ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 6, с. 951–965

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ И ТИПА СТЕКЛОВА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2021 г. О. А. Матевосян[1,2]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 125993 Москва, Волоколомское шоссе, 4, НИУ МАИ, Россия

e-mail: hmatevossian@graduate.org

Поступила в редакцию 29.07.2020 г.
Переработанный вариант 16.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Изучаются вопросы единственности решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова во внешности компактного множества в предположении, что обобщенное решение этой задачи обладает конечным интегралом Дирихле с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a доказаны теоремы единственности (неединственности), и найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этой бигармонической задачи. Библ. 36.

Ключевые слова: бигармонический оператор, граничные условия Дирихле и типа Стеклова, весовой интеграл Дирихле, пространства Соболева.

DOI: 10.31857/S0044466921060089

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{G}$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\Omega \cup \partial\Omega = \bar{\Omega}$ – замыкание Ω, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

В Ω рассматривается задача для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

с условиями Дирихле на Γ_1 и условиями типа Стеклова на Γ_2

$$u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes}_{n-1}\Gamma_1 \neq 0$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau \in C(\partial\Omega)$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$, и $\tau > 0$ на множестве $\partial\Omega$ положительной $(n-1)$-мерной меры.

Эллиптические задачи с параметрами в граничных условиях называются задачами Стеклова или типа Стеклова с момента их первого появления в [1]. Для бигармонического оператора эти условия были впервые рассмотрены в [2], [3] и [4] при изучении изопериметрических свойств первого собственного значения.

Отметим, что стандартные результаты эллиптической регулярности доступны в [5]. Монография посвящена линейным и нелинейным эллиптическим краевым задачам более высокого порядка, в основном с бигармоническим или полигармоническим оператором в качестве главной части. Что касается линейных задач, то после краткого изложения теории существования и оценок L^p и Шаудера, акцент делается на положительности. Требуемые оценки ядра также представлены подробно.

В [6] и [5] изучаются спектральные и сохраняющие положительность свойства для инверсии бигармонического оператора при граничных условиях Стеклова и типа Стеклова. Они связаны с первым собственным значением задачи Стеклова. Показано, что свойство сохранения положительности весьма чувствительно к параметру, входящему в граничное условие.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле (энергии), либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \to \infty$ (см., например, [7]–[10]). Вопросы о поведении при $|x| \to \infty$ решений задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1) рассматривались в [11], [12], в которых при определенных условиях геометрического характера на границу области получены также оценки, характеризующие поведение $|u(x)|$ и $|\nabla u(x)|$ при $|x| \to \infty$.

В данной статье таким условием является ограниченность интеграла Дирихле с весом:

$$D_a(u,\Omega) \equiv \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В [13] изучается слабое решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения на плоскости. При решении, используя формулу Грина, задача превращается в систему интегральных уравнений Фредгольма для неизвестных данных на другой части границы. В соответствующих пространствах Соболева установлены существование и единственность решений системы граничных интегральных уравнений. В [9] с условием конечности интеграла Дирихле на поведение решения на бесконечности изучены вопросы единственности решений задачи Дирихле для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях.

Отметим также работы [14]–[16], в которых изучены основные краевые задачи и задачи со смешанными краевыми условиями для бигармонического (полигармонического) уравнения. В частности, установлены существование и единственность решений в шаре, а также получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для бигармонического (полигармонического) уравнения, в том числе с полиномиальной правой частью.

В разных классах неограниченных областей с конечным весовым интегралом энергии (Дирихле) в [17]–[32] изучены вопросы единственности, а также найдены размерности пространств решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического (полигармонического) уравнения. Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Харди (см. [7]–[9]), в настоящей работе удалось получить критерий единственности (неединственности) решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова. Для построения решения используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Данная работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [30].

Введем обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в области Ω и имеющих компактный носитель в Ω; $H^2(\Omega,\Gamma)$, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ, по норме

$$\left\| u; H^2(\Omega,\Gamma) \right\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\le 2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\partial^\alpha \equiv \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $\alpha_j \ge 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$; если $\Gamma = \emptyset$, то пространство $H^2(\Omega,\Gamma)$ будем обозначать $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^2(\Omega)$;

$\overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ – пространство функций в Ω, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\left\| u; H^2(G_0) \right\|$, где $G_0 \subset \bar{\Omega}$ – произвольный компакт.

