
**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.624

**ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

© 2021 г. В. П. Варин

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

e-mail: varin@keldysh.ru

Поступила в редакцию 28.05.2020 г.
Переработанный вариант 16.12.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Рассматривается задача интерполяции рекуррентных функций, заданных в целочисленных точках. Интерполяция понимается как построение аналитической функции, принимающей заданные значения в заданных точках. В частном случае итерации аналитических функций, т.е. композиции отображений, эта задача является классической задачей о построении непрерывных итераций (композиций) отображений и считается решенной. Однако существующие методы построения таких отображений являются весьма сложными как технически, так и по привлекаемым для их доказательства средствам. Мы даем два элементарных способа решения этой задачи, которые по эффективности значительно превосходят существующие. В частности, получен простой алгоритм обращения формального ряда (формула Лагранжа), который применим и для более общих степенно-логарифмических рядов. Также рассматривается задача об асимптотике рекуррентных последовательностей. Библ. 13. Фиг. 4.

Ключевые слова: рекуррентные последовательности, непрерывные композиции отображений, асимптотики рекуррентных последовательностей, логистическое отображение.

DOI: 10.31857/S0044466921060144

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи интерполяции лежат в основе современного анализа. Это относится как к классическим интерполяционным формулам Ньютона и Лагранжа, так и к более абстрактным задачам построения функции, принимающей заданные значения в заданных точках. Достаточно вспомнить историю построения гамма-функции, интерполирующей факториал. В данной статье мы рассмотрим задачу интерполяции именно в этом более общем контексте.

Рассмотрим, например, частный случай логистического отображения

$$z_{n+1} = z_n - z_n^2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Если $0 < z_0 < 1$, то нетрудно показать, что точка $z = 0$ является притягивающей неподвижной точкой отображения (1). Ясно также, что при таких начальных данных отображение (1) определяет семейство кривых, имеющих ось \mathbb{R} в качестве асимптоты. Последний факт, впрочем, виден пока только на графике, так как в литературе мы не нашли никаких указаний ни на формулу для этих кривых, ни на их асимптотику.

Отображение (1) является весьма частным случаем итераций отображения

$$z \rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1}, \quad (2)$$

где $F(z)$ является голоморфной функцией в некоторой окрестности нуля или формальным рядом, и $c_0 = 1$ (данная нормировка не является ограничением).

Задача интерполяции рекуррентной последовательности $z_{n+1} = F(z_n)$ локально является классической задачей о построении *непрерывной итерации* отображения (2). А именно, рассмотрим обычную композицию (итерацию) отображения

$$F^{(n)}(z) = F \circ F \circ \dots \circ F(z), \quad n \text{ раз.}$$

Ясно, что

$$F^{(n+m)}(z) = F^{(n)}(F^{(m)}(z)), \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Задача о непрерывной итерации состоит в обобщении этого полугруппового свойства на произвольные комплексные числа и наделения его свойствами группы, что подразумевает также следующие тождества:

$$F^{(1)}(z) = F(z), \quad F^{(0)}(z) \equiv z. \quad (4)$$

Классический пример непрерывной итерации дает отображение

$$F^{(s)}(z) = \frac{z}{1 - sz}.$$

Причина, по которой мы называем итерацию непрерывной, а не аналитической, помимо традиции (см. [1]), состоит в том, что построенные функции $F^{(x)}(z)$, $x \in \mathbb{C}$, не являются, вообще говоря, голоморфными при $x \notin \mathbb{Z}$.

Этот совершенно нетривиальный факт был, по-видимому, впервые доказан в [2] для функции $\exp(z) - 1$. А именно, в [2] была доказана гипотеза, высказанная в [3], о том, что функциональное уравнение

$$F(F(z)) = \exp(z) - 1$$

имеет решение в виде формального ряда $F(z)$, который всюду расходится. Это же справедливо, как мы увидим, и для логистического отображения (1).

Однако, как мы намерены показать (в отдельной работе), расходимость рядов, интерполирующих итерации отображения (1) (и, вероятно, (2)), не препятствует эффективной вычислимости функций на вещественной оси, так как все проблемы с расходимостью лежат в комплексной области.

Кажется интуитивно понятным, что задача о непрерывной итерации не может быть простой, так как она включает в себя как частный случай классическую формулу Лагранжа обращения степенного ряда, т.е.

$$F^{(-1)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} \left(\frac{w}{F(w)} \right) \Big|_{w=0}.$$

Найденные нами источники подтверждают эти ожидания.

