ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 967–976

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ПАРАМЕТРИКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2021 г. М. Отелбаев[1,*], А. П. Солдатов[2,3,]**

[1] 050040 Алматы, ул. Масанчи, 34\1, Междунар. ун-т информационных технологий, Казахстан

[2] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[3] 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: sadybekov@math.kz

**e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 06.08.2020 г.
Переработанный вариант 06.08.2020 г.
Принята к публикации 18.11.2020 г.

Введены обобщенные интегралы с ядрами, зависящими от разности аргументов, взятые по области и гладкому контуру, границе этой области. Эти ядра возникают как параметриксы эллиптических систем первого порядка с переменными коэффициентами. С помощью указанных интегралов (с комплексной плотностью по области и вещественной по контуру) описаны представления гладких в замкнутой области вектор-функций. Установлена фредгольмовость полученного представления в соответствующих банаховых пространствах. Библ. 18.

Ключевые слова: интегралы Помпейю и типа Коши, ограниченный оператор, фредгольмовость, параметрикс, эллиптические системы.

DOI: 10.31857/S0044466921030157

1. ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОМПЕЙЮ И ТИПА КОШИ

Пусть конечная область D на комплексной плоскости ограничена гладким контуром Γ класса $C^{1,\nu}$, $0<\nu<1$. Рассмотрим в этой области $l\times l$-матрицу-функцию $A(z)\in C^{1,\nu}(\overline{D})$, собственные значения которой не вещественны для всех z. В этом случае в верхней и нижней полуплоскостях лежит одно и то же число собственных значений, соответственно, l_1 и l_2 с $l_1+l_2=l$. Случаи $l_1=l$ или $l_2=l$ не исключаются.

Удобно с каждым комплексным числом $z=x+iy$ связать матрицу $z_{[A(t)]}=x1+yA(t)$, которая, очевидно, при $z\neq 0$ обратима. Здесь и ниже 1 означает единичную матрицу, порядок которой ясен из контекста. Аналогичный смысл имеет и комплексный матричный дифференциал $dz_{[A(t)]}=1dx+A(t)dy$, который используем в криволинейных интегралах по ориентируемому контуру Γ. Для определенности последний ориентируется положительно по отношению к области D, т.е. оставляет ее слева.

Исходя из l-вектор-функций $\varphi^0\in C(\Gamma)$ и $\varphi^1\in C(\overline{D})$, введем криволинейный интеграл по контуру

$$(I\varphi^0)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t),\qquad z\in D, \tag{1.1}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Комитетом науки Минобрнауки Республики Казахстан (грант № AP 08857604).

где матричные выражения поставлены впереди l-векторов φ^0 и действуют на него по обычному правилу, и интеграл по области

$$(T\varphi^1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D (t-z)^{-1}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2 t, \quad z \in D, \tag{1.2}$$

где $d_2 t$ — элемент площади. Заметим, что по отношению к единичному касательному вектору $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ к контуру Γ в точке t, направленному в соответствии с его ориентацией, матричный дифференциал $dt_{[A(t)]} = [e(t)]_{[A(t)]}d_1 t$, где $d_1 t$ есть элемент длины дуги.

В случае скалярной матрицы $A = i$ интеграл $I\varphi$ представляет собой классический интеграл типа Коши (см. [1], [2]), а $T\varphi$ с точностью до множителя $-2i$ совпадает с интегралом Помпейю (см. также [4]).

Отметим, что при фиксированном $z = x + iy \in \mathbb{C}$ матрица-функция $X(\xi) = \xi^{-1}_{A(z)}$ является параметриксом (см. [5]) эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A(z)\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

для вектор-функции $U = (U_1,\dots,U_l)$. Другими словами, с точностью до положительного множителя она является фундаментальной матрицей эллиптической системы

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} - A(z)\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = 0.$$

Как и в случае классических интегралов типа Коши для точек $z = t_0 \in \Gamma$ можем ввести обобщенный сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi^0)(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1.3}$$

который понимается в смысле главного значения.

Введем еще интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \xi^{-1}_{[A(t)]}d\xi_{[A(t)]}, \quad t \in \Gamma, \tag{1.4}$$

по единичной окружности $\mathbb{T}$, ориентированной против часовой стрелки. Очевидно, матрица-функция $E(t)$ вместе с $A(t)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\Gamma)$. Ее можно рассматривать как значение скалярной аналитической вне вещественной оси функции

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} (\xi_1 + \zeta\xi_2)^{-1}(d\xi_1 + \zeta d\xi_2), \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0,$$

от матрицы $A(t)$. Очевидно, эта функция тождественно равна ± 1 в полуплоскости $\pm\operatorname{Im}\zeta > 0$. В частности, матрица $E(t) = 1$ при $l_1 = l$ и $E(t) = -1$ при $l_2 = l$. В общем случае можно лишь утверждать, что $E^2(t) = 1$. Ясно, что как функция от $t \in \Gamma$ эта матрица принадлежит $C^{1,\nu}(\Gamma)$.