Обозначим

$$D(u,\Omega) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx, \quad D_a(u,\Omega) = \int_\Omega |x|^a \sum_{|\alpha|=2} \left|\partial^\alpha u\right|^2 dx,$$

$$\Omega_R = \Omega \cap \{x : |x| < R\}, \quad \partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x : |x| = R\}.$$

Под конусом K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат будем понимать такую область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Будем считать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\overline{\Omega}$.

Пусть $\binom{n}{k}$ – биномиальный коэффициент (n, k), $\binom{n}{k} = 0$ при $k > n$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Определение 1. *Решением однородного бигармонического уравнения* (1) *в* Ω будем называть функцию $u \in H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ такую, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx = 0.$$

Лемма. *Пусть u – решение уравнения* (1) *в* Ω, *удовлетворяющее условию* $D_a(u, \Omega) < \infty$. *Тогда*

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $P(x)$ *– многочлен,* $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $\Gamma(x)$ *– фундаментальное решение уравнения* (1), $C_\alpha = \text{const}$, $\beta \ge 0$ *– целое число, а для функции* $u^\beta(x)$ *справедлива оценка*

$$\left|\partial^\gamma u^\beta(x)\right| \le C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const},$$

для любого мультииндекса γ.

Замечание. Для фундаментального решения $\Gamma(x)$ бигармонического уравнения известно [33], что

$$\Gamma(x) = \begin{cases} C|x|^{4-n}, & \text{если} \quad 4 - n < 0 \quad \text{или} \quad n \text{ нечетно}, \\ C|x|^{4-n} \ln|x|, & \text{если} \quad 4 - n \ge 0 \quad \text{и} \quad n \text{ четно}. \end{cases}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим функцию $v(x) = \theta_N(x) u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \le 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \ge 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x : |x| < N\}$. Продолжим функцию v на $\mathbb{R}^n$, полагая $v = 0$ на $G = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Тогда функция $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 v = f,$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} f \subset \{x : |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $D_a(v, \mathbb{R}^n) < \infty$.

Теперь мы можем использовать теорему 1 из [34], поскольку она основывается на лемме 2 из [34], в которой никаких ограничений на знак σ нет. Следовательно, разложение

$$v(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$$

справедливо для любого a, где $P(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = \max\{2, 2 - n/2 - a/2\}$, $\beta_0 = 2 - n/2 + a/2$, $C_\alpha = \text{const}$ и

$$\left|\partial^\gamma v^\beta(x)\right| \le C_{\gamma\beta} |x|^{3-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Отсюда и из определения функции v следует равенство (3). Лемма доказана.

Определение 2. *Решением бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова* (1), (2) будем называть функцию $u \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_1) \cap \overset{\circ}{H}{}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\partial u/\partial\nu = 0$ на Γ_2, такую, что для всякой функции $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_1) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial\varphi/\partial\nu = 0$ на Γ_2, выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega \Delta u \Delta\varphi dx - \int_{\Gamma_2} \tau u\varphi ds = 0. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ пространство обобщенных решений бигармонической задачи с граничными условиями Дирихле и типа Стеклова (1), (2), имеющих конечный интеграл Дирихле, т.е.

$$\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = \left\{u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,\ D(u,\Omega) < \infty\right\}.$$

Положим по определению

$$\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \left\{u : \Delta^2 u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta u}{\partial\nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,\ D_a(u,\Omega) < \infty\right\}.$$

Через $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ обозначим размерности пространств $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$ соответственно. В зависимости от значения параметра a будем вычислять $\dim \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Бигармоническая задача* (1), (2) *с условием* $D(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $n+1$ *линейно независимых решений, т.е.* $\dim \mathrm{Ker}_0(\Delta^2) = n+1$.

Доказательство. Доказательство теоремы 4 приведено в [30].

Теорема 2. *Если* $-n \le a < n-4, n > 4$, *то* $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $0 \le a < n-4$, $n > 4$.

Очевидно, что $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$, если $a \ge 0$.

Докажем, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Тогда, согласно лемме 2, решение u имеет вид (3), т.е.

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\mathrm{ord}\, P(x) \le 1$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Легко заметить, что $D_a(P(x),\Omega) = 0$ и $D_a(R(x),\Omega) < \infty$ при $a < n-4$. Следовательно, $D_a(u,\Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$.

Итак, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim\ \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. Согласно теореме 4,

$$\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1.$$

Теперь рассмотрим случай $-n \le a < 0$, $n > 4$.

Пусть $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, где $-n \le a < 0$. Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω имеет вид (3).

Так как $\mathrm{ord} P(x) \le 1$, то $D(P(x),\Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D(R(x),\Omega) < \infty$ при $n > 4$. Следовательно, $D(u,\Omega) < \infty$, т.е. $u \in \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$.