Данная задача обычно решается с помощью бесконечных матриц Жаботинского (см. [4]) и экспоненциальных полиномов Белла (см. [5]). Систематическое изложение этих методов можно найти в [6, с. 314]. Этот же подход использовался в [7].

Наиболее продвинутый алгоритм решения этой задачи (насколько нам известно) дан в статье [1], целиком посвященной этой проблеме.

В отличие от других (известных нам) работ, алгоритм в [1] легко реализуем в системах компьютерной алгебры (CAS). Поэтому мы приведем сводку формул из [1], дающих решение задачи непрерывной итерации.

Сначала в [1] даются необходимые результаты о полиномах биномиального типа, которые определяются тождеством

$$(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)^x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \quad (5)$$

Тот факт, что $P_n(x)$ являются полиномами, легко доказуем, однако автор не приводит формул для их вычисления.

На самом деле, полиномы $P_n(x)$ вычисляются рекурсивным образом по формуле возведения ряда в произвольную степень (см., например, [8]). А именно, $P_0(x) = 1$ и

$$P_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} [x(n-m) - m] P_m(x) c_{n-m}, \quad n > 0, \tag{6}$$

что является, по-видимому, самым эффективным способом вычисления этих полиномов (см. разд. 2).

Далее эти полиномы используются для вычисления генератора $\omega(z)$ некоторой бесконечно-мерной группы Ли. А именно, пусть

$$F(z) = z(1 + a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots), \quad k \geq 1, \quad a_k \neq 0.$$

Полиномы $P_n(x)$ следует вычислять для функции $F(z)/z$. Далее,

$$\omega(z) = z(b_k z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots),$$

где k – то же, что и для $F(z)$, и $b_k = a_k$. Далее (см. [1, (101)]),

$$b_n = \frac{1}{(n-k)b_k} \sum_{i=1}^{n-k} [(k+i+1)a_{k+i} - P_{k+i}(n-i+1)]b_{n-i}, \quad n > k.$$

Наконец (см. [1, (69)]),

$$F^{(s)}(z) = z + \frac{s}{1!} \omega(z) + \frac{s^2}{2!} \omega(z)\omega'(z) + \dots + \frac{s^n}{n!} \omega_n(z) + \dots,$$

где

$$\omega_0(z) = z, \quad \omega_1(z) = \omega(z), \quad \omega_{n+1}(z) = \omega(z)\omega'_n(z), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Эти формулы работают, однако мы не рекомендуем ими пользоваться, так как в разд. 2 мы дадим два новых способа решения задачи о непрерывной итерации. Один достаточно простой, использующий разностные уравнения и полиномы Бернулли, а другой совершенно элементарный, основанный на единственной прямой рекурсии.

Мы используем полученный алгоритм, реализованный в CAS Maple, для вычисления, как мы полагаем, беспрецедентно большого количества полиномов непрерывной итерации (300–400) для некоторых модельных функций.

Это позволило нам подтвердить данную выше информацию о расходимости рядов для дробных итераций. А также был обнаружен неизвестный ранее эффект хаотичного поведения коэффициентов формальных рядов на фоне их роста (см. разд. 2).

В разд. 3 мы рассматриваем задачу интегрирования дискретного отображения, используя в качестве модели логистическое отображение (1).

Получена общая формула для интеграла этого отображения, позволяющая не только интерполировать итерационную последовательность (1), но и вычислить ее асимптотику как при $z_n \rightarrow 0$, так и при $z_n \rightarrow \infty$.

В заключение этого вводного раздела заметим, что развитая нами техника применима не только для рекуррентных последовательностей первого порядка рекурсии. Рассмотрим, например, рекурсию 2-го порядка

$$z_{n+1} = z_n + z_{n-1}^2, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

Найдем функцию (формальный ряд) $G()$ такую, что $z_n = G(z_{n+1})$. Тогда $z_{n-1} = G(z_n)$, поэтому $z_{n+1} = z_n + G^2(z_n)$. Применим функцию $G()$ к обеим частям последнего равенства. Тогда получим $(z_n \rightarrow z)$ функциональное уравнение

$$z = G(z + G^2(z)),$$

откуда однозначно находим для $w = G(z)$:

$$w = z - z^2 + 4z^3 - 24z^4 + 178z^5 - 1512z^6 + 14152z^7 - 142705z^8 + 1528212z^9 + \dots,$$