Удобно интеграл $U = I\varphi^0$ записать в виде

$$(I\varphi^0)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma Q(t; t-z, dt)\varphi^0(t), \tag{1.5}$$

где отношению к $\xi = t - z$ и $\eta = d1_1 + idt_2$, $t = t_1 + it_2 \in \Gamma$ положено

$$Q(t;\xi,\eta) = \xi^{-1}_{[A(t)]}\eta_{[A(t)]}.$$

Очевидно, по переменной t матрица-функция $Q(t;\xi,\eta)$ принадлежит классу $C^{1,\nu}(\Gamma)$ вместе со всеми частными производными по ξ_1, ξ_2 равномерно по $\xi,\eta \in \mathbb{T}$. Заметим, что функция $Q(t;\xi,\xi)$ не зависит от ξ, поэтому по терминологии [6] интеграл $U = I\varphi^0$ с ядром Q этого типа также называем обобщенным интегралом типа Коши. Поэтому теоремы 3.8.1 и 3.8.2 из [6] приводят к следующему результату.

Теорема 1.1. *При* $0 < \mu < \nu$ *оператор* I *ограничен* $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\bar{D})$ *и* $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\bar{D})$, *причем для граничных значений функции* $U = I\varphi^0$ *справедлива формула*

$$2U^{+}(t) = E(t)\varphi^0(t) + (S\varphi^0)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{1.6}$$

где $\phi^{+}(t_0) = \lim \phi(z)$ *при* $z \to t_0 \in \Gamma$.

В основе доказательства теоремы 3.8.2 лежит формула дифференцирования интеграла $U = I\varphi$, составляющая суть леммы 3.8.2 статьи [6]. Применительно к (1.5) для фиксированного $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ эта формула имеет следующий вид:

$$\left(\eta_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial U}{\partial y}\right)(z) \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} [Q_0(t;\xi,\eta)\varphi^0(t) + Q(t;\xi,\eta)(\varphi^0)'(t)]d_1 t, \tag{1.7}$$

где

$$Q_0(t;\xi,\eta) = Q_t'(t;\xi,\eta) = \{\xi^{-1}_{[A(t)]}\eta_{[A(t)]}\}_t'.$$

Здесь штрих означает производную по параметру длины дуги, отсчитываемой на контуре в положительном направлении.

В этой формуле при фиксированном η выражения $Q(t;\xi,\eta)$ и $Q_0(t;\xi,\eta)$ уже не являются ядрами Коши и по отношению к ним нужно воспользоваться теоремой 3.6.1 из [6]. На основании этой теоремы операторы, определяемые слагаемыми в правой части (1.7), ограничены $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}(\bar{D})$, что приводит к ограниченности оператора $I : C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\bar{D})$.

Из теоремы 1.1 следует, что сингулярный оператор S ограничен в пространствах $C^{\mu}(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Зависимость S от матрицы $A - S_{(A)}$, в частности, для скалярной матрицы $A = i$ имеем классический оператор Коши $S_{(i)}$.

Лемма 1.1. (а) *Оператор* $S_{(A)} - S_{(i)}$ *компактен в пространствах* $C^{\mu}(\Gamma)$ *и* $C^{1,\mu}(\Gamma)$. *В частности, аналогичным свойством обладает и оператор* $S_{(A)} - S_{(\bar{A})}$.

(б) *Пусть матрица-функция* $a \in C^{\mu}(\Gamma)$ *рассматривается как оператор умножения* $\varphi \to a\varphi$. *Тогда оператор* $aS - Sa$ *компактен в пространстве* $C^{\mu}(\Gamma)$. *При дополнительном предположении* $a \in C^{1,\nu}(\Gamma)$ *этот оператор компактен и в пространстве* $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Доказательство. (а) Утверждение леммы по отношению к C^{μ} будет установлено, если убедимся, что для любой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ интегральный оператор

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\left[(t-t_0)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\varphi^0(t) - \frac{dt}{t-t_0}\varphi^0(t)\right], \quad t_0 \in \Gamma_0,$$

компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma_0)$. С этой целью выберем параметризацию $\gamma \in C^{1,\nu}([0,1])$ дуги Γ_0, что в силу принятого предположения $\Gamma \in C^{1,\nu}$ возможно. Тогда оператор K можем записать в форме

$$(K\varphi)[\gamma(s_0)] = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{k(s_0,s)}{s-s_0}\varphi[\gamma(s)]ds, \quad 0 \le s_0 \le 1,$$

где положено

$$k(s_0,s) = \left[\frac{\gamma(s)-\gamma(s_0)}{s-s_0}\right]_{[A(\gamma(s))]}[\gamma'(s)]_{[A(\gamma(s))]} - \gamma'(s).$$

Видно, что функция $k(s_0,s)$ принадлежит $C^{\nu}([0,1]\times[0,1])$ и обращается в нуль при $s = s_0$. Поэтому остается воспользоваться теоремой 3.2.1 из [6], обеспечивающей компактность оператора K.

По отношению к $C^{1,\mu}$ доказательство леммы основывается на формуле дифференцирования сингулярного интеграла. Как показано в теореме 3.9.2 из [6], формула (1.7) вместе с соотношениями для граничных значений приводят к формуле дифференцирования

$$(S\varphi)' = S_0\varphi + S_1\varphi', \quad \varphi = \varphi^0, \tag{1.8}$$

с операторами

$$(S_0\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t_0)]\varphi(t)d_1t, \quad (S_1\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q[t; t - t_0, e(t_0)]\varphi(t)d_1t,$$

где $e(t_0) = e_1(t_0) + ie_2(t_0)$ – единичный касательный вектор к Γ в точке t_0, направленный в направлении выбранной ориентации контура.

На основании теорем 3.2.1 и 3.5.1 из [6], примененных к слагаемым равенства

$$(S_0\varphi)(t_0) = \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t_0) - e(t)]\varphi(t)d_1t + \int_\Gamma Q_0[t; t - t_0, e(t)]\varphi(t)d_1t,$$

оператор S_0 ограничен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Из этих же соображений аналогичный факт справедлив и для оператора S_1. Поскольку $Q[t; \xi, e(t)]d_1t = Q(t; \xi, dt)$, этот оператор можем представить в виде

$$S_1 = K_1 + S \tag{1.9}$$

с компактным оператором K_1.

Очевидно, формулы, аналогичные (1.8), (1.9), можно записать и для оператора $S_{(i)}$, отвечающего $A = i$, а также для разности $N = S_{(A)} - S_{(i)}$. С учетом первой части леммы

$$(N\varphi)' = N_0\varphi + N_1\varphi',$$

где оператор N_0 ограничен, а N_1 – компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. С помощью этой формулы компактность оператора N в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ выводится непосредственно.

Вторая часть (б) леммы доказывается аналогично.

С помощью леммы 1.1 аналогично [7] классические результаты из [1] о разрешимости сингулярных интегральных уравнений распространяются с $S_{(i)}$ на оператор $S = S_{(A)}$.

Теорема 1.2. *Оператор* $N\varphi = \operatorname{Re}(G_1\varphi + SG_2\varphi)$*, где* $l \times l$ *– матрицы-функции* $G_1, G_2 \in C^\nu(\Gamma)$*, фредгольмов в пространстве* $C^\mu(\Gamma)$ *тогда и только тогда, когда матрица* $G = \operatorname{Re} G_1 + i \operatorname{Im} G_2$ *обратима, и его индекс дается формулой*

$$\operatorname{ind} N = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_\Gamma, \tag{1.10}$$

где приращение аргумента берется на контуре в соответствии с его ориентацией.

Если дополнительно $G_1, G_2 \in C^{1,\nu}(\Gamma)$*, то любое решение* $\varphi \in C^\mu(\Gamma)$ *уравнения* $N\varphi = f$ *с правой частью* $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ *также принадлежит классу* $C^{1,\mu}(\Gamma)$*. В частности, оператор* N *фредгольмов в пространстве* $C^{1,\mu}(\Gamma)$ *с тем же индексом.*

Рассмотрим подробнее композицию с I дифференциального оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial y} - A(z)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Лемма 1.2. *Оператор* LI *ограничен* $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ *и, в частности, компактен*: $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$.

Доказательство. Очевидно, утверждение леммы достаточно установить локально в области $D_0 \subseteq D$, примыкающей к граничной дуге $\Gamma_0 = \Gamma \cap \overline{D}$ достаточно малой длины. Пусть подобласть

$D_1 \supseteq \overline{D}_0$ и дуга Γ_1 имеют аналогичный смысл. Тогда утверждение леммы достаточно установить по отношению к оператору

$$(I_1\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(t-z)^{-1}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\psi(t), \quad z \in D_0, \tag{1.12}$$

т.е. доказать, что оператор LI_1 ограничен: $C^{\mu}(\Gamma_1) \to C^{\mu}(\overline{D}_0)$.