С другой стороны, очевидно, что $\mathrm{Ker}_0(\Delta^2) \subset \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, если $a < 0$.

Таким образом, $\mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$ и $\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = \dim\ \mathrm{Ker}_0(\Delta^2)$. В силу теоремы 4, имеем

$$\dim\ \mathrm{Ker}_a(\Delta^2) = n+1.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $n-4 \le a < n-2$, $n > 4$, *то* $\dim \operatorname{Ker}_a(\Delta^2) = n$.

Доказательство.

Шаг 1. Для произвольного числа $e \ne 0$ построим обобщенное решение уравнения (1) с граничными условиями

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} + \tau u\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

и с условием

$$\chi(u_e, \Omega) \equiv \int_\Omega \left(\frac{|u_e|^2}{|x|^4} + \frac{|\nabla u_e|^2}{|x|^2} + |\nabla\nabla u_e|^2\right) dx < \infty. \tag{6}$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx$$

в классе $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = e,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = 0,\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$ допустимых функций.

Справедливость условия (6), как следствие неравенства Харди, следует из результатов работ [7]–[9]. Согласно лемме 2, решение u_e имеет вид

$$u_e(x) = P_e(x) + R_e(x),$$

где $P_e(x)$ – многочлен, $\operatorname{ord} P_e(x) \le 1$,

$$R_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Из условия (6) следует, что $P_e(x) \equiv 0$.

Покажем, что $C_0' \ne 0$. Предположим, что $C_0' = 0$. Умножив уравнение (1) на единицу и проинтегрировав по Ω_R, получим

$$\left(\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} + \int_{|x|=R}\right)\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Так как $C_0' = 0$, то

$$\left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n}, \quad C = \text{const},$$

$$\left|\int_{|x|=R} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds\right| \le \text{const} \int_{|x|=R} \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| ds \le \text{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = \text{const}\, R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Следовательно, принимая во внимание граничные условия на Γ_2, получаем

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma_2} \tau u_e ds = 0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что

$$\int_\Omega (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = -e\int_{\Gamma_1} \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds. \tag{8}$$

Умножив уравнение (1) на u_e и проинтегрировав по Ω_R с учетом граничных условий (5), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u_e)^2 dx = -\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds + J_1(u_e) + J_2(u_e), \tag{9}$$

где

$$J_1(u_e) = \int_{|x|=R} \Delta u_e \frac{\partial u_e}{\partial \nu} ds, \quad J_2(u_e) = -\int_{|x|=R} u_e \frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} ds.$$

Покажем, что $J_1(u_e) \to 0$, $J_2(u_e) \to 0$ при $R \to \infty$. Так как

$$|u_e| \le C|x|^{4-n}, \quad |\Delta u_e| \le C|x|^{2-n}, \quad \left|\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{3-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{1-n},$$

то при $R \to \infty$, $n > 4$ имеем

$$|J_i(u_e)| \le C \int_{|x|=R} |x|^{5-2n} ds = \text{const}\, R^{4-n} \to 0, \quad i = 1, 2.$$

Переходя к пределу в равенстве (9) при $R \to \infty$, получаем требуемое равенство (8), так как $u_e|_{\Gamma_1} = e$. Из равенств (7) и (8) следует, что

$$\int_\Omega (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = -e \int_{\Gamma_2} \tau u_e ds.$$

С помощью интегрального тождества

$$\int_\Omega (\Delta u_e)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_e|^2 ds = 0$$

получаем, что u_e является решением однородной задачи (1), (2), и $u_e = 0$, так как $e \ne 0$. Значит, $\Delta u_e = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (5) следует (см. [35, Гл. 2.4]), что $u_e \equiv e \ne 0$. Полученное соотношение противоречит условию (6). Таким образом, $C_0' \ne 0$.

Положим $s = e/C_0'$.

Шаг 2. Рассмотрим теперь уравнение (1) с граничными условиями

$$u_A(x)\big|_{\Gamma_1} = (Ax)\big|_{\Gamma_1}, \quad \left.\frac{\partial u_A(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1}, \quad \left.\frac{\partial u_A}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_A}{\partial \nu} + \tau u_A\right)\Big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{10}$$

где A – ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$, Ax обозначает стандартное скалярное произведение A и x.

Для любого ненулевого вектора A построим обобщенное решение бигармонического уравнения (1) с граничными условиями (10) и с условием

$$\chi(u_A, \Omega) < \infty. \tag{11}$$

Решение задачи (1), (10) строится вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v(x)|_{\Gamma_1} = (Ax)|_{\Gamma_1},\ \left.\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = \left.\frac{\partial (Ax)}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1},\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$.