а также для $z = G^{(-1)}(w)$ получим

$$z = w + w^2 - 2w^3 + 9w^4 - 56w^5 + 420w^6 - 3572w^7 + 33328w^8 - 334354w^9 + \dots$$

Любопытно, что обе последовательности целых (что пока ниоткуда не следует) коэффициентов $[z^n]G(z)$ и $[w^n]G^{(-1)}(w)$ уже встречались в литературе (см. [9, A213591 и A138740]). По опубликованным данным эти ряды (вероятно) расходятся.

2. ФОРМУЛЫ НЕПРЕРЫВНОЙ ИТЕРАЦИИ

Поскольку задача уже решена, то мы знаем, что непрерывная итерация отображения (2) имеет вид

$$F^{(s)}(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^{n+1}, \tag{7}$$

где $a_n(s)$ – однозначно определяемые полиномы степени не выше n .

Однако мы не будем пользоваться этой информацией, а найдем функции $a_n(s)$ как полиномы прямо из определения непрерывной итерации.

В силу (4), $a_n(0) = 0$, $a_n(1) = c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Запишем тождество $F^{(s+1)}(z) = F(F^{(s)}(z))$ в явном виде

$$F^{(s+1)}(z) - F^{(s)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (F^{(s)}(z))^{n+1}.$$

Положим $a_0(s) = 1$ и преобразуем это тождество к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s+1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(s)z^m \right)^{n+1}.$$

Далее, запишем тождество

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m(s)z^m \right)^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{n,m}(s)z^m,$$

где $Y_{n,m}(s)$ – неизвестные пока функции.

Видно, что $Y_{n,0}(s) = a_0^{n+1}(s) = 1$. Применение формулы Эйлера возведения ряда в степень дает рекуррентную формулу

$$Y_{n,m}(s) = \sum_{k=1}^m \left[\frac{k(n+2)}{m} - 1 \right] a_k(s) Y_{n,m-k}(s), \quad m > 0.$$

Таким образом, функции $Y_{n,m}(s)$ вычисляются с помощью неизвестных пока функций $a_n(s)$.

Изменив порядок суммирования и собрав подобные члены, получаем тождество

$$a_n(s+1) - a_n(s) = \sum_{m=1}^n c_m Y_{m,n-m}(s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

что являет собой бесконечную треугольную систему разностных уравнений.

Итак, мы видим, что функции $Y_{n,m}(s)$ выражаются через функции $a_n(s)$ и наоборот. Однако видно, что все эти рекурсии однозначно разрешимы, так как каждая из нужных функций выражается через уже известные, т.е. ранее определенные.

Таким образом, осталось решить разностное уравнение (8) с правой частью, которая по индукционному предположению является полиномом от s . Но это уравнение линейно, поэтому достаточно решить уравнение

$$P(n, s+1) - P(n, s) = s^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

а это с учетом “констант интегрирования” в точности

$$P(n, s) = \frac{B(n, s) - B(n)}{n},$$

где $B(n, s)$ – полиномы Бернулли, а $B(n) = B(n, 0)$ – числа Бернулли.

Итак, алгоритм вычисления полиномов $a_n(s)$ состоит в следующем.

Начальные значения $a_0(s) = Y_{n,0}(s) = 1$ известны. На шаге n правая часть (8) является известным полиномом, определяемым ранее найденными функциями. Поэтому, чтобы решить разностное уравнение (8), нужно каждый моном As^{n-1} в правой части (8) заменить на полином $AP(n, s)$.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} a_1(s) &= c_1s, & a_2(s) &= (s^2 - s)c_1^2 + c_2s, \\ a_3(s) &= \left(s^3 - \frac{5}{2}s^2 + \frac{3}{2}s\right)c_1^3 + \frac{5}{2}(s^2 - s)c_1c_2 + c_3s, \\ a_4(s) &= \left(s^4 - \frac{13}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{8}{3}s\right)c_1^4 + \left(\frac{13}{3}s^3 - \frac{21}{2}s^2 + \frac{37}{6}s\right)c_2c_1^2 + \\ &+ 3(s^2 - s)c_3c_1 + \frac{3}{2}(s^2 - s)c_2^2 + c_4s, \dots \end{aligned}$$

Мы вычислили эти полиномы в явном виде до $a_{18}(s)$ (по другому алгоритму, см. ниже). В литературе мы не нашли явных формул для этих полиномов для произвольных коэффициентов c_n в (2). Встречаются только отдельные (редкие) примеры для конкретных функций.

