ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 977–989

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ ПРИ УСЛОВИИ ДИРИХЛЕ[1)]

© 2021 г. Р. В. Бризицкий[1,*], П. А. Максимов[2,**]

[1] 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

[2] 690950 Владивосток, ул. Суханова, 8, ДВФУ, Россия

*e-mail: mlnwizard@mail.ru

**e-mail: maksimov.pa@students.dvfu.ru

Поступила в редакцию 23.07.2020 г.
Переработанный вариант 28.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для уравнения реакции–диффузии–конвекции, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от решения. Для концентрации рассматривается неоднородное граничное условие Дирихле. При этом нелинейность, порождаемая коэффициентом реакции, не является монотонной во всей области. Доказывается разрешимость задачи управления с граничным, распределенным и мультипликативным управлениями. В случае, когда коэффициент реакции и функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе их анализа для конкретных задач управления устанавливается стационарный аналог принципа bang–bang. Библ. 27.

Ключевые слова: нелинейное уравнение реакции–диффузии–конвекции, граничное условие Дирихле, принцип максимума, задачи управления, система оптимальности, принцип bang–bang.

10.31857/S004446692106003X

1. ВВЕДЕНИЕ. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

На протяжении длительного периода не ослабевает интерес к исследованию краевых задач и задач управления для линейных и нелинейных моделей массо- и теплопереноса (см. [1]–[15]). При этом приложения задач управления не ограничиваются поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах. В рамках оптимизационного подхода задачи восстановления коэффициентов рассматриваемых моделей по дополнительной информации о решении соответствующих краевых задач сводятся к мультипликативным задачам управления. Роль управлений в указанных задачах играют искомые коэффициенты модели (о корректности данного подхода см. [9], [15], [16]). В частности, задачи восстановления параметров среды играют важную роль в задачах тепловой и электромагнитной маскировки (см. [17] и ссылки там). Например, задачу восстановления коэффициента диффузии λ по дополнительной информации о концентрации φ можно свести к рассматриваемой в статье задаче управления, роль управления в которой играет функция λ.

Настоящая работа является продолжением и обобщением результатов [12] и [14] по исследованию разрешимости краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции. Так же данная статья дополняет результаты [12]–[15], посвященные исследованию устойчивости решений экстремальных задач путем установления новых важных свойств оптимальных решений.

[1)]Работа выполнена при поддержке первого автора в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (номер темы: 075-01095-20-00) и при поддержке второго автора Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2020-1482-1, дополнительное соглашение от 21.04.2020).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача для стационарного уравнения конвекции–диффузии–реакции

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \varphi = \psi \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{1.1}$$

Здесь функция φ имеет смысл концентрации загрязняющего вещества, $\mathbf{u}$ – заданный вектор скорости, f – объемная плотность внешних источников вещества, $\lambda(\mathbf{x})$ – коэффициент диффузии, коэффициент реакции $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ нелинейно зависит от концентрации вещества φ, а также от пространственной переменной $\mathbf{x}\in\Omega$. Ниже на задачу (1.1) при заданных функциях λ, f, $\mathbf{u}$, $k(\varphi,\mathbf{x})$ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

В настоящей работе доказываются глобальная разрешимость задачи 1 и локальная единственность ее решения в случае, когда нелинейность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ не является монотонной во всей области Ω, как предполагалось в [12]. Здесь мы полагаем, что нелинейность $k(\varphi,\mathbf{x})\varphi$ монотонна лишь в конкретном подмножестве Ω, тогда как вне данного подмножества коэффициент реакции $k(\varphi,\mathbf{x})$ ограничен по норме. Это позволит расширить круг математических моделей, для которых удается доказать разрешимость краевых и экстремальных задач, включив в их число модели горения из [18]. Для концентрации φ устанавливается строгий принцип минимума и максимума, который существенно используется при исследовании свойств оптимальных решений.

Далее для задачи 1 формулируется задача управления, роль управлений в которой играют функции λ, f и ψ, и в общем виде доказывается ее разрешимость. Отдельно рассматривается двухпараметрическая задача управления в случае, когда коэффициент реакции имеет вид произведения $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$. Роль управлений в рассматриваемой задаче играют функции β и f. Представление коэффициента $k(\varphi,\mathbf{x})$ в указанном виде позволяет моделировать неоднородность среды в пространстве.

В случае, когда коэффициент реакции, а также функционалы качества дифференцируемы по Фреше, для экстремальных задач выводятся системы оптимальности. На основе их анализа для оптимальных решений двухпараметрической задачи управления устанавливается справедливость стационарного аналога принципа bang–bang (см. о смысле этого термина ниже или в [12], [20]).

При анализе рассматриваемых задач будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s\in\mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω, либо некоторую подобласть $Q\subset\Omega$, либо границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$ соответственно. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и $(\cdot,\cdot)$ либо $\|\cdot\|_\Gamma$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Пусть $L^p_+(\Omega) = \{k\in L^p(\Omega) : k\ge 0\}$, $p\ge 3/2$, $Z = \{\mathbf{v}\in L^4(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}$, $H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h\in H^s(\Omega) : h\ge\lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}$, $s > 3/2$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma\in C^{0,1}$;

(ii) $f\in L^2(\Omega)$, $\mathbf{u}\in Z$, $\psi\in H^{1/2}(\Gamma)$;

(iii) Для любой функции $v\in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v,\cdot)\in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p\ge 5/3$, не зависящего от v, и на любом шаре $B_r = \{v\in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega}\le r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1,\cdot) - k(v_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \le L_1\|v_1 - v_2\|_{L^5(\Omega)} \qquad \forall v_1, v_2\in B_r.$$

Здесь константа L зависит от r, но не зависит от $v_1, v_2\in B_r$.

(iv) Пусть $\Omega_1\subset\Omega$ – такая подобласть области Ω, что $\bar{\Omega}_1\subset\Omega$. Положим $\Omega_2 = \Omega\setminus\bar{\Omega}_1$. Функция $k(\varphi,\cdot)\varphi$ является монотонной в подобласти Ω_2 в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1,\cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2,\cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2)_{\Omega_2} \ge 0 \qquad \forall\varphi_1,\varphi_2\in H^1(\Omega), \tag{1.2}$$

и ограниченной в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, такие, что

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega_2)} \le A_1\|\varphi\|_{1,\Omega}^t + B_1, \quad p \ge 5/3, \quad t \ge 0. \tag{1.3}$$

В подобласти Ω_1 для функции $k(\varphi,\cdot)$ с константой $C_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\|k(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega_1)} \le C_1 \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

Отметим, что условия (iii), (iv) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \ge 5/3$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции, как от концентрации φ, так и от пространственной переменной $\mathbf{x}$. Например,

$$k = \frac{1}{1+\varphi^2} \ \text{ в } \ \Omega_1 \quad \text{и} \quad k = \varphi^2 \ \text{ в } \ Q \subset \Omega_2, \quad k = k_0(\mathbf{x}) \in L_+^{5/3}(\Omega_2\backslash\overline{Q}) \ \text{ в } \ \Omega_2\backslash\overline{Q},$$

где Q – подобласть области Ω_2.