Условия (11), как следствие неравенства Харди, следует из результатов [7]–[9]. Согласно лемме 2, имеет место равенство

$$u_A(x) = P_A(x) + R_A(x),$$

где $P_A(x)$ – многочлен, ord $P_A(x) \le 1$,

$$R_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Из условия (11) следует, что $P_A(x) \equiv 0$.

Шаг 3. Рассмотрим функцию

$$v = (u_A(x) - Ax) - (u_e - e),$$

где $e = sC_0$, число s определено выше. Очевидно, что v — решение задачи (1), (2).

Докажем, что $D_a(v,\Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Имеем

$$u_A(x) = C_0\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u_A^\beta(x), \tag{12}$$

$$u_e(x) = C_0'\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha' + u_e^\beta(x), \tag{13}$$

причем $C_0' = e/s = sC_0/s = C_0$. Следовательно,

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha'' + u_0^\beta(x),$$

где $C_\alpha'' = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Нетрудно проверить, что $D_a(\partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha',\Omega) < \infty$, $D_a(u_0^\beta,\Omega) < \infty$ при $a < n-2$. Отсюда следует, что $D_a(u_A - u_e,\Omega) < \infty$ и $D_a(v,\Omega) < \infty$. Легко заметить, что $v \not\equiv 0$.

Таким образом, каждому ненулевому вектору A из $\mathbb{R}^n$ отвечает ненулевое решение v_A задачи (1), (2) с условием $D_a(v_A,\Omega) < \infty$, причем

$$v_A = u_A(x) - u_e - Ax + e.$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Докажем, что соответствующие решения $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$ — линейно независимы.

Пусть $\sum_{i=1}^n c_i v_{A_i} \equiv 0$, где $c_i = \text{const}$. Положим $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n c_i A_i x$. Тогда

$$W_1 = \sum_{i=1}^n c_i(u_{A_i} - u_e + e), \qquad \int_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx < \infty.$$

Покажем, что $W_1 \equiv \sum_{i=1}^n c_i A_i x \equiv 0$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n c_i A_i = (t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\int_\Omega |x|^{a-2}|\nabla W_1|^2\,dx = \int_\Omega |x|^{a-2}(t_1^2 + \ldots + t_n^2)dx = \infty,$$

если $T \ne 0$. Следовательно, $T = \sum_{i=1}^n c_i A_i = 0$, откуда в силу линейной независимости векторов $A_1, \ldots, A_n$ получим, что $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет по крайней мере n линейно независимых решений.

Шаг 4. Докажем, что любое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ представляется в виде линейной комбинации функций $v_{A_1}, \ldots, v_{A_n}$, т.е.

$$u = \sum_{i=1}^n C_i v_{A_i}, \quad C_i = \text{const}.$$

Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = Ax + B + \sum_{|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha\Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x),$$

где A — постоянный вектор, B — некоторое число.

Так как $A_1, \ldots, A_n$ – базис в $\mathbb{R}^n$, то существуют константы $C_1, \ldots, C_n$ такие, что

$$A = -\sum_{i=1}^{n} C_i A_i.$$

Положим

$$u_1 \equiv u - \sum_{i=1}^{n} C_i v_{A_i}.$$

Очевидно, что функция u_1 является решением задачи (1), (2) и $D_a(u_1, \Omega) < \infty$.

Докажем, что $u_1 \equiv 0$ в Ω. Имеем

$$u_1 = b + z(x),$$

где $b = B - \sum_{i=1}^{n} C_i e_i$,

$$z(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^{n} C_i [u_{A_i} - u_{e_i}],$$

т.е. $z = u_1 - b$ и

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu} + \tau z\right)\right|_{\Gamma_2} = 0.$$

Легко заметить, что $\chi(z, \Omega) < \infty$. Таким образом, z является решением задачи (z_b):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z\big|_{\Gamma_1} = -b, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial \nu} + \tau z\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z, \Omega) < \infty.$$

Кроме того, $D_a(z, \Omega) < \infty$.

Докажем, что если $e \ne 0$, то $D_a(u_e, \Omega) = \infty$, где u_e – построенное выше решение задачи (e):

$$\Delta^2 u_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_e\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \left.\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_e}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta u_e}{\partial \nu} + \tau u_e\right)\right|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(u_e, \Omega) < \infty.$$

Имеем $u_e(x) = C_0' \Gamma(x) + R_1(x)$, причем $C_0' \ne 0$, если $\mathbf{e} \ne 0$, и

$$R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha' + u_e^\beta(x).$$

Легко проверить, что $D_a(R_1(x), \Omega) < \infty$.