Предложенный способ вычисления непрерывной итерации использует только один неэлементарный (но хорошо известный) результат о решении разностных уравнений (9) в полиномах Бернулли. Появление этих полиномов также отчасти объясняет, откуда может появиться расходимость в этих рядах. Дело, вероятно, в скорости роста коэффициентов полиномов Бернулли, которая весьма высока.

Заметим, что современные CAS генерируют полиномы Бернулли автоматически, но при необходимости можно воспользоваться и явной формулой

$$B(n, x) = \sum_{k=0}^n C(n, k)B(k)x^{n-k},$$

где $B(k)$ – числа Бернулли, $C(n, k)$ – биномиальные коэффициенты.

По нашим оценкам, эффективность данного алгоритма значительно выше, чем у изложенного во Введении. Генератор $\alpha(z)$ в случае необходимости вычисляется переразложением формального ряда (7) по степеням s .

Перейдем к изложению другого способа вычисления непрерывной итерации, который по эффективности оказался на несколько порядков лучше изложенных выше. Например, предложенный нами алгоритм вычислил на нашем компьютере 20 полиномов непрерывной итерации для функции $F(z) = \exp(z) - 1$ за 764.64 с, в то время как следующий алгоритм вычислил эти полиномы за 0 с, т.е. за время, которое программа не может измерить (см. также ниже).

Запишем групповое свойство непрерывной итерации (7) $F^{(t)}(F^{(s)}(z)) = F^{(t+s)}(z)$ в явном виде. После некоторых упрощений оно принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)z^n \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)z^n\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s+t)z^n. \tag{10}$$

У функций $a_n(s)$ не предполагается никаких свойств, кроме дифференцируемости. Продифференцируем тождество (10) по переменной s , а затем положим $s = 0$. Введем новый набор неизвестных величин

$$b_n = \left. \frac{d}{ds} a_n(s) \right|_{s=0}.$$

Тогда с учетом $a_n(0) = 0, n > 0$, получим тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) z^n (n+1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} a_n(t) \right) z^n. \tag{11}$$

Отметим, что таким приемом мы избавились от необходимости возводить бесконечные ряды в степень, что является атрибутом всех существующих способов вычисления непрерывной итерации.

Тождество (11) преобразуется с помощью обычной конволюции рядов. Запишем его в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^n (m+1) a_m(t) b_{n-m} \right] z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dt} a_n(t) \right) z^n, \tag{12}$$

и это сразу дает бесконечную треугольную систему дифференциальных уравнений для определения функций $a_n(t)$:

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = b_n + \sum_{m=1}^{n-1} (m+1) a_m(t) b_{n-m}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Так как $a_0(t) \equiv 1$, то $b_0 = 0$, поэтому суммирование в (13) до $n - 1$.

Итак, мы получили треугольную систему ОДУ первого порядка с набором неизвестных параметров b_n . Однако нам известны как начальные значения функций $a_n(t)$, т.е. $a_n(0) = 0$, так и краевые условия $a_n(1) = c_n$, поэтому система уравнений (13) однозначно разрешима в полиномах.

Видно, что $b_1 = c_1$, и $a_1(t) = c_1 t$. На шаге n получаем

$$d_n(t) = \int_0^t \left[\sum_{m=1}^{n-1} (m+1) a_m(s) b_{n-m} \right] ds, \quad b_n = c_n - d_n(1), \tag{14}$$

где $d_n(t)$ – вспомогательная функция. И, окончательно,

$$a_n(t) = b_n t + d_n(t). \tag{15}$$

Напомним, что алгоритм вычисления полиномов непрерывной итерации $a_n(t)$, изложенный в [1], основан на изучении изоморфизмов некоторых групп Ли, ассоциированных с этими полиномами и с полиномами биномиального типа $P_n(x)$. Проведем еще одно сравнение между этими полиномами.