Прямое дифференцирование (1.12) дает выражение

$$(LI_1\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}[A(t)-A(z)](t-z)^{-2}_{[A(t)]}dt_{[A(t)]}\psi(t), \quad z \in D_0. \tag{1.13}$$

Существуют такие матрицы-функции $A_1(z,t), A_2(z,t) \in C^{\nu}(\overline{D}_1 \times \overline{D}_1)$, что

$$A(t) - A(z) = A_1(z,t)(t-z) + A_2(z,t)(\overline{t}-\overline{z}), \quad z,t \in D_1. \tag{1.14}$$

В самом деле, это утверждение инвариантно относительно линейных преобразований плоскости, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что прямые, параллельные координатным осям, могут пересекать дугу Γ_1 не более чем в одной точке. При этом саму область D_1 можно выбрать так, чтобы ее граница состояла из Γ_1 и двух отрезков, параллельных координатным осям. В этом случае возможность разложения (1.14) достигается интегрированием от t к z по двум отрезкам этого типа.

Подстановка (1.14) в (1.13) дает выражение

$$(LI_1\psi)(z) = U_1(z,z) + U_2(z,z), \quad U_j(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}A_j(\zeta,t)Q_j(t,t-z)\psi(t)d_1t,$$

где $Q_1(t,\xi) = \xi\xi^{-2}_{[A(t)]}e(t)_{[A(t)]}$ и $Q_2(t,\xi) = \overline{\xi}\xi^{-2}_{[A(t)]}e(t)_{[A(t)]}$. К операторам U_j можно применить вторую часть теоремы 3.8.1 из [6], согласно которой функции U_j принадлежат $C^{\mu}(\overline{D}_0 \times \overline{D}_0)$ с соответствующей оценкой C^{μ}-норм. В результате приходим к справедливости леммы.

Обратимся к обобщенному интегралу Помпейю (1.2).

Теорема 1.3. *Оператор T ограничен: $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, причем*

$$(LT\varphi^1) = E\varphi^1 - T^1\varphi^1 \tag{1.15}$$

с интегральным оператором

$$(T^1\varphi^1)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D[A(t)-A(z)](t-z)^{-2}_{[A(t)]}\varphi^1(t)d_2t, \quad z \in D,$$

который компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$.

Доказательство основано на применении теорем 3.5.1 и 3.5.3 из [6]. С этой целью покажем, что для любой полуокружности $\mathbb{T}^+$ единичной окружности $\mathbb{T}$ интеграл

$$\int_{\mathbb{T}^+}\xi^{-2}_{[A(t)]}d_1\xi = 0. \tag{1.16}$$

В самом деле, этот интеграл есть значение $\chi_0(A)$ от матрицы $A = A(t)$ аналитической вне вещественной оси функции

$$\chi_0(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^+}\frac{d_1\xi}{(\xi_1+\zeta\xi_2)^2}, \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что эта функция тождественно равна нулю. Очевидно,

$$\chi_0(\zeta) = \int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\frac{d\theta}{(\cos\theta+\zeta\sin\theta)^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{(t+\zeta)^2}.$$

Следовательно, для любых вещественных ненулевых чисел a, b справедливы соотношения $\chi_0(\zeta+a) = b\chi_0(b\zeta) = \chi_0(\zeta)$, что возможно только при $\chi_0 \equiv 0$.

Таким образом, применительно к ядру $Q(t,\xi) = (2\pi i)^{-1}\xi_{[A(t)]}^{-2}$ равенство (1.16) переходит в условие (3.5.1) теоремы 3.5.1 из [6]. Поэтому на основании теорем 3.5.2 и 3.5.3 из [6] оператор T ограничен: $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, причем

$$\frac{\partial(T\varphi^1)}{\partial x}(z) = -\sigma_1(z)\varphi^1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D (t-z)_{[A(t)]}^{-2}\varphi^1(t)d_2t,$$

$$\frac{\partial(T\varphi^1)}{\partial y}(z) = -\sigma_2(z)\varphi^1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D A(t)(t-z)_{[A(t)]}^{-2}\varphi^1(t)d_2t,$$

где

$$\sigma_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \xi_j\xi_{[A(z)]}^{-1}d_1\xi, \qquad j = 1, 2.$$

Очевидно,

$$-\sigma_2(z) + A(z)\sigma_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} [-\xi_2 + \xi_1 A(z)]\xi_{[A(z)]}^{-1}d_1\xi = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \xi_{[A(z)]}^{-1}d\xi_{[A(z)]},$$

так что с учетом (1.4) это выражение совпадает с $E(z)$. В результате приходим к соотношению (1.15). Что касается компактности оператора T^1, то это свойство является следствием теоремы 3.2.1 из [6].