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \le 6$ и компактно при $s < 6$, и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \le C_s\|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Замечание 1. Ниже для простоты будем писать $k(\varphi)$, вместо $k(\varphi,\mathbf{x})$ за исключением тех случаев, где зависимость от $\mathbf{x}$ также играет важную роль.

Справедливы следующие леммы (см., например, [8]).

Лемма 1. *При выполнении условий* (i), (ii), $\mathbf{u} \in Z$, $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $k_1 \in L^p_+(\Omega)$, $p \ge 5/3$, *существуют положительные константы* C_0, δ_0, γ_1, γ_1', γ_p, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *с которыми справедливы соотношения*

$$|(\lambda\nabla\varphi,\nabla\eta)| \le C_0\|\lambda\|_{s,\Omega}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}, \quad |(k_1\varphi,\eta)| \le \gamma_p\|k_1\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall\varphi,\eta \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta) = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta,\varphi), \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\varphi) = 0 \quad \forall\varphi,\eta \in H^1_0(\Omega), \tag{1.6}$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,\eta)| \le \gamma_1'\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\eta\|_{L^5(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}, \tag{1.7}$$

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi) \ge \lambda_*\|\varphi\|^2_{1,\Omega}, \quad (\lambda\nabla\varphi,\nabla\varphi) + (k_1\varphi,\varphi) \ge \lambda_*\|\varphi\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega), \quad \lambda_* \equiv \delta_0\lambda_0. \tag{1.8}$$

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (i). *Тогда для любой функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ *существует функция* $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$ *такая, что* $\varphi_0 = \psi$ *на* Γ *и с некоторой константой* C_Γ, *зависящей от* Ω *и* Γ, *справедлива оценка* $\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \le C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}$.

Умножим уравнение в (1.1) на $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулу Грина. Получим

$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (k(\varphi)\varphi,h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h) = (f,h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega), \quad \varphi|_\Gamma = \psi. \tag{1.9}$$

Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (1.9), назовем слабым решением задачи 1.

Решение задачи 1 будем искать в виде $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$, где φ_0 – функция из леммы 2, а $\tilde\varphi \in H^1_0(\Omega)$ – неизвестная функция. Подставляя $\varphi = \tilde\varphi + \varphi_0$ в (1.9), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla h) + (k(\varphi)\tilde\varphi,h)_{\Omega_1} + (k(\tilde\varphi+\varphi_0)(\tilde\varphi+\varphi_0),h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi,h) = \\ = (f,h) - (\lambda\nabla\varphi_0,\nabla h) - (k(\varphi)\varphi_0,h)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0,h) \quad \forall h \in H^1_0(\Omega).\end{gathered} \tag{1.10}$$

Прибавим к обеим частям (1.10) слагаемое $-(k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2}$, получим

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla h) + (k(\varphi)\tilde{\varphi}, h)_{\Omega_1} + (k(\tilde{\varphi} + \varphi_0)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) = \\ = (l, h) \equiv (f, h) - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (k(\varphi)\varphi_0, h)_{\Omega_1} - (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - (k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.11}$$

Для доказательства разрешимости задачи (1.10) применим теорему Лере–Шаудера (см. [20]). Для этого введем билинейную форму $a(\eta, h) = (\lambda\nabla\eta, \nabla h)$ и нелинейный оператор G по формуле

$$a(G(\tilde{\varphi}), h) = \left\langle \tilde{f}(\tilde{\varphi}), h \right\rangle_{-1,\Omega} \equiv (k(\varphi)\tilde{\varphi}, h)_{\Omega_1} + (k(\tilde{\varphi} + \varphi_0)(\tilde{\varphi} + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + \\ + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) - (l, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{1.12}$$

где $\tilde{f}(\tilde{\varphi}) \in H^{-1}(\Omega)$.

По теореме Лакса–Мильграма из (1.12) вытекает, что для любой функции $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ существует единственная функция $w \in H_0^1(\Omega)$, с которой справедливо равенство

$$a(w, h) = (\lambda\nabla w, \nabla h) = \left\langle \tilde{f}(\tilde{\varphi}), h \right\rangle_{-1,\Omega} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

В таком случае оператор G, определенный формулой (1.12), действует из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ и ставит в соответствие каждой функкии $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ элемент $G(\tilde{\varphi}) \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда для доказательства существования решения задачи (1.10) достаточно доказать существование решения $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ операторного уравнения

$$\tilde{\varphi} + G(\tilde{\varphi}) = 0 \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega). \tag{1.13}$$

Пусть $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega)$. Вычтем (1.12) при $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_2$ из (1.12) при $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1$. Для этого (1.12) лучше переписать в виде

$$a(G(\tilde{\varphi}), h) = (k(\tilde{\varphi} + \varphi_0)\tilde{\varphi}, h) + (k(\tilde{\varphi} + \varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} - (k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, h) - (l, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

Имеем

$$a(G(\tilde{\varphi}_1) - G(\tilde{\varphi}_2), h) = ((k(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0) - k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0))\tilde{\varphi}_1, h) + (k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), h) + \\ + (k(\tilde{\varphi}_1 + \varphi_0) - k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0), \varphi_0 h)_{\Omega_2} + (\mathbf{u}\cdot\nabla(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2), h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.14}$$

Используя лемму 1, неравенство Гёльдера, свойство (iii) и (1.4), из (1.14) приходим к неравенству

$$|a(G(\tilde{\varphi}_1) - G(\tilde{\varphi}_2), h)| \le \gamma_p L \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_1\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} + C_6 \|k(\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0)\|_{L^{5/3}(\Omega)} \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} + \\ + \gamma_p L \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)} \|\varphi_0\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} + \gamma_1' \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.15}$$