Если подставить $x \rightarrow x + y$ в формулу (5), затем продифференцировать ее по y , затем подставить $y = -x$, то получим следующую систему ОДУ для полиномов $P_n(x)$:

$$\frac{d}{dt} P_n(x) = q_n + \sum_{m=1}^{n-1} P_m(x) q_{n-m}, \quad n > 0, \tag{16}$$

где

$$q_n = \left. \frac{d}{dx} P_n(x) \right|_{x=0}.$$

Таким образом, единственное отличие рекуррентных формул для полиномов $P_n(x)$ и $a_n(t)$ – это наличие множителя $(m + 1)$ в формулах (13) и (14), что также приводит к расходимости рядов (7) в отличие от (5).

Вычислительные эксперименты показывают, что формула (6) лишь незначительно более эффективна, чем аналог формулы (15), для вычисления полиномов $P_n(x)$.

Возникает вопрос, существует ли формула прямой рекурсии для $a_n(t)$, аналогичная формуле (6), т.е.

$$a_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} A(n, m, t) a_m(t) c_{n-m}, \quad n > 0,$$

где $A(n, m, t)$ – это полином от t ? Ответ отрицательный. На третьем шаге получим $A(3, m, t)$ как рациональную функцию t .

Прежде чем перейти к вычислениям по нашим формулам, сделаем небольшое отступление, рассчитанное на пользователей CAS, так как все эти алгоритмы не предназначены для ручного счета.

Любая современная CAS состоит из ядра, написанного обычно на C++, и основной CAS, написанной уже на специфическом для данной CAS языке.

Ядро CAS состоит в основном из компилятора (точнее, интерпретатора) языка CAS, а также из некоторого набора достаточно простых процедур для работы с достаточно простыми объектами (например, процедур сложения и умножения полиномов с числовыми или символьными коэффициентами, выбора монома из полинома, подстановки одной переменной вместо другой, и т.п.).

Все эти операции обращаются непосредственно к ядру, состоящему из откомпилированных машинных кодов. Поэтому они выполняются на несколько порядков быстрее, чем процедуры, написанные на языке CAS, которые обрабатываются интерпретатором.

Таким образом, везде, где это возможно, следует пользоваться имеющимися “атомарными” операциями вместо альтернативных (и очевидных) языковых конструкций, которые не принадлежат ядру.

В нашем случае операция интегрирования в (14) заведомо не принадлежит ядру ввиду ее общности. Поэтому, чтобы проинтегрировать полином, стоящий под интегралом в (14), следует каждый моном At^n , $n \in \mathbb{N}_0$, заменить на моном $At^{n+1}/(n+1)$.

Программа, реализованная нами в системе Maple по формулам (14), (15), позволяет считать, как мы полагаем, беспрецедентное количество полиномов непрерывной итерации отображений за весьма ограниченное время. Приведем некоторую статистику.

Расчет для символьных коэффициентов c_n дал 18 полиномов $a_n(s)$ примерно за 5 мин. Далее каждый новый полином $a_n(s)$ считается дольше, чем все предыдущие, но здесь основное ограничение – это объем полученных массивов. Для числовых коэффициентов c_n расчет идет на порядки быстрее.

Например, специализированный алгоритм для решения уравнения

$$A(A(z)) = \sin z,$$

данный в [9, A048602], посчитал на нашем компьютере 200 числовых коэффициентов формального ряда $A(z)$ за 13.8 с. Наш алгоритм для непрерывной итерации посчитал 200 полиномов $a_n(s)$ за 3.3 с. Величины $a_n(1/2)$ дают решение данного уравнения. Заметим, что формальный ряд $A(z)$ расходится.

Величины $a_n(1/3)$ дают решение уравнения $A(A(A(z))) = \sin z$; а также $a_n(-1)$ дают коэффициенты разложения для $\arcsin z$, и т.п.

Отметим, что непрерывная итерация $F^{(i)}(z)$, $i^2 = -1$, для вещественных отображений (2) дает пример формальных рядов, обращение которых по формуле Лагранжа эквивалентно комплексному сопряжению их коэффициентов.