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Напомним, что при каждом $z \in \overline{D}$ собственные значения матрицы $A(z)$ лежат вне действительной оси $\mathbb{R}$, суммарное число их в верхней и нижней полуплоскостях обозначено, соответственно, l_1 и l_2. Известно, что эту матрицу можно привести к специальному блочно-диагональному виду: существует такая обратимая матрица-функция $B(z) \in C^{1,\nu}(\overline{D})$, что

$$B^{-1}AB = J, \quad J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где все собственные значения матрицы $J_1(J_2)$ лежат в верхней (нижней) полуплоскости. В частности, J_k является $l_k \times l_k$-матрицей.

Для односвязных областей этот факт был установлен В.С. Виноградовым (см. [8]), в общем случае многосвязных областей М.М. Сиражутдиновым (см. [9], [10]).

Исходя из пары l-вектор-функций $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1)$, где φ^0 и φ^1 заданы на, соответственно, Γ и D, введем оператор

$$R\varphi = I(B\varphi^0) + T(B\varphi^1). \tag{2.2}$$

В дальнейшем этот оператор рассматриваем для комплексных вектор-функций $\varphi^1 \in C^{\mu}(\overline{D})$ и вещественных вектор-функций φ^0, указывая этот факт обозначением $\varphi^0 \in C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$ или $\varphi^0 \in C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$.

Наряду с $C^{1,\mu}(\overline{D})$, введем в рассмотрение пространство $C^{\mu}_A(\overline{D})$ всех l-вектор-функций $U \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D)$, для которых $LU \in C^{\mu}(\overline{D})$. Это пространство зависит от матрицы A, определяющей дифференциальное выражение L, и снабжается нормой

$$|U| = |U|_{C^{\mu}} + |LU|_{C^{\mu}},$$

относительно которой оно банахово.

В самом деле, пусть последовательности функций $U_n \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D)$ и LU_n сходятся, соответственно, к U и V по C^{μ}-норме. Достаточно убедиться, что $U \in C^1(D)$ и $LU = V$. Очевидно, функция U является слабым решением уравнения $LU = V$, т.е. выполнено тождество

$$\int_D V(z)\varphi(z)d_2z = -\int_D U(z)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A\varphi}{\partial x}\right)d_2z,$$

справедливое для любой l-вектор-функции $\varphi \in C^1(D)$ с компактным носителем. Поэтому остается воспользоваться тем (см. [11], [12]), что для эллиптических систем любое слабое решение в области D с правой частью $V \in C^{\mu}(\overline{D})$ является классическим (и принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D}_0)$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D}_0 \subseteq D$).

Очевидно, оператор T ограничен: $C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}_A(\overline{D})$. В силу леммы 1.2, этот факт распространяется и на $\mathbb{R}$-линейный оператор I, который ограничен: $C^{\mu}(\Gamma) \to C^{\mu}_A(\overline{D})$.

Таким образом, на основании теорем 1.1, 1.3 и леммы 1.2 имеем ограниченные $\mathbb{R}$-линейные операторы

$$R:\quad C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D}), \tag{2.3а}$$

$$R:\quad C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D}) \to C^{\mu}_A(\overline{D}). \tag{2.3б}$$

Теорема 2.1. *Каждый из операторов* (2.3) *фредгольмов и его индекс равен* $l(m-2)$, *где* m — *число связных компонент контура* Γ.

Доказательство достаточно провести для случая $l_1 = l$, $l_2 = 0$, когда все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости.

В самом деле, из определений (1.1), (1.2) следует, что

$$I_A(B\varphi^0) = BI_J\varphi^0, \quad T_A(B\varphi^1) = BT_J\varphi^1,$$

где указана явно зависимость операторов от матрицы A. Отсюда приходим к равенству $R_A\varphi = I_J(\varphi^0) + T_J(\varphi^1)$, согласно которому утверждение теоремы достаточно установить по отношению к блочно-диагональной матрице J или, что равносильно, по отношению к каждой из матриц $J = J_1$ и $J = J_2$ в отдельности. В последнем случае имеем очевидное соотношение

$$\overline{I_J\varphi^0} + \overline{T_J\varphi^1} = -I_{\overline{J}}\varphi^0 - T_{\overline{J}}\overline{\varphi^1},$$

где черта означает комплексное сопряжение, принята во внимание вещественность функции φ^0. Поскольку $\mathbb{R}$-линейное отображение $(\varphi^0,\varphi^1) \to (\varphi^0,\overline{\varphi^1})$ является изоморфизмом, то следует справедливость рассматриваемого предложения.