Полагая $h = G(\tilde{\varphi}_1) - G(\tilde{\varphi}_2)$ в (1.15), приходим в силу (1.8) и свойства (iv) к оценке

$$\|G(\tilde{\varphi}_1) - G(\tilde{\varphi}_2)\|_{1,\Omega} \le (\gamma_p L \|\tilde{\varphi}_1\|_{1,\Omega} + C_6(A_1 \|\tilde{\varphi}_2 + \varphi_0\|_{1,\Omega}^r + B_1) + \\ + \gamma_p L \|\varphi_0\|_{1,\Omega}) \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)} + \gamma_1' \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2\|_{L^5(\Omega)},$$

из которой в силу компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^5(\Omega)$ вытекают непрерывность и компактность оператора $G : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

Наряду с (1.13), рассмотрим операторное уравнение $\tilde{\varphi}_w + wG(\tilde{\varphi}_w) = 0$ в $H_0^1(\Omega)$, где $w \in (0,1]$, и вариационное равенство

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}_w, \nabla h) + w(k(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0)\tilde{\varphi}_w, h)_{\Omega_1} + w(k(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0)(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0) - k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} + \\ + w(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}_w, h) = (l_w, h) \equiv w(f, h) - w(\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - w(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) - \\ - w(k(\tilde{\varphi}_w + \varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_1} - w(k(\varphi_0)\varphi_0, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.16}$$

Применив (1.5), (1.7), с учетом свойства (iv) оценим норму функционала l_w из (1.16):

$$\|l_w\|_{-1,\Omega} \leq wM_l \equiv w\|f\|_\Omega + wC_\Gamma(C_0\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p C_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \\ + w\gamma_p C_\Gamma(C_\Gamma^t A_1\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^t + B_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{1.17}$$

Полагая $h = \tilde{\varphi}_w$ в (1.16), в силу (1.8) и свойства (iv) приходим к оценке

$$\|\tilde{\varphi}_w\|_{1,\Omega} \leq C_* wM_l, \quad C_* = \lambda_*^{-1}, \quad w \in (0,1], \tag{1.18}$$

из которой вытекает, что

$$\|\tilde{\varphi}_w\|_{1,\Omega} \leq C_* M_l. \tag{1.19}$$

В таком случае в силу теоремы Лере–Шаудера существует решение $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$ задачи (1.11), для которого справедлива оценка (1.23), и слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$ задачи 1, причем

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_*(\|f\|_\Omega + C_\Gamma(C_0\|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} + \gamma_p C_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \\ + C_*\gamma_p C_\Gamma(C_\Gamma^r A_1\|\psi\|_{1/2,\Gamma}^r + B_1)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} + C_\Gamma\|\psi\|_{1/2,\Gamma}. \tag{1.20}$$

Установим достаточные условия, при которых решение задачи (1.9) единственно. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega)$ – два решения задачи (1.9). Тогда их разность $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, h)_{\Omega_2} + (k(\varphi_1)\varphi, h)_{\Omega_1} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = \\ = -(k((\varphi_1) - k(\varphi_2))\varphi_2, h)_{\Omega_2} \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{1.21}$$

Полагая в (1.21) $h = \varphi$, в силу условий (iii), (iv) и леммы 1 приходим к оценке

$$\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq \gamma_p L M_\varphi \|\varphi\|_{1,\Omega}. \tag{1.22}$$

Из (1.22) вытекает, что при выполнении условия

$$\gamma_p L M_\varphi < \lambda_* \tag{1.23}$$

получаем $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2$ п.в. в Ω.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *При выполнении условий* (i)–(iv) *существует слабое решение* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *и справедлива оценка* (1.20). *Если, к тому же, выполняется условие* (1.23), *то слабое решение единственно.*

В рамках подхода [21] докажем принцип максимума и минимума для φ.

Пусть в дополнение к (i)–(iv) выполняются следующие условия:

(v) $\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}$ п.в. на Γ, $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ п.в. в Ω, $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω_2 и $f = 0$ п.в. в Ω_1 (либо $\Omega_1 = \emptyset$);

(vi) $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ удовлетворяет неравенству (1.2), при этом $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где функция $k_1(\varphi) \geq 0$ непрерывно зависит от φ, $0 < a_{\min} \leq a(\mathbf{x}) \leq a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω, при этом $[f_{\min}/a_{\max}, f_{\max}/a_{\min}] \in E(k_1(\varphi)\varphi)$.

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$ – неотрицательные числа, $\lambda_{\max} > \lambda_0 > 0$.

Лемма 3. *При выполнении условий* (i)–(vi) *для решения* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи* 1 *справедлив следующий принцип максимума и минимума*:

$$m \leq \varphi \leq M \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \tag{1.24}$$

Здесь M_1 и m_1 находятся из соотношений $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$ и $k_1(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$ соответственно. Если функция $k_1(\varphi)\varphi$ возрастает, то указанные параметры определяются однозначно.

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \leq M$ п.в. в Ω. С этой целью введем функцию $\tilde{\varphi} = \max\{\varphi - M, 0\}$. Ясно, что принцип максимума или оценка $\varphi \leq M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω. Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество области Ω, в котором $\varphi > M$. Из [22], [23] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и функция $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$. Тогда справедливы равенства

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}), (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0.$$

С учетом этого, полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (1.9), получаем

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (f, \tilde{\varphi}). \tag{1.25}$$

Ясно, что

$$(k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (k(\tilde{\varphi} + M,\cdot)(\tilde{\varphi} + M), \tilde{\varphi})_{Q_M}$$

и в силу (vi) для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$0 \le (k(\tilde{\varphi} + M,\cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M)M, \tilde{\varphi})_{\Omega_2} = (k(\tilde{\varphi} + M,\cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_2}, \tag{1.26}$$

поскольку $\tilde{\varphi} = 0$ в $\Omega\backslash\bar{\Omega}_M$. Заметим, что если $Q_M \cap \Omega_2 = \emptyset$, то $(f, \tilde{\varphi})_{Q_M} = 0$ в силу условия (v). Тогда, вычитая $(k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_2}$ из обеих частей (1.25), получаем

$$\begin{gathered}(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_1} + (k(\tilde{\varphi} + M,\cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_2} = \\ = (f - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_2}.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Поскольку $(k(\varphi,\cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_1} \ge 0$, то в силу леммы 1 и (1.26) из (1.27) приходим к оценке

$$\lambda_* \|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \le (f - k(M,\cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M\cap\Omega_2},$$

из которой вытекает, что если M выбрано из условия (1.24), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства принципа минимума введем функцию $\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}$, $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$. Будем предполагать, что в открытом измеримом подмножестве $Q_m \subset \Omega$ справедливо неравенство $\varphi < m$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$\begin{gathered}(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{w}) + (k(\varphi,\cdot), \varphi, \tilde{w})_{Q_m\cap\Omega_1} + (k(\tilde{w} + m,\cdot)(\tilde{w} + m) - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m\cap\Omega_2} = \\ = (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m\cap\Omega_2},\end{gathered}$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_* \|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \le (f - k(m,\cdot)m, \tilde{w})_{Q_m\cap\Omega_2}.$$

Из полученной оценки вытекает, что $\tilde{w} = 0$ для m из (1.24).