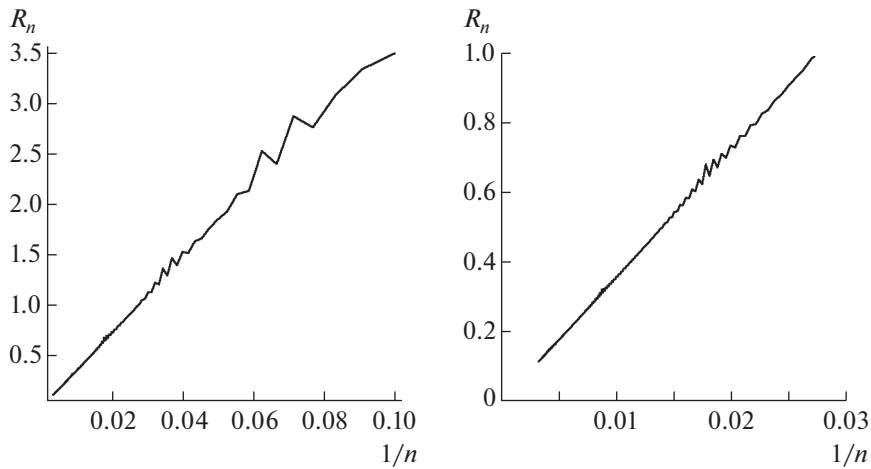
Далее в этом разделе $F_1(z) = \exp(z) - 1$ и $F_2(z) = z - z^2$ используются как модельные функции.

Для $F_1(z)$, очевидно, $c_n = 1/(n+1)!$, $n = 1, 2, \dots$. Расчет 100 полиномов $a_n(s)$ занял 2.5 с. Следующие 50 полиномов вычислены за 8 с. Следующие 50 (т.е до 200-го) – за 23 с. Далее до 250-го – за 55 с. И, наконец, до 300-го – за 110 с, что дает ясное представление о вычислительной сложности алгоритма. Таким образом, имеем

$$F_1^{(s)}(z) = z + \frac{s}{2}z^2 + \left(\frac{s^2}{4} - \frac{s}{12}\right)z^3 + \left(\frac{s^3}{8} - \frac{5s^2}{48} + \frac{s}{48}\right)z^4 + \left(\frac{s^4}{16} - \frac{13s^3}{144} + \frac{s^2}{24} - \frac{s}{180}\right)z^5 + \left(\frac{s^5}{32} - \frac{77s^4}{1152} + \frac{89s^3}{1728} - \frac{91s^2}{5760} + \frac{11s}{8640}\right)z^6 + \dots \quad (17)$$

И в частном случае $s = 1/2$:

$$F_1^{(1/2)}(z) = z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{48} + \frac{z^5}{3840} - \frac{7z^6}{92160} + \frac{z^7}{645120} + \frac{53z^8}{3440640} - \frac{281z^9}{30965760} + \dots$$



Фиг. 1. Диаграмма роста коэффициентов формального ряда $(\exp(z) - 1)^{(1/2)}$.

Коэффициенты последнего разложения сначала быстро убывают до члена z^9 , потом остаются малы до ≈ 35 -го коэффициента, а затем весьма быстро возрастают. Расчеты, разумеется, проводились в рациональной арифметике.

Напомним, что расходимость формального ряда $F_1^{(1/2)}(z)$ доказана в [2]. Теперь это можно увидеть на графике.

Обозначим $e_n = [z^n]F_1^{(1/2)}(z)$, т.е. e_n — это n -й коэффициент данного формального ряда. Далее пусть $R_n = 1/|e_n|^{1/n}$. Согласно классической формуле Коши–Адамара, нижний предел величин R_n , $n \rightarrow \infty$, дает радиус сходимости формального ряда.

На фиг. 1 приведены график функции $R_n(1/n)$ (слева) и его увеличенный фрагмент (справа) для 300 коэффициентов e_n . На фиг. 1 отчетливо видна расходимость этого формального ряда, так как кривые хорошо ложатся на асимптоту $y = 36x$, т.е. $R_n \rightarrow 0$.

