta/2}(x')\cup L_{\delta/2}(x''))} \frac{dL_y}{|x' - y|} \le M\delta\int_{\delta}^{d} \frac{dt}{t} \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{L\setminus L_d(x')} \left|\Phi(x',y)-\Phi(x'',y)\right| dL_y \le M\delta.$$

Суммируя выше полученные оценки, находим

$$\left|\left(S_n z^n\right)(x')-\left(S_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\vec{n}(x)}=\frac{1}{2\pi}\frac{(y-x,\mathbf{n}(x))}{|x-y|^2},$$

тогда, поступая точно также, как и в доказательстве теоремы 3.1 из [20], нетрудно показать, что

$$\left|\left(\tilde{K}_n z^n\right)(x')-\left(\tilde{K}_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|.$$

В результате

$$\left|\left(A_n z^n\right)(x')-\left(A_n z^n\right)(x'')\right| \le M\delta\left|\ln\delta\right|, \tag{3.2}$$

а значит, $\{A_n z^n\}\subset C(L)$. Относительная компактность последовательности $\{A_n z^n\}$ следует из теоремы Арцеля. Действительно, равномерная ограниченность непосредственно вытекает из условия $\left\|z^n\right\|\le M$, а равностепенная непрерывность следует из оценки (3.2). Кроме того, поступая точно также, как и в [13], получаем, что

$$\left\|A^n z^n - p^n\left(A_n z^n\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из [19], получаем, что уравнения (1.4) и (3.1) имеют единственные решения $\rho_*\in C(L)$ и $z_*^n\in C^n$ $(n\ge n_0)$ соответственно, причем

$$c_1\delta_n \le \left\|z_*^n - p^n\rho_*\right\| \le c_2\delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_{n\ge n_0}\left\|I^n + A^n\right\| > 0, \quad c_2=\sup_{n\ge n_0}\left\|(I^n+A^n)^{-1}\right\|<\infty,$$

$$\delta_n=\max_{l=\overline{1,n}}\left|\rho_*(x(\tau_l))+\left(A^n\rho_*\right)(x(\tau_l))-\left(B^n f\right)(x(\tau_l))\right|.$$

Так как

$$\rho_*(x(\tau_l))=(Bf)(x(\tau_l))-(A\rho_*)(x(\tau_l)),$$

то, принимая во внимание оценки погрешности квадратурных формул (2.2) и (2.3), имеем

$$\delta_n=\max_{l=\overline{1,n}}\left|\left((A\rho_*)^n(x(\tau_l))-(A\rho_*)(x(\tau_l))\right)+\left((Bf)(x(\tau_l))-(Bf)^n(x(\tau_l))\right)\right| \le$$

$$\le M\left(\omega(\rho_*,1/n)+\left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n}+\frac{\|f\|_\infty+\|\operatorname{grad} f\|_\infty}{\sqrt{n}}+\int\limits_0^{1/\sqrt{n}}\frac{\omega(\operatorname{grad} f,t)}{t}dt\right).$$

Так как $\rho_*=(I+A)^{-1}(Bf)$, то, учитывая следствие 1 из [10], находим

$$\left\|\rho_*\right\|_\infty \le \left\|(I+A)^{-1}\right\|\left(\|Tf\|_\infty+|\eta|\,\|Kf\|_\infty+\|f\|_\infty\right)\le M\left(\|f\|_\infty+\|\operatorname{grad} f\|_\infty+\int\limits_0^{\operatorname{diam}L}\frac{\omega(\operatorname{grad} f,t)}{t}dt\right).$$

Кроме того, очевидно, что

$$\omega(\rho_*,1/n)=\omega(Bf-A\rho_*,1/n)\le\omega(Bf,1/n)+\omega(A\rho_*,1/n)\le\omega(Tf,1/n)+$$

$$+(1+|\eta|)(\omega(Kf,1/n)+\omega(f,1/n))+\omega(\tilde{K}\rho_*,1/n)+(1+|\eta|)\,\omega(S\rho_*,1/n).$$

Тогда, принимая во внимание следствие 2 из [10] и неравенства (2.4),

$$\omega(Kf,1/n)\le M\|f\|_\infty\frac{\ln n}{n}, \quad \omega(S\rho_*,1/n)\le M\left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n}, \quad \omega(\tilde{K}\rho_*,1/n)\le M\left\|\rho_*\right\|_\infty\frac{\ln n}{n},$$

находим, что

$$\omega(\rho_*, 1/n) \le M\left(\|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega(\operatorname{grad} f, 1/n) + \int\limits_o^{1/n} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t}\,dt + \frac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{\operatorname{diam} L} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t^2}\,dt\right).$$

Так как (см. [21, с. 55])

$$\int\limits_o^{1/n} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t}\,dt + \frac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{\operatorname{diam} L} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t^2}\,dt \le M\omega(\operatorname{grad} f, 1/n),$$

то

$$\omega(\rho_*, 1/n) \le M\left(\|f\|_\infty \frac{\ln n}{n} + \omega(\operatorname{grad} f, 1/n)\right).$$

В результате получаем

$$\delta_n \le M\left(\omega(\operatorname{grad} f, 1/n) + \frac{\|f\|_\infty + \|\operatorname{grad} f\|_\infty}{\sqrt{n}} + \int\limits_0^{1/\sqrt{n}} \frac{\omega(\operatorname{grad} f, t)}{t}\,dt\right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Burton A.J., Miller G.F.* The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary–value problems // Proceed. Royal Soc. London. 1971. V. A323. P. 201–220.
3. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
4. *Мусаев Б.И., Халилов Э.Г.* О приближенном решении одного класса граничных интегральных уравнений методом коллокации // Тр. Института математики и механики АН Азербайджана. 1998. Т. 9 (17). С. 78–84.
5. *Colton D., Kress R.* Iterative methods for solving the exterior Dirichlet problem for the Helmholtz equation with applications to the inverse scattering problem for low frequency acoustic waves // J. Math. Analys. Appl. 1980. V. 77. P. 60–72.
6. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
7. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. Computer Model. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
8. *Гюнтер Н.М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 415 с.
9. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО “Янус”, 1995. 521 с.
10. *Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.* О производной логарифмического потенциала двойного слоя // Вестник Томского государственного университета. Математика и механ. 2019. № 62. С. 38–54.
11. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматлит, 1962. 599 с.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
13. *Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N.* Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proceed. IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. № 1. P. 155–162.
14. *Кустов Ю.А., Мусаев Б.И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения // Деп. в ВИНИТИ. № 4281–81. 60 с.
15. *Алиев Р.А.* Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений // Матем. заметки. 2006. Т. 79. № 6. С. 803–824.
16. *Бесаева З.В., Хубежты Ш.С.* Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения с применением рядов Чебышева // Владикавказский матем. ж. 2016. Т. 18. № 4. С. 15–22.
17. *Шешко М.А., Шешко С.М.* Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши на сложном контуре // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47. № 9. С. 1331–1343.
18. *Li-xia Cao.* Regularization method for complete singular integral equation with Hilbert kernel on open arcs // Proc. of the 2nd Internat. Conf. Systems Engineer. Model. (ICSEM-13). 2013. P. 0997–01000.
19. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техн. Матем. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.
20. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 7. С. 1340–1348.
21. *Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1980. 416 с.