Замечание 2. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, при $k(\varphi) = \varphi^2$ получаем, что $M_1 = f_{\max}^{1/3}$, $m_1 = f_{\min}^{1/3}$.

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ

Для постановки задачи управления разобьем множество исходных данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда отнесем функции $\mathbf{u}$ и $k(\varphi, \mathbf{x})$, и группу управлений, куда отнесем функции λ, f и ψ, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2 и K_3, удовлетворяющих условию

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $K_2 \subset L^2(\Omega)$ и $K_3 \subset H^{1/2}(\Gamma)$ – непустые выпуклые замкнутые множества.

Введем пространство $Y = H^{-1}(\Omega)\times H^{1/2}(\Gamma)$, положим $u = (\lambda, f, \psi)$, $K = K_1\times K_2\times K_3$ и введем оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega)\times K \to Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h\rangle = (\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\mathbf{x}, \varphi)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) - (f, h),$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_\Gamma - \psi,$$

и перепишем (1.9) в виде $F(\varphi,u)=0$. Рассматривая это равенство как условное ограничение на состояние $\varphi\in H^1(\Omega)$ и управление $u\in K$, сформулируем следующую задачу условной минимизации:

$$
\begin{gathered}
J(\varphi,u)\equiv\frac{\mu_0}{2}I(\varphi)+\frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{s,\Omega}+\frac{\mu_3}{2}\|f\|^2_{\Omega}+\frac{\mu_3}{2}\|\psi\|^2_{1/2,\Gamma}\to\inf,\\
F(\varphi,u)=0,\quad (\varphi,u)\in H^1(\Omega)\times K.
\end{gathered}\tag{2.1}
$$

Здесь $I:H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ – функционал, полунепрерывный снизу относительно слабой сходимости.

Обозначим через $Z_{ad}=\{(\varphi,u)\in H^1(\Omega)\times K: F(\varphi,u)=0, J(\varphi,u)<\infty\}$ множество допустимых пар для задачи (2.1) и предположим, что выполняется условие

(jj) $\mu_0>0$, $\mu_i\ge 0$, $i=1,2,3$, и K – ограниченное множество, либо $\mu_j>0$, $j=0,1,2,3$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества:

$$
I_1(\varphi)=\|\varphi-\varphi^d\|^2_Q=\int_Q|\varphi-\varphi^d|^2\,d\mathbf{x},\quad I_2(\varphi)=\|\varphi-\varphi^d\|^2_{1,Q}.\tag{2.2}
$$

Здесь $\varphi^d\in L^2(Q)$ (либо $\varphi^d\in H^1(Q)$) – заданная в подобласти $Q\subset\Omega$ функция.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv) *и* (j), (jj), *функционал* $I:H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ *слабо полунепрерывен снизу и множество* Z_{ad} *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\varphi,u)\in H^1(\Omega)\times K$ *задачи* (2.1).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m,u_m)\in Z_{ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$
\lim_{m\to\infty}J(\varphi_m,u_m)=\inf_{(\varphi,u)\in Z_{ad}}J(\varphi,u)\equiv J^*.
$$

Из условия (jj) и теоремы 1 вытекают следующие оценки:

$$
\|\lambda_m\|_{s,\Omega}\le c_1,\quad \|f_m\|_{\Omega}\le c_2,\quad \|\psi_m\|_{1/2,\Gamma}\le c_3,\quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega}\le c_4,\tag{2.3}
$$

где константы $c_1,\dots,c_3$ не зависят от m.

Из оценок (2.3) и условия (j) вытекает, что существуют слабые пределы $\lambda^*\in K_1$, $f^*\in K_2$, $\psi^*\in K_3$ и $\varphi^*\in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\lambda_m\}$, $\{f_m\}$, $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем обозначать также через $\{\lambda_m\}$, $\{f_m\}$, $\{\psi_m\}$ и $\{\varphi_m\}$, причем в силу компактности вложений $H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ при $p<6$, $H^s(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ при $s>3/2$ можно считать, что при $m\to\infty$

$$
\begin{gathered}
\varphi_m\to\varphi^*\ \text{ слабо в }\ H^1(\Omega),\quad \text{слабо в }\ L^6(\Omega)\ \text{ и сильно в }\ L^s(\Omega),\quad s<6,\\
f_m\to f^*\ \text{ слабо в }\ L^2(\Omega),\quad \psi_m\to\psi^*\ \text{ слабо в }\ H^{1/2}(\Gamma),\\
\lambda_m\to\lambda^*\ \text{ слабо в }\ H^s(\Omega)\ \text{ и сильно в }\ L^\infty(\Omega),\quad s>3/2.
\end{gathered}\tag{2.4}
$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*)=0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*,u^*)=0$, т.е., что

$$
(\lambda^*\nabla\varphi^*,\nabla h)+(k(\varphi^*)\varphi^*,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi^*,h)=(f^*,h)\quad\forall h\in H^1_0(\Omega).\tag{2.5}
$$

Для этого заметим, что пара функций (φ_m,u_m) удовлетворяет соотношению

$$
(\lambda_m\nabla\varphi_m,\nabla h)+(k(\varphi_m)\varphi_m,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_m,h)=(f_m,h)\quad\forall h\in H^1_0(\Omega).\tag{2.6}
$$

Перейдем в (2.6) к пределу при $m\to\infty$. Из (2.4) вытекает, что все линейные слагаемые в (2.6) переходят в соответствующие слагаемые в (2.5). Исследуем поведение при $m\to\infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(k(\varphi_m)\varphi_m,h)$.