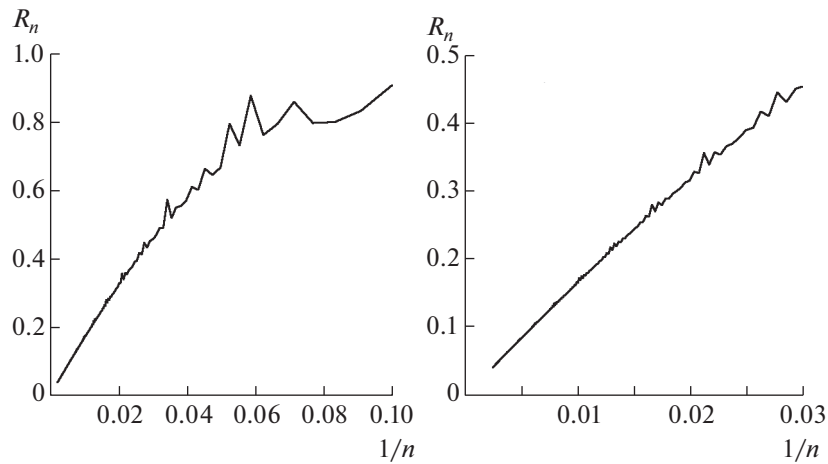
На фиг. 1 также видно одно явление, не описанное ранее в литературе (насколько нам известно). А именно, коэффициенты формального ряда, определенного вполне детерминистским образом, ведут себя хаотически, демонстрируя поведение, подобное перемежаемости. Это явление хорошо изучено в задачах гидродинамики (см., например, [10, с. 183]).

По нашим наблюдениям, такое поведение коэффициентов тейлоровских разложений достаточно сложно устроенных функций (т.е. не только для формальных рядов) может быть типичным. И если этот факт подтвердится, то речь может идти о новом виде детерминистского хаоса.

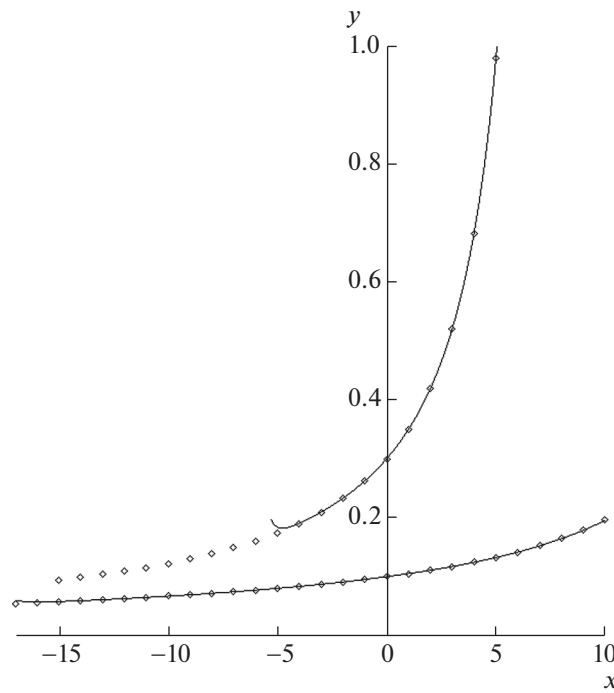
Для непрерывной итерации отображения (1), т.е. для $F_2(z)$, ситуация аналогична показанной на фиг. 1. А именно, формальный ряд $(z - z^2)^{(1/2)}$ расходится (см., например, [11]). Отличие диаграммы роста его коэффициентов (см. фиг. 2 для 400 полиномов $a_n(s)$) от диаграммы на фиг. 1 состоит в том, что величины $R_n(1/n)$ ложатся на асимптоту $y \approx 16x$.

Формальное доказательство расходимости рядов $F_{1,2}^{(1/2)}(z)$ является весьма сложным (см., например, [2]). В разд. 3 мы дадим некоторую информацию, указывающую на расходимость ряда $F_2^{(1/2)}(z)$.

Теперь мы применим полученные формулы для интерполяции рекуррентной последовательности $F_1^{(n)}(z_0)$, $n \in \mathbb{Z}$. Иными словами, мы будем итерировать функции $z_{n+1} = \exp(z_n) - 1$ и $z_{n+1} = \log(1 + z_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, а затем наложим полученные точки на график непрерывной итерации $y = (\exp(z_0) - 1)^{(x)}$, где $x \in \mathbb{R}$ принадлежит некоторому интервалу. Результат для начальных значений $z_0 = 0.1$ и $z_0 = 0.3$ и 20 полиномов $a_n(x)$ в разложении (17) приведен на фиг. 3.



Фиг. 2. Диаграмма роста коэффициентов формального ряда $(z - z^2)^{(1/2)}$.



Фиг. 3. Непрерывные и дискретные итерации функции $y = (\exp(z_0) - 1)^{(x)}$.

Из фиг. 3 следует, что, несмотря на расходимость формальных рядов непрерывной итерации, они могут быть использованы для интерполяции дискретных итераций.

Однако мы не можем пока утверждать, что нам удалось проинтегрировать дискретное отображение $z_n = F_1^{(n)}(z_0)$.