Итак, пусть все собственные значения матрицы A лежат в верхней полуплоскости. В этом случае матрица E в (1.4) единична, а в (2.2) можем положить $R = 1$. Покажем, что оператор

$$R^{(-1)}U = (\operatorname{Re}U^+, LU), \tag{2.4}$$

который, очевидно, ограничен: $C^{1,\mu}(\overline{D}) \to C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$ и $C^{\mu}_A(\overline{D}) \to C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$, является регуляризатором к оператору (2.3).

Согласно (1.6) и (1.11), для функции $U = R\varphi$ имеем соотношения

$$2U^+ = \varphi^0 + S\varphi^0 + 2T\varphi^1, \quad LU = LI\varphi^0 + \varphi^1 - T^1\varphi^1. \tag{2.5}$$

Рассмотрим оператор $N = R^{(-1)}R$, который соответственно двум случаям (2.3) и действует в прямом произведении одного из пространств $C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $C^{\mu}(\Gamma)$ на $C^{\mu}(\overline{D})$, т.е. представляет собой операторную 2×2-матрицу

$$N = \begin{pmatrix} N^{00} & N^{01} \\ N^{10} & N^{11} \end{pmatrix}.$$

Согласно (2.5), элементы этой матрицы действуют по формулам

$$2N^{00}\varphi^0 = \varphi^0 + \mathrm{Re}(S\varphi^0), \quad N^{01}\varphi^1 = \mathrm{Re}(T\varphi^1)^+,$$
$$N^{10}\varphi^0 = LI\varphi^0, \quad N^{11}\varphi^1 = \varphi^1 - T^1\varphi^1.$$

Условимся для двух операторов N_1 и N_2, заданных и ограниченных в одном и том же пространстве, писать $N_1 \sim N_2$, если их разность является компактным оператором. Утверждается, что соответственно двум случаям (2.3) имеют место соотношения

$$N^{00} \sim 1, \quad N^{11} \sim 1, \quad N^{10} \sim 0, \tag{2.6а}$$
$$N^{00} \sim 1, \quad N^{11} \sim 1, \quad N^{01} \sim 0. \tag{2.6б}$$

В самом деле, поскольку

$$2\,\mathrm{Re}(S\varphi^0) = S_A\varphi^0 + \overline{S_A\varphi^0} = S_A\varphi^0 - S_{\bar{A}}\varphi^0,$$

первое соотношение вытекает из леммы 1.1(а), а второе — из теоремы 1.3. Что касается третьего соотношения, то в случае (б) оно очевидно, а в случае (а) непосредственно следует из леммы 1.2.

Соотношения (2.6) показывают, что соответственно двум случаям как 2×2-матрица оператор

$$\text{(а)}\quad N \sim \begin{pmatrix} 1 & N^{01} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(б)}\quad N \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N^{10} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица в правой части этих соотношений обратима, отсюда на основании известных свойств фредгольмовых операторов заключаем, что оператор N — фредгольмов и его индекс равен нулю.

Напомним, что ограниченный оператор $M: X \to Y$ в банаховых пространствах X и Y полуфредгольмов, если его образ $\mathrm{im}\, M = M(X)$ замкнут и одно из пространств $Y/\mathrm{im}\, M$ и $\ker M = \{x \in X, Mx = 0\}$ конечномерно. В этом случае можем ввести индекс $\mathrm{ind}\, M$, равный разности $\dim(Y/\mathrm{im}\, M) - \dim(\ker M)$, допускающий значения $\pm\infty$. Таким образом, условие конечности индекса выделяет в классе полуфредгольмовых операторов фредгольмовые операторы. Известно (см. [13]), что в банаховом пространстве $\mathscr{L}(X, Y)$ всех ограниченных операторов множество полуфредгольмовых операторов открыто и индекс как функция оператора постоянна на каждой связной компоненте этого множества.