Так как $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$, то внутри некоторого конуса K справедливо неравенство

$$|\nabla \nabla \Gamma(x)| \ge C|x|^{2-n}.$$

Поэтому

$$D_a(C_0' \Gamma(x), \Omega) \ge C(C_0') \int\limits_{K \cap \{|x| > H\}} |x|^{2(2-n)+a} dx = \infty,$$

если $C_0' \ne 0$ и $a \ge n - 4$. Отсюда следует, что $D_a(u_e, \Omega) = \infty$ при $e \ne 0$.

Теперь докажем единственность решения u_e задачи (e). Пусть существуют два решения v_1 и v_2 такие, что

$$v_1\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = \left.\left(\frac{\partial \Delta v_1}{\partial \nu} + \tau v_1\right)\right|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$v_2\big|_{\Gamma_1} = e, \quad \frac{\partial v_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta v_2}{\partial\nu} + \tau v_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Тогда функция $v_e = v_1 - v_2$ удовлетворяет условиям

$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta v_e}{\partial\nu} + \tau v_e\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(v_e,\Omega) < \infty.$$

Покажем, что $v_e \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральном тождестве (4) для функции v_e, подставляя функцию $\varphi = v_e\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \ge 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \le 1$, получаем

$$\int_\Omega (\Delta v_e)^2\theta_N(x)dx - \int_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,\theta_N(x)ds = -J_1(v_e) - J_2(v_e), \tag{14}$$

где

$$J_1(v_e) = 2\int_\Omega \Delta v_e \nabla v_e \nabla\theta_N(x)dx, \quad J_2(v_e) = \int_\Omega \Delta v_e v_e \Delta\theta_N(x)dx.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского с учетом условия $\chi(v_e,\Omega) < \infty$ легко показать, что $J_1(v_e) \to 0$ и $J_2(v_e) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (14) при $N \to \infty$, получаем

$$\int_\Omega (\Delta v_e)^2\theta_N(x)dx - \int_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,\theta_N(x)ds \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

С помощью интегрального тождества

$$\int_\Omega (\Delta v_e)^2dx - \int_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,ds = 0$$

получаем, что если v_e является решением однородной задачи (1), (2), то $\Delta v_e = 0$, $x \in \Omega$.

Таким образом,

$$\Delta v_e = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v_e\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial v_e}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial v_e}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta v_e}{\partial\nu} + \tau v_e\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Из того что

$$\int_{\Gamma_2} \tau|v_e|^2\,ds = 0$$

имеем $v_e \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры. Отсюда следует [35, Гл. 2.4], что $v_e \equiv 0$ в Ω. Тем самым решение u_e задачи (е) единственно. Следовательно, $z = u_e$ при $e = -b$ и $D_a(z,\Omega) = \infty$ при $b \neq 0$.

С другой стороны, $D_a(z,\Omega) < \infty$, где $z = u_1 - b$, откуда $b = 0$. Таким образом, $u_1 = z$ является решением следующей задачи (z_0):

$$\Delta^2 z = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$z\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial z}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial\Delta z}{\partial\nu} + \tau z\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad \chi(z,\Omega) < \infty.$$

В силу единственности решения задачи (е) $u_1 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если* $n - 2 \le a < \infty$, $n > 4$, *то* $\dim \operatorname{Ker}_a(\Delta^2) = 0$.

Доказательство. Пусть $a = n - 2$, $u \in \operatorname{Ker}_a(\Delta^2)$ и $u \not\equiv 0$.

Так как $\operatorname{Ker}_{n-2}(\Delta^2) \subset \operatorname{Ker}_{n-4}(\Delta^2)$, то в силу теоремы 4 решение u имеет вид

$$u = u_A - Ax - u_e + e, \tag{15}$$

где $e = sC_0$, а C_0 определяется из формулы (12).