Из условий (iii) вытекает, что $k(\varphi_m) \to k(\varphi^*)$ сильно в $L^{5/3}(\Omega)$. Используя (2.4), несложно показать, что $\varphi_m h \to \varphi^* h$ слабо в $L^3(\Omega)$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$. В таком случае $k(\varphi_m)\varphi_m h \to k(\varphi^*)\varphi^* h$ сильно в $L^1(\Omega)$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$ или

$$(k(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (k(\varphi^*)\varphi^*, h) \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Для слагаемого $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h). \tag{2.8}$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (2.4) получим, что $(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Применяя неравенство Гельдера, в силу (2.4) и (2.3) получаем, что

$$\left|((\lambda_m - \lambda^*)\nabla\varphi_m, \nabla h)\right| \le \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla\varphi_m\|_\Omega \|\nabla h\|_\Omega \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty \quad \forall h \in H_0^1(\Omega).$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla\varphi_m, \nabla h) \to (\lambda^* \nabla\varphi^*, \nabla h)$ при $m \to \infty$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega) \times H^s(\Omega) \times L^6(\Omega) \times \times L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, то из вышесказанного следует, что $J(\varphi^*, u^*) = J^*$.

Следующим этапом в исследовании экстремальной задачи является вывод системы оптимальности, которая дает ценную информацию о дополнительных свойствах оптимальных решений. На основе ее анализа можно установить, в частности, единственность и устойчивость оптимальных решений. Например, устойчивость некоторых частных случаев задачи (2.1) была исследована в [12], [14]. Исследованию единственности и устойчивости оптимальных решений будет посвящена отдельная статья авторов.

Пусть в дополнение к (i)–(iv) выполняется следующее условие:

(vii) оператор $k(\varphi)\varphi : H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$, $q > 30/23$, непрерывно дифференцируем по Фреше по концентрации φ и его производная есть линейный непрерывный оператор $b(\varphi) : H^1(\Omega) \to L^2_+(\Omega)$.

Введем сопряженное к Y пространство $Y^* = H_0^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Несложно показать, что производная Фреше от оператора $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \to Y$ по φ в каждой точке $(\hat\varphi, \hat u) = (\hat\varphi, \hat\lambda, \hat f, \hat\psi)$ есть линейный оператор $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u) : H^1(\Omega) \times K \to Y$, ставящий в соответствие каждому элементу $h \in H^1(\Omega)$ элемент $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)(h) = (\hat y_1, \hat y_2) \in Y$. Здесь элементы $\hat y_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и $\hat y_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ определяются по $\hat\varphi$ и τ соотношениями

$$\langle \hat y_1, \tau\rangle = (\hat\lambda \nabla\tau, \nabla h) + (b(\hat\varphi)\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad y_2 = h|_\Gamma. \tag{2.9}$$

Через $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)^* : Y^* \to H^1(\Omega)^*$ обозначим сопряженный к $F'_\varphi(\hat\varphi, \hat u)$ оператор.

Следуя общей теории гладко-выпуклых экстремальных задач из [27], введем элемент $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, на который будем ссылаться как на сопряженное состояние, и введем Лагранжиан $\mathcal{L}: H^1(\Omega) \times K \times \mathbb{R} \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\mathcal{L}(\varphi, u, \mathbf{y}^*) = J(\varphi, u) + \langle \mathbf{y}^*, F(\varphi, u)\rangle_{Y^* \times Y} \equiv J(\varphi, u) + \langle F_1(\varphi, u), \theta\rangle + \langle \zeta, F_2(\varphi, u)\rangle_\Gamma, \tag{2.10}$$

где $\langle \zeta, \cdot\rangle_\Gamma = \langle \zeta, \cdot\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}$.

Поскольку $b(\hat\varphi) \in L^2_+(\Omega)$, то из [8] вытекает, что для любых $f \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat\lambda \nabla\tau, \nabla h) + (b(\hat\varphi)\tau, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla\tau, h) = (f, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega), \quad \tau|_\Gamma = \psi. \tag{2.11}$$

Тогда оператор $F'_\varphi(\hat{\varphi},\hat{u}) : H^1(\Omega)\times K \to Y$ – изоморфизм, а из [17] вытекает

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv), (vii) *и* (j), (jj), *функционал* $I : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *непрерывно дифференцируем по* φ *в точке* $\hat{\varphi}$ *и локальный минимум в задаче* (2.1) *достигается в точке* $(\hat{\varphi},\hat{u}) \in H^1(\Omega)\times K$. *Тогда существует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^* = (\theta,\zeta) \in Y^*$ *такой, что выполняется уравнение Эйлера–Лагранжа* $F_\varphi(\hat{\varphi},\hat{u})^*\mathbf{y}^* = -J_\varphi(\hat{\varphi},\hat{u})$ *в* $H^1(\Omega)^*$, *эквивалентное тождеству*

$$(\hat{\lambda}\nabla\tau,\nabla\theta) + (b(\hat{\varphi})\tau,\theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau,\theta) + \langle\zeta,\tau\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2)\left\langle I'_\varphi(\hat{\varphi}),\tau\right\rangle \quad \forall\tau\in H^1(\Omega), \tag{2.12}$$

и справедлив принцип минимума $\mathcal{L}(\hat{\varphi},\hat{u},\mathbf{y}^*) \le \mathcal{L}(\hat{\varphi},u,\mathbf{y}^*)\ \forall u\in K$, *эквивалентный неравенствам*

$$\mu_1(\hat{\lambda},\lambda-\hat{\lambda})_{s,\Omega} + ((\lambda-\hat{\lambda})\nabla\hat{\varphi},\nabla\theta) \ge 0 \quad \forall\lambda\in K_1, \tag{2.13}$$

$$\mu_2(\hat{f},f-\hat{f})_\Omega - (f-\hat{f},\theta) \ge 0 \quad \forall f\in K_2, \tag{2.14}$$

$$\mu_3(\hat{\psi},\psi-\hat{\psi})_{1/2,\Gamma} + \langle\zeta,\psi-\hat{\psi}\rangle_\Gamma \ge 0 \quad \forall f\in K_3. \tag{2.15}$$

3. АНАЛИЗ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ УАПРАВЛЕНИЯ. СВОЙСТВО bang–bang

Ниже будем полагать, что функция $k(\varphi,\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

(viii) $k(\varphi,\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$, причем нелинейность $k_0(\varphi)\varphi$ монотонна, $\beta(\mathbf{x})\in L^6_+(\Omega)$, $k_0(\varphi)\in L^2_+(\Omega)$ для всех $\varphi\in H^1(\Omega)$, удовлетворяет неравенству (1.3) при $p>2$ и в любом шаре $B_r = \{\varphi\in H^1(\Omega) : \|\varphi\|_{1,\Omega} \le r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|k_0(\varphi_1) - k_0(\varphi_2)\|_\Omega \le L_2\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)} \quad \forall\varphi_1,\varphi_2\in B_r. \tag{3.1}$$

Здесь константа L_2 зависит от радиуса r и не зависит от конкретных $\varphi_1,\varphi_2\in B_r$.