Обратимся к оператору $N = R^{(-1)}R$, который сначала рассмотрим в пространстве $C^{1,\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma) \times C^{\mu}(\bar{D})$. Очевидно,

$$\mathrm{im}\, N \subseteq \mathrm{im}\, R^{(-1)}, \quad \ker R \subseteq \ker N. \tag{2.7}$$

По условию образ $\mathrm{im}\, N$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Поэтому любое подпространство, содержащее $\mathrm{im}\, N$, также обладает этим свойством. Поэтому на основании (2.7) заключаем, что операторы R и $R^{(-1)}$ полуфредгольмовы, причем их индексы противоположны и $\mathrm{ind}\, R^{(-1)} > -\infty$, $\mathrm{ind}\, R < +\infty$. При этом фредгольмовость одного из операторов R, $R^{(-1)}$ влечет фредгольмовость другого.

Напомним, что в каждой точке $z \in \bar{D}$ все собственные значения матрицы $A(z)$ лежат в верхней полуплоскости. Но тогда для любого $0 \le \tau \le 1$ аналогичным свойством обладает и матрица $A_\tau(z) = i(1-\tau) + \tau A(z)$, которая совпадает с постоянной скалярной матрицей i при $\tau = 0$. Пусть операторы I_τ и T_τ определяются как в (1.1), (1.2) по отношению к A_τ и аналогичный смысл имеют R_τ и L_τ, $R_\tau^{(-1)}$. Из определения (2.4) видно, что отображение $\tau \to R_\tau^{(-1)}$ непрерывно;

$$[0,1] \to \mathscr{L}[C^{1,\mu}(\bar{D}), C^{1,\mu}(\Gamma) \times C^{\mu}(\bar{D})].$$

Поскольку по доказанному выше при каждом τ оператор $R_\tau^{(-1)}$ полуфредгольмов, его индекс не зависит от τ. Утверждается, что при $\tau = 0$ операторы R_τ и $R_\tau^{(-1)}$ фредгольмовы и их индексы

$$\mathrm{ind}\, R_0 = -\mathrm{ind}\, R_0^{(-1)} = l(2-m). \tag{2.8}$$

В самом деле, $I_0\varphi^0$ является классическим интегралом типа Коши, определяющим аналитические l-вектор-функции в области D, а $T_0\varphi^1$ – оператором Помпейю. В рассматриваемом случае оператор $T_1^1 = 0$ и равенство (1.15) переходят в $L_0T_0 = 1$. Пусть Γ_j, $1 \le j \le m$, есть связные компоненты контура Γ, причем для определенности контур Γ_m охватывает все остальные. Любая функция $U \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ единственным образом представляется в виде

$$U = T_0L_0U + I_0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{2.9}$$

где функция $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^0(t)d_1t = 0, \quad 1 \le j \le m-1. \tag{2.10}$$

Этот факт является следствием известной теоремы Н.И. Мусхелишвили (см. [1]) о представлении аналитической функции $\phi = U - L_0T_0U$ интегралом типа Коши с вещественной плотностью.

Из (2.9), в частности, следует, что $C^{1,\mu}(\overline{D}) = (\operatorname{im} R_0^{(-1)}) \oplus (i\mathbb{R}^l)$. Это представление показывает (см. [14]), что образ $\operatorname{im} R_0^{(-1)})$ замкнут, так что совместно с (2.10) отсюда следуют его фредгольмовость и формула (2.8) индекса. Поскольку, как отмечалось, индекс операторов R_τ и $R_\tau^{(-1)}$ не зависит от τ, этот индекс конечен и дается той же формулой (2.8). Тем самым утверждение теоремы для случая (а) установлено.

В случае (б) область определения $C^\mu_{A_\tau}(\overline{D})$ оператора $R_\tau^{(-1)}$ зависит от τ, и потому доказательство теоремы требует другого подхода. Достаточно убедиться, что оператор $R^{(-1)}$ фредгольмов: $C^\mu_A(\overline{D}) \to C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})$, и имеет тот же индекс $æ = l(2-m)$, что и в первом случае.

Рассмотрим решение $U \in C^\mu_A(\overline{D})$ уравнения $R_b^{(-1)}U = f$ с правой частью $f = (f^0, f^1)$, в которой $f^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Очевидно, U есть решение краевой задачи

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A(z)\frac{\partial U}{\partial x} = f^1, \quad \operatorname{Re} U^+ = f^0, \tag{2.11}$$

которая удовлетворяет так называемым условиям дополнительности или Шапиро–Лопатинского (см. [9], [12]). Поэтому на основании общих результатов (см. [12], [15]) о гладкости вплоть до границы ее решение U в действительности принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому остается воспользоваться следующим общим утверждением, уже встречающимся в теореме 1.2.