Подставляя формулы (12) и (13) в (15), получаем

$$u(x) = P_0(x) + (C_0 - C_0')\Gamma(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P_0(x) = -Ax + e$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C_\alpha'$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Так как $C_0' = C_0$, то $C_0 - C_0' = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{0<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x). \tag{16}$$

Докажем, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (16). Пусть $\tilde{C}_1 = 0$, тогда

$$u(x) = P_0(x) + \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Умножив уравнение (1) на u и проинтегрировав по Ω_R, учитывая граничные условия (2), получим

$$\int_{\Omega_R} (\Delta u)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = \int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds. \tag{17}$$

Из (16) следует, что

$$|u| \le C|x|, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le C, \quad |\Delta u| \le C|x|^{-n}, \quad \left|\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right| \le C|x|^{-n-1}.$$

Поэтому

$$\left|\int_{|x|=R} \left(\Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}\right) ds\right| \le \mathrm{const} \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = \mathrm{const}\, R^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в равенстве (17), получаем

$$\int_{\Omega} (\Delta u)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = 0.$$

Из того что

$$\int_{\Gamma_2} \tau |u|^2\, ds = 0,$$

имеем $u \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры, и, значит, $\Delta u = 0$ в Ω. Отсюда и из граничных условий (2) следует [35, Гл. 2.4], что $u \equiv 0$ в Ω. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{C}_1 \neq 0$ в (16).

Так как $u \in \mathrm{Ker}_a(\Delta^2)$, то $D_a(u, \Omega) < \infty$. Легко проверить, что $D_a(P_0(x), \Omega) = 0$ и $D_a(R_2(x), \Omega) < \infty$, где

$$R_2(x) = \sum_{1<|\alpha|\le\beta} \partial^\alpha \Gamma(x)\tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x).$$

Тогда в силу (16) и неравенства треугольника получим $D_a((\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x), \Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = C|x|^{4-n}$. Тогда внутри некоторого конуса K имеет место неравенство

$$|\nabla\nabla(\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x)| \ge C|x|^{1-n}.$$

Следовательно,

$$\infty > D_a((\tilde{C}_1 \times \nabla)\Gamma(x), \Omega) \ge C \int_{K \cap \{|x|>H\}} |x|^{2-2n+a} dx = \infty \quad \text{при} \quad a \ge n-2.$$

Полученное противоречие означает, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Бигармоническая задача* (1), (2) *с условием* $D_a(u,\Omega) < \infty$ *имеет* $k(r,n)$ *линейно независимых решений при* $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, $n > 4$, $r > 1$, *где*

$$k(r,n) = \binom{r+n}{n} - \binom{r+n-4}{n}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно определить число линейно независимых решений бигармонического уравнения (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Известно, что размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $\binom{r+n}{n}$ (см. [36]).

Тогда размерность всех бигармонических многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна

$$\binom{r+n}{n} - \binom{r+n-4}{n},$$

так как бигармоническое уравнение представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $(r-4)$ в $\mathbb{R}^n$.

Если через $k(r,n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r, а через $l(r,n)$ – число линейно независимых однородных многочленов степени r, являющихся решениями уравнения (1), то

$$k(r,n) = \sum_{s=0}^{r} l(s,n),$$

где

$$l(s,n) = \binom{s+n-1}{n-1} - \binom{s+n-5}{n-1}, \quad s > 0.$$

Докажем сначала, что задача (1), (2) с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ при $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$ имеет $k(r,n)$ линейно независимых решений.

Пусть $w_1, \ldots, w_k$ – базис в пространстве полиномиальных решений уравнения (1), степени которых не превосходят r. Так как $\operatorname{ord} w_i \le r$, то $D_a(w_i,\Omega) < \infty$ при $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$.

По каждому w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, построим решение v_i уравнения (1) такое, что

$$v_i\big|_{\Gamma_1} = w_i\big|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \frac{\partial w_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$\left(\frac{\partial \Delta v_i}{\partial \nu} + \tau v_i\right)\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta w_i}{\partial \nu} + \tau w_i\right)\bigg|_{\Gamma_2},$$

$$D(v_i,\Omega) < \infty, \quad \int_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя функционал

$$F(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 dx$$

в классе допустимых функций $\{v : v \in H^2(\Omega),\ v\big|_{\Gamma_1} = w,\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial w}{\partial \nu}\big|_{\Gamma_1},\ v$ имеет компактный носитель в $\overline{\Omega}\}$.

Рассмотрим разность $q_i = w_i - v_i$. Имеем

$$\Delta^2 q_i = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$q_i\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta q_i}{\partial \nu} + \tau q_i\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0, \quad D(q_i,\Omega) < \infty.$$

Докажем, что q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{k} c_i q_i = 0, \quad c_i = \mathrm{const},$$

то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i (w_i - v_i) = 0,$$

т.е.