Несложно показать, что условия (viii) описывают частный случай функции $k(\varphi,\mathbf{x})$, удовлетворяющей (iii). Действительно, (см. также [14]):

$$\|\beta(k_0(\varphi_1) - k(\varphi_2))\|_{L^{3/2}(\Omega)} \le \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|k_0(\varphi_1)-k_0(\varphi_2)\|_\Omega \le \|\beta\|_{L^6(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}.$$

В данном разделе будут установлены дополнительные свойства оптимального решения следующей задачи управления:

$$J(\varphi) \equiv (1/2)I(\varphi) \to \inf,\quad \mathcal{F}(\varphi,f,\beta) = 0,\quad (\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4, \tag{3.2}$$

роль управления в которой играют функции f и β, которые могут изменяться в подмножествах K_2 и K_4 соответственно. Тогда как λ и ψ считаются заданными функциями. Оператор $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1,F_2) : H^1(\Omega)\times K_2\times K_4 \to Y$ определен формулами

$$\langle\mathcal{F}(\varphi,u),h\rangle = (\lambda\nabla\varphi,\nabla h) + (\beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)\varphi,h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h) - (f,h),$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_\Gamma - \psi.$$

Пусть выполняется условие

(jjj) $K_2\subset L^2(\Omega)$ и $K_4\subset L^6_+(\Omega)$ – непустые выпуклые замкнутые и ограниченные множества.

Обозначим через $\mathcal{Z}_{ad} = \{(\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4 : \mathcal{F}(\varphi,f,\beta) = 0, J(\varphi,f,\beta) < \infty\}$ множество допустимых пар для задачи (3.2) и предположим, что выполняется условие

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (i)–(iv), (viii) *и* (jjj), *функционал* $I : H^1(\Omega) \to R$ *слабо полунепрерывен снизу и множество* $\mathcal{Z}_{ad}$ *не пусто. Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\varphi,f,\beta)\in H^1(\Omega)\times K_2\times K_4$ *задачи* (3.2).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, f_m, \beta_m) \in \mathcal{X}_{ad}$ – минимизирующая последовательность, для которой

$$\lim_{m\to\infty} J(\varphi_m, f_m, \beta_m) = \inf_{(\varphi,f,\beta)\in\mathcal{X}_{ad}} J(\varphi, f, \beta) \equiv J^*.$$

Из условия (jjj) и теоремы 1 вытекают следующие оценки:

$$\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \le c_1, \quad \|f_m\|_\Omega \le c_2, \quad \|\varphi_m\|_{1,\Omega} \le c_3, \tag{3.3}$$

где константы c_1, c_2, c_3 не зависят от m.

Из оценок (3.3) и условия (jjj) вытекает, что существуют слабые пределы $\beta^* \in K_4$, $f^* \in K_2$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\beta_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. Соответствующие подпоследовательности будем обозначать также через $\{\beta_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$, причем в силу компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ при $p < 6$ можно считать, что при $m \to \infty$

$$\begin{gathered}\varphi_m \to \varphi^* \text{ слабо в } H^1(\Omega), \quad \text{слабо в } L^6(\Omega) \text{ и сильно в } L^s(\Omega), \quad s < 6,\\ f_m \to f^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad \beta_m \to \beta^* \text{ слабо в } L^6(\Omega).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $\mathcal{F}_1(\varphi^*, f^*, \beta^*) = 0$, т.е., что

$$(\lambda\nabla\varphi^*, \nabla h) + (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi^*, h) = (f^*, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Для этого заметим, что тройка $(\varphi_m, f_m, \beta_m)$ удовлетворяет соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi_m, \nabla h) + (\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_m, h) = (f_m, h) \quad \forall h \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Перейдем в (3.6) к пределу при $m \to \infty$. Из (2.4) вытекает, что все линейные слагаемые в (3.6) переходят в соответствующие слагаемые в (3.5). Исследуем поведение при $m \to \infty$ нелинейных слагаемых, начиная с $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h)$.

Справедливо равенство

$$(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) - (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h) = (\beta_m(k_0(\varphi_m) - k_0(\varphi^*))\varphi_m, h) + (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h). \tag{3.7}$$

Из неравенства Гёльдера, (3.3), свойства (vii) и (3.4) вытекает, что для всех $h \in H_0^1(\Omega)$

$$|(\beta_m(k_0(\varphi_m) - k_0(\varphi^*))\varphi_m, h)| \le L_2 \|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)} \|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)} \|h\|_{L^6(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.8}$$

Поскольку $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно вложено в $H_0^1(\Omega)$, то существует последовательность $\{h_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$, сходящаяся к h по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Используя $\{h_n\}$, для второго слагаемого в (3.7) выводим

$$(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h) = (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n) + (\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h_n). \tag{3.9}$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\beta_m\|_{L^6(\Omega)}$ и $\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^6(\Omega)}$, вытекающей из (3.3), и сходимости $\|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon, h)$ такой, что

$$\begin{gathered}|(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)| \le \|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \|k_0(\varphi^*)\|_\Omega \|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^6(\Omega)} \|h - h_n\|_{L^6(\Omega)} \le \\ \le \varepsilon/2 \quad \forall n \ge N, \quad m \in \mathcal{N}.\end{gathered} \tag{3.10}$$

В силу равномерной ограниченности по m величины $\|\varphi_m\|_{L^6(\Omega)}$ и сходимости $\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$ следует, что существует такой номер $M = M(\varepsilon, h)$, что

$$|(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h_n)| \le \|\beta_m\|_{L^6(\Omega)} \|k_0(\varphi^*)\|_\Omega \|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Omega)} \|h_n\|_{L^{12}(\Omega)} \le \varepsilon/2 \quad \forall m \ge M, \quad n \in \mathcal{N}. \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) вытекает, что $(\beta_m k_0(\varphi^*)(\varphi_m - \varphi^*), h) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Тогда с учетом (3.8) получаем, что $(\beta_m k_0(\varphi_m)\varphi_m, h) \to (\beta^* k_0(\varphi^*)\varphi^*, h)$ при $m \to \infty$ для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

Поскольку функционал J слабо полунепрерывен снизу на $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^6(\Omega)$, то из вышесказанного следует, что $J(\varphi^*, f^*, \beta^*) = J^*$.