Пусть банаховы пространства вложены $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$, оператор N фредгольмов $X \to Y$ и $N_1x = Nx \in Y_1$ для $x \in Y_1$, причем оператор N_1 ограничен $X_1 \to Y_1$. Тогда если прообраз $N^{-1}Y_1 \subseteq X_1$, то оператор N_1 фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} N_1 = \operatorname{ind} N$.

Теореме 2.1 можно придать следующую эквивалентную формулировку.

Следствие 2.1. Существуют такие конечномерные подпространства $X_0 \subseteq C^{1,\mu}(\overline{D})$ и $Y_0 \subseteq C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})$, для которых $\dim Y - \dim X = l(m-2)$, что любая l-вектор-функция $U \in C^\mu_A(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$U = I\varphi^0 + T\varphi^1 + U_0, \quad U_0 \in X_0, \tag{2.12}$$

где вектор-функции $\varphi^0 \in C^\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $\varphi^1 \in C^\mu(\overline{D})$ и

$$\int_\Gamma \varphi^0(t)\psi^0(t)d_1t + \operatorname{Re}\int_D \varphi^1(z)\psi^1(z)d_2z = 0, \quad \psi = (\psi^0, \psi^1) \in Y_0. \tag{2.13}$$

Если в этом представлении $U \in C^{1,\mu}(\overline{D})$, то и $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Здесь произведения под знаком интегралов означают обычные скалярные произведения l-векторов. Кроме того, согласно теореме 2.1, можно положить

$$X_0 = C^{1,\mu}(\overline{D}) \ominus R[C^{1,\mu}(\Gamma)\times C^\mu(\overline{D})],$$

а в качестве Y_0 можно выбрать ядро $\ker R$ оператора R.

Следствие 2.1 особенно упрощается в случае, когда матрица A постоянна.

Теорема 2.2. *Пусть матрица A постоянна и в разложении* (2.1) *матрица J треугольна* (*например, жорданова*). *Пусть Γ составлено из простых контуров Γ_j, $1 \le j \le m$, причем Γ_m охватывает все остальные контуры.*

Тогда любая l-вектор-функция $U \in C^{\mu}_{A}(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$U = IB\varphi^0 + TB\varphi^1 + iB\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{2.14}$$

где вектор-функции $\varphi^0 \in C^{\mu}_{\mathbb{R}}(\Gamma)$, $\varphi^1 \in C^{\mu}(\overline{D})$ и

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^0(t) d_1 t = 0, \quad 1 \le j \le m-1. \tag{2.15}$$

При этом $U \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ влечет $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, не ограничивая общности, можно считать, что матрица A треугольна и ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости. В этом случае в соответствии с теоремой 1.3 функция $\phi = U - TLU$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - A\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

т.е. по терминологии из [16] является A-аналитической функцией. В этом случае утверждение теоремы для ϕ установлено в [17] (см. также [18]).

Отметим, что в частном случае $A = i$ эта теорема хорошо известна и уже использовалась при доказательстве теоремы 2.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1977.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. 3 изд. М.: Наука, 1977.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. 2-е изд. М.: Наука, 1988.
4. *Оспанов К.Н., Отелбаев М.* Об обобщенной системе Коши—Римана с негладкими коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 1989. № 3. С. 48—56.
5. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
6. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 63. С. 1—179.
7. *Абаполова Е.А., Солдатов А.П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Научные ведомости БелГУ. 2010. № 5 (76). Вып. 18. С. 6—20.
8. *Виноградов В.С.* Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 1971. Т. 7. № 8. С. 1440—1448.
9. *Сиражудинов М.М.* О задаче Римана—Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 11. С. 39—62.
10. *Сиражудинов М.М.* Краевые задачи для общих эллиптических систем на плоскости // Изв. АН. Сер. мат. 1997. Т. 61. № 5. С. 137—176.
11. *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand. New York, 1965.
12. *Валевич Л.Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем // Матем. сб. 1965. Т. 68 (110). № 3. С. 373—416.
13. *Gohberg I., Krein M.* Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators // Uspekhi Math. Nauk [Russian Math. Surveys]. 1957. V. 12. № 2 (74). P. 43—118.
14. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.
15. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. // Pure and Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35—92.
16. *Солдатов А.П.* Гипераналитические функции и их приложения // Современная математика и ее приложения. Тбилиси, Ин-т кибернетики АН Грузии (ISSN 1512-1712). 2004. Т. 15. С. 142—199.
17. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай, Изв. АН СССР (сер. матем.). 1991. Т. 55. № 5. С. 1070—1100.
18. *Солдатов А.П.* Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису // Вестник СамГУ. Естественно-научная сер. 2008. № 8/1 (67). С. 225—234.