$$W \equiv \sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i \equiv V,$$

следовательно, $|W|^2 = |V|^2$, $|\nabla W|^2 = |\nabla V|^2$, $|\nabla\nabla W|^2 = |\nabla\nabla V|^2$, и

$$D(W, \Omega) = D(V, \Omega) < \infty,$$

$$\int_{\Omega} |\nabla W|^2 |x|^{-2}\, dx = \int_{\Omega} |\nabla V|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty,$$

$$\int_{\Omega} |W|^2 |x|^{-4}\, dx = \int_{\Omega} |V|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Согласно лемме 2, решение V уравнения (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^{\alpha} \Gamma(x) C_{\alpha} + v^{\beta}(x).$$

Легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty \quad \text{при} \quad n > 4.$$

В силу неравенства треугольника, $D(P(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |\nabla P(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) = 0$. Пусть $\operatorname{ord} P(x) = r_1$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство

$$|P(x)| \ge C |x|^{r_1}.$$

Следовательно,

$$\infty > \int_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-4}\, dx \ge C \int_{K \cap \{|x| > H\}} |x|^{(r_1 - 2)2} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{2r_1 - 4 + n} |x|^{-1}\, d|x|.$$

Так как $n > 4$, то полученный интеграл сходится только при $r_1 < 0$.

Таким образом, $P(x) \equiv 0$ и $V(x) = R(x)$, где $R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i \equiv W = V(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Так как W – многочлен, то

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = 0.$$

Отсюда $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, в силу того, что w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — базис в пространстве полиномиальных решений.

Таким образом, бигармоническая задача (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r, n)$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что всякое решение u задачи (1), (2) с условием $D_a(u, \Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, $q_i = w_i - v_i$.

Согласно лемме 2, решение уравнения (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ — многочлен, $\operatorname{ord} P(x) < m_0 = [2 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{|\alpha| \le \beta} \partial^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Так как $-2r + 2 - n \le a < -2r + 4 - n$, то $1 - n/2 - a/2 \le r < 2 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [2 - n/2 - a/2] = m_0$. Таким образом, $\operatorname{ord} P(x) \le r$.

Покажем, что $P(x)$ — решение уравнения (1). Имеем

$$0 = \Delta^2 u = \Delta^2 P(x) + \Delta^2 R(x),$$

причем $\Delta^2 R(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Так как $\Delta^2 P(x)$ — многочлен и

$$\Delta^2 P(x) = -\Delta^2 R(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty,$$

то $\Delta^2 P(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ — полиномиальное решение бигармонического уравнения (1). Следовательно, оно представляется линейной комбинацией функций w_i, $i = 1, 2, \ldots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i.$$

Докажем, что $u = \sum_{i=1}^k c_i q_i$. Положим

$$u_2 = u - \sum_{i=1}^k c_i q_i, \quad \text{т.е.} \quad u_2 = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i.$$

Тогда имеем

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

По построению решения v_i имеем $D(v_i, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla v_i|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |v_i|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Кроме того, легко проверить, что $D(R(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla R(x)|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |R(x)|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $D(u_2, \Omega) < \infty$,

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Таким образом, u_2 является решением следующей задачи (u_2):

$$\Delta^2 u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$D(u_2, \Omega) < \infty, \quad \int_\Omega |\nabla u_2|^2 |x|^{-2}\, dx < \infty, \quad \int_\Omega |u_2|^2 |x|^{-4}\, dx < \infty.$$

Покажем, что $u_2 \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для любой функции $\varphi \in H^2_{\rm loc}(\Omega)$,

$$\varphi\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \nu} + \tau \varphi\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0,$$

справедливо интегральное тождество (4)

$$\int_\Omega \Delta u_2 \Delta \varphi dx - \int_{\Gamma_2} \tau u_2 \varphi ds = 0.$$

Подставим $\varphi = u_2\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(|x|/N)$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \ge 2$, $\theta(s) = 1$ при $s \le 1$, получим

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2 \theta_N(x) dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2\, \theta_N(x) ds = -J_1(u_2) - J_2(u_2), \tag{18}$$

где

$$J_1(u_2) = 2\int_\Omega \Delta u_2 \nabla u_2 \nabla \theta_N(x) dx, \quad J_2(u_2) = \int_\Omega \Delta u_2 u_2 \Delta \theta_N(x) dx.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и учитывая условия задачи (u_2), легко показать, что $J_1(u_2) \to 0$ и $J_2(u_2) \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, переходя к пределу в (18) при $N \to \infty$, получаем

$$\int_\Omega (\Delta u_2)^2 dx - \int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2\, ds = 0.$$

Из того что

$$\int_{\Gamma_2} \tau |u_2|^2\, ds = 0,$$

имеем $u_2 \equiv 0$ на множестве $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ положительной меры, и, значит, $\Delta u_2 = 0$ в Ω. Таким образом,

$$\Delta u_2 = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_2\big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \Delta u_2}{\partial \nu} + \tau u_2\right)\bigg|_{\Gamma_2} = 0.$$