Пусть для функции $k_0(\varphi)\varphi$ выполняется условие

(ix) оператор $k_0(\varphi)\varphi : H^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$, $q > 30/23$, непрерывно дифференцируем по Фреше и его производная есть линейный непрерывный оператор $b_0(\varphi) : H^1(\Omega) \to L^2_+(\Omega)$.

Тогда для задачи (3.2) справедлив аналог теоремы 3, поскольку $\hat\beta b_0(\hat\varphi) \in L^{3/2}_+(\Omega)$. При этом уравнение Эйлера–Лагранжа (2.12) принимает вид

$$(\lambda\nabla\tau, \nabla\theta) + (\hat\beta b_0(\hat\varphi)\tau, \theta) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\tau, \theta) + \langle\zeta, \tau\rangle_\Gamma = -(\mu_0/2)\left\langle I'_\varphi(\hat\varphi), \tau\right\rangle \quad \forall\tau \in H^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Принцип минимума для задачи (3.2) имеет вид следующих неравенств:

$$((\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) \ge 0 \quad \forall\beta \in K_4, \tag{3.13}$$

$$(f - \hat f, \theta) \le 0 \quad \forall f \in K_2. \tag{3.14}$$

Пусть вместо (jjj) выполняется более жесткое условие:

(jjj') $\beta_{\min} \le \beta \le \beta_{\max}$ п.в. в Ω для всех $\beta \in K_4$ и $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ п.в. в Ω для всех $f \in K_2$, где $\beta_{\min}$, $\beta_{\max}$, $f_{\min}$ и $f_{\max}$ – положительные числа.

Ясно, что условия (jjj') задают частный случай выпуклых, ограниченных и замкнутых множеств K_2 и K_4, введенных в (jjj).

Покажем, что оптимальные управления $\hat\beta(\mathbf{x})$ и $\hat f(\mathbf{x})$ задачи (3.2) обладают свойством bang–bang, согласно которому они принимают одно из двух значений $\beta_{\min}$ или $\beta_{\max}$ и $f_{\min}$ или $f_{\max}$ соответственно в зависимости от знака функции $\theta(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x} \in \Omega$.

Следующая лемма является частным случаем теоремы 2.1 из [20, с. 67].

Лемма 4. *При выполнении условия* (jjj') *и* $k_0(\varphi) > 0$ *неравенства* (3.13), (3.14) *эквивалентны следующим неравенствам*:

$$(\beta - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi\theta \ge 0 \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall\beta \in K_4, \tag{3.15}$$

$$(f - \hat f)\theta \le 0 \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall f \in K_2. \tag{3.16}$$

Замечание 3. Лемма 4 может быть доказана методом от противного. Сначала покажем, что из (3.13) вытекает (3.15). Предположим, что существует функция $\beta_1 \in K_4$, с которой на множестве $D \subset \Omega$, meas $D > 0$, выполняется неравенство $(\beta_1 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi\theta < 0$ п.в. в D. Рассмотрим функцию β_2 такую, что $\beta_2 = \hat\beta$, если $\mathbf{x} \notin D$ и $\beta_2 = \beta_1$, если $\mathbf{x} \in D$. Ясно, что $\beta_2 \in K_4$ и для нее справедливо неравенство

$$((\beta_2 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta) = ((\beta_1 - \hat\beta)k_0(\hat\varphi)\hat\varphi, \theta)_D < 0,$$

противоречащее (3.13).

Рассуждая аналогично, покажем, что из (3.14) вытекает (3.16). Пусть существует функция $f_1 \in K_2$, с которой на множестве $D_0 \subset \Omega$, meas $D_0 > 0$, выполняется неравенство $(f_1 - \hat f)\theta > 0$ п.в. в D_0. Рассмотрим функцию f_2 такую, что $f_2 = \hat f$, если $\mathbf{x} \notin D_0$ и $f_2 = f_1$, если $\mathbf{x} \in D_0$. Ясно, что $f_2 \in K_2$ и для нее справедливо неравенство $(f_2 - \hat f, \theta) = (f_1 - \hat f, \theta)_{D_0} > 0$, которое противоречит (3.14).

Следствие 1. Из лемм 4 и 3 вытекает, что функция, если функция $k_0(\varphi)\varphi$ возрастает, то (3.13) эквивалентно неравенству

$$(\beta - \hat\beta)\theta \ge 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega \quad \forall\beta \in K_4. \tag{3.17}$$

Из (3.17) следует, что если $\theta < 0$ п.в. в $D_1 \subseteq \Omega$, то $\beta \le \hat\beta$ п.в. в D_1 для всех $\beta \in K_4$. Тогда $\hat\beta = \beta_{\max}$ п.в. в D_1. В свою очередь, $\hat\beta = \beta_{\min}$ п.в. в $D_2 \subseteq \Omega$, если $\theta > 0$ п.в. в D_2.

Из (3.16) вытекает, что если $\theta < 0$ п.в. в D_1, то $\hat f = f_{\min}$ п.в. в D_1 и $\hat f = f_{\max}$ п.в. в D_2, если $\theta > 0$ п.в. в D_2.

Заметим, что $k_{01}(\varphi) = \varphi^2 > 0$ и $k_{02}(\varphi) = \varphi^2 |\varphi| > 0$ п.в. в Ω в силу леммы 3, поскольку функции $k_{0i}(\varphi)\varphi$, $i = 1, 2$, возрастают.

Замечание 4. С физической точки зрения тот факт, что если на множестве $D \subset \Omega$ управление β принимает максимальное значение $\beta_{\max}$, то управление f принимает минимальное значение $f_{\min}$, означает, что управления β и f выполняют одно и то же действие – уменьшение концентрации φ. Действительно, коэффициент реакции (распада) вещества $k(\varphi, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x})k_0(\varphi)$ принимает максимальное значение при $\beta = \beta_{\max}$. В свою очередь, при $f = f_{\min}$ происходит минимальный приток загрязняющего вещества в область Ω. Аналогичную согласованность показывает пара $(\beta_{\min}, f_{\max})$, действие которой направлено на увеличение концентрации φ.

Обратимся к функционалам $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, введенным в (2.2). Ясно, что если $I_i(\hat{\varphi}) > 0$, то $\hat{\varphi} \neq \varphi^d$ в $Q_1 \subseteq Q$, $\operatorname{meas} Q_1 > 0$. Покажем, что при этом $\theta \neq 0$, по крайней мере, п.в. в Q_1.

Пусть $I(\varphi) = I_1(\varphi)$. Выбирая в (3.12) функцию $\tau \in H_0^1(\Omega)$ и рассуждая, как в [25], приходим к соотношению

$$-(\operatorname{div} \lambda \nabla \theta) + \hat{\beta} b_0(\hat{\varphi})\theta - \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = -(\hat{\varphi} - \varphi^d)\chi_Q \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{3.18}$$

где χ_Q – характеристическая функция подобласти $Q \subset \Omega$. Из (3.18) вытекает, что $\theta \neq 0$ п.в. в Q_1. Используя (2.12), несложно показать, что аналогичный результат верен для I_2.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (i)–(v), (viii), (ix) *и* (jjj'). *Тогда существует по крайней мере одно решение* $(\hat{\varphi}, \hat{f}, \hat{\beta}) \in H^1(\Omega) \times K_2 \times K_4$ *задачи* (3.2), *которому соответствует единственный множитель Лагранжа* $\mathbf{y}^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$, *удовлетворяющий* (3.12)–(3.14). *Пусть* $I(\hat{\varphi}) = I_i(\hat{\varphi}) > 0$, $i = 1, 2$, $k_0(\varphi) > 0$ *и* $k_0(\varphi)\varphi$ *возрастает. Тогда* $\hat{\beta} = \beta_{\min}$, $\hat{f} = f_{\max}$, *если* $\theta > 0$, *и* $\hat{\beta} = \beta_{\max}$, $\hat{f} = f_{\min}$, *если* $\theta < 0$.

Следствие 2. Если $I(\hat{\varphi}) = I_i(\hat{\varphi}) > 0$, $i = 1, 2$, то оптимальное управление $\hat{\beta}$ задачи (3.2) не может быть внутренней точкой множества K_4, а оптимальное управление $\hat{f}$ не может быть внутренней точкой множества K_2.

Замечание 5. В дополнение к замечанию 4 заметим, что в случае функционалов $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi)$ увеличение концентрации φ уместно, если $\varphi < \varphi^d$. Соответственно при $\varphi > \varphi^d$ концентрацию следует уменьшать.

Наконец, отметим, что если существует подмножество $D_0 \subset \Omega$, $\operatorname{meas} D_0 > 0$, на котором $\theta = 0$, то в этом подмножестве управление $\hat{\beta}$ принимает значение $\beta_{\max}$ или $\beta_{\min}$, аналогично, управление $\hat{f}$ принимает значение $f_{\min}$ или $f_{\max}$, а свойство bang–bang для задачи (3.2) является *нестрогим*. Если $\theta \neq 0$ п.в. в Ω, то свойство bang–bang для задачи (3.2) называют *строгим*, так как не нужно уточнять поведение $\hat{\beta}$ и $\hat{f}$ при $\theta = 0$ (см. [29], [20]).

Например, если $I(\varphi) = (1/2)\|\varphi - \varphi^d\|_\Omega^2$ и вместо условия $I(\hat{\varphi}) > 0$ выполняется более жесткое условие: $\hat{\varphi} \neq \varphi^d$ п.в. в Ω, то из (3.18) вытекает, что $\theta \neq 0$ п.в. в Ω.

В заключение отметим, что интерес к свойству bang–bang вызван исследованием задач управления, в которых из практических соображений не используется регуляризация. В частности, такая постановка задач управления используется при исследовании прикладных задач тепловой и электромагнитной маскировки (см., например, [17] и ссылки там). В следующих работах на основе анализа полученных систем оптимальности будут выведены точные оценки локальной устойчивости оптимальных решений задач мультипликативного управления (см. [14], [15], [25]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ito K., Kunish K.* Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // Inverse Problems. 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Control problems for convection–diffusion equations with control localized on manifolds // ESAIM: Control, Optimisat. and Calcul. of Variat. 2001. V. 6. P. 467–488.
3. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений в теории массопереноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 380–394.

4. *Короткий А.И., Ковтунов Д.А.* Оптимальное граничное управление системой, описывающей тепловую конвекцию // Тр. ИММ. 2006. Т. 16. С. 76–101.
5. *Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А.* Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса // Прикл. механ. техн. физика. 2008. № 4. С. 24–35.
6. *Nguyen P.A., Raymond J.-P.* Pointwise control of the Boussinesq system // Systems Control Lett. 2011. V. 60. P. 249–255.
7. *Алексеев Г.В., Терешко Д.А.* Двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1645–1664.
8. *Алексеев Г.В., Вахитов И.С., Соболева О.В.* Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции–диффузии–реакции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
9. *Алексеев Г.В., Левин В.А.* Оптимизационный метод в задачах тепловой маскировки материальных тел // Докл. АН. 2016. Т. 471. № 1. С. 32–36.
10. *Brizitskii R.V., Saritskaya Z.Y., Byrganov A.I.* Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation // Sib. El. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 352–360.
11. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Оценки устойчивости решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19. № 2. С. 3–16.
12. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 12. С. 2042–2053.
13. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Об устойчивости решений задач управления для уравнения конвекции–диффузии–реакции с сильной нелинейностью // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
14. *Бризицкий Р.В., Сарицкая Ж.Ю.* Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
15. *Brizitskii R.V., Saritskaya Zh.Yu.* Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2018. V. 26. № 6. P. 821–833.
16. *Алексеев Г.В.* Анализ и оптимизация в задачах маскировки материальных тел для уравнений Максвелла при смешанных граничных условиях // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 3. С. 366–377.
17. *Alekseev G.V., Tereshko D.A.* Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2019. V. 135. P. 1269–1277.
18. *Belyakov N.S., Babushok V.I., Minaev S.S.* Influence of water mist on propagation and suppression of laminar premixed // Combust. Theory and Model. 2018. V. 22. № 2. P. 394–409.
19. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
20. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 439. P. 678–689.
21. *Ладыженская О.Н., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
22. *Гилбарг Д., Трудингер М.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
23. *Berninger H.* Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators // Domain Decomposit. Meth. in Sci. and Enginee. XVIII. Springer, 2009. P. 169–176.
24. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
25. *Алексеев Г.В.* Оценки устойчивости в задаче маскировки материальных тел для уравнений Максвелла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 1863–1878.
26. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., 1972.
27. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1973.