Отсюда следует [35, Гл. 2.4], что $u_2 \equiv 0$ в Ω. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stekloff W.* Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique // Ann. Sci. de l'E.N.S., 3e série. 1902. V. 19. P. 191–259, 455–490.
2. *Brock F.* An isoperimetric inequality for eigenvalues of the Stekloff problem // Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM) 2001. V. 81. № 1. P. 69–71.
3. *Kuttler J.R., Sigillito V.G.* Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues // J. Math. Anal. Appl. 1968. V. 23. № 1. P. 148–160.
4. *Payne L.E.* Some isoperimetric inequalities for harmonic functions // SIAM J. Math. Anal. 1970. V. 1. № 3. P. 354–359.
5. *Gazzola F., Grunau H.-Ch., Sweers G.* Polyharmonic Boundary Value Problems: Positivity Preserving and Nonlinear Higher Order Elliptic Equations in Bounded Domains // Lecture Notes Math. V. 1991. Springer-Verlag, 2010.
6. *Gazzola F., Sweers G.* On positivity for the biharmonic operator under Steklov boundary conditions // Arch. Rational Mech. Anal. 2008. V. 188. № 3. P. 399–427.

7. *Кондратьев В.А., Олейник О.А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
8. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Hardy's and Korn's inequality and their application // Rend. Mat. Appl. Serie VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
9. *Коньков А.А.* О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 354–366.
11. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* Estimates for solutions of the Dirichlet problem for biharmonic equation in a neighbourhood of an irregular boundary point and in a neighbourhood of infinity Saint–Venant's principle // Proc. Royal Society Edinburgh. 1983. V. 93A. P. 327–343.
12. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
13. *Cakoni F., Hsiao G.C., Wendland W.L.* On the boundary integral equation method for a mixed boundary value problem of the biharmonic equation // Complex Variables. 2005. V. 50: (7–115). P. 681–696.
14. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
15. *Карачик В.В.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
16. *Карачик В.В.* Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 132–150.
17. *Матевосян О.А.* О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 403–418.
18. *Матевосян О.А.* О решениях внешних краевых задач для системы теории упругости в весовых пространствах // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 12. С. 25–60.
19. *Матевосян О.А.* О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. Матем. 2003. Т. 67. № 5. С. 49–82.
20. *Matevosyan O.A.* On solutions of a boundary value problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2014. V. 21. № 1. P. 130–132.
21. *Matevossian H.A.* On solutions of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in unbounded domains // P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis Appl. 2015. V. 7. № 1. P. 74–78.
22. *Матевосян О.А.* Решение смешанной краевой задачи для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 4. С. 481–494.
23. *Матевосян О.А.* О решениях задачи Неймана для бигармонического уравнения в неограниченных областях // Матем. заметки. 2015. Т. 98. № 6. С. 944–947.
24. *Matevosyan O.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Navier problem for the polyharmonic equation in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 1. P. 135–138.
25. *Матевосян О.А.* О решениях одной краевой задачи для бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 10. С. 1431–1435.
26. *Matevossian H.A.* On the biharmonic Steklov problem in weighted spaces // Russ. J. Math. Phys. 2017. V. 24. № 1. P. 134–138.
27. *Matevossian H.A.* On solutions of the mixed Dirichlet–Steklov problem for the biharmonic equation in exterior domains // p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl. 2017. V. 9. № 2. P. 151–157.
28. *Matevossian H.A.* On the Steklov-type biharmonic problem in unbounded domains // Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 2. P. 271–276.
29. *Matevossian H.A.* On the polyharmonic Neumann problem in weighted spaces // Complex Variables & Elliptic Equations. 2019. V. 64. № 1. P. 1–7.
30. *Matevossian H.A.* On the mixed Dirichlet–Steklov-type and Steklov-type biharmonic problems in weighted spaces // Math. Comput. Appl. 2019. V. 24. № 1, 25. P. 1–9.
31. *Matevossian H.A.* Mixed boundary value problems for the elasticity system in exterior domains // Math. Comput. Appl. 2019. V. 24. № 2, 58, P. 1–7.
32. *Matevossian H.A.* On the mixed Neumann–Robin problem for the elasticity system in exterior domains // Russ. J. Math. Phys. 2020. V. 27. № 2. P. 272–276.
33. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
34. *Kondratiev V.A., Oleinik O.A.* On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // Rational Mech. Anal. 1987. V. 99. № 1. P. 75–99.
35. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
36. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977.