Во-первых, данная интерполяция носит локальный характер, т.е. сильно зависит от начального значения z_0 , которое должно быть достаточно мало. Во-вторых, эта интерполяция не может быть продолжена неограниченно в обе стороны, что видно на фиг. 3. В-третьих, суммируемость расходящихся асимптотических рядов с заданной точностью не может быть гарантирована без дополнительных исследований.

3. ИНТЕГРАЛ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу интерполяции рекуррентной последовательности с более общих, т.е. глобальных, позиций.

В качестве модельной задачи мы рассмотрим отображение (1), которое является частным случаем логистического отображения

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r, \quad y_0 \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Отображение (1) весьма удобно по двум причинам.

Во-первых, этот случай, как мы полагаем, достаточно репрезентативен. Во-вторых, логистическое отображение очень хорошо изучено, и по нему имеется обширная литература.

В частности, известно, что при $r = 1$ отображение (18) не имеет никаких хаотических режимов при $y_0 \in \mathbb{R}$. Так что, казалось бы, здесь не следует ожидать ничего необычного. Однако, как мы увидим, это совсем не так.

Рассмотрим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n - hy_n^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где h — формально введенный малый параметр.

Очевидно, при $h = 1$, $x_0 = 0$ эта система в точности моделирует итерации отображения (1). При этом переменная $x_n = n$ служит дискретным временем в системе (19).

Найдем функцию $H(x, y)$ такую, что итерации системы (19) будут принадлежать линиям уровня $H(x, y) = C$.

Положим формально $x_n = x$, $y_n = y$ и рассмотрим тождество

$$0 = H(x + h, y - hy^2) - H(x, y) = \left(\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right) h + O(h^2).$$

Очевидно, функция $H(x, y)$ (если существует) не единственна. Поэтому будем выбирать простейшие частные решения. Нетрудно проверить, что

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + hG(x, y) + \dots$$

убивает член при первой степени h . Для второй степени h получим уравнение

$$0 = H(x + h, y - hy^2) - H(x, y) = \left(y + \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} - y^2 \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \right) h^2 + O(h^3),$$

откуда находим

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + \frac{h}{2} \log y^2 + h^2 G_2(x, y) + \dots$$

Далее легко убедиться, что будут получаться аналогичные уравнения в частных производных, которые дают формальный ряд по y . Поэтому формальный параметр h исчерпал свою пользу, и далее положим $h = 1$. Таким образом, решение уравнения $H(x + 1, y - y^2) = H(x, y)$ будем искать в виде

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \log y^2 + U(y),$$

где $U(y)$ — формальный ряд. Эта подстановка после некоторых упрощений дает уравнение для $U(y)$

$$U(y) - U(y - y^2) = \frac{y}{1 - y} + \frac{1}{2} \log(1 - y)^2. \quad (20)$$

Для коэффициентов формального ряда $U(y)$ существует рекуррентное соотношение. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$U(y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n (-y)^n = \frac{1}{2} y + \frac{1}{3} y^2 + \frac{13}{36} y^3 + \frac{113}{240} y^4 + \frac{1187}{1800} y^5 + \frac{877}{945} y^6 + \dots$$

Здесь

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor (n+1)/2 \rfloor}^{n-1} C(k, n+1-k) u_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть x , $C(n, m)$ – биномиальный коэффициент.

Заметим, что первый коэффициент с отрицательным знаком в разложении $U(y)$ имеет степень 11. Далее, как и следует ожидать для подобных биномиальных конволюций, коэффициенты u_n быстро растут, и данный ряд всюду расходится, демонстрируя “перемежаемость”, как на фиг. 1, 2.

Последнее утверждение можно проверить численно, как мы это сделали на фиг. 1, 2. Однако формальное доказательство расходимости ряда для $U(y)$ может быть весьма сложным.

Расходимость этого ряда устанавливается косвенным методом, т.е. можно показать, что $y = 0$ является предельной точкой для особенностей функции $U(y)$, которые лежат в комплексной области. Однако это является предметом отдельной работы.

Функциональное уравнение (20) сингулярно при $y = 1$. Упростим его, избавившись по возможности от сингулярностей на вещественной оси. Сделаем замену

$$U(y) = \frac{1}{2} \log(1-y)^2 + \frac{y}{1-y} - V(y)$$

в уравнении (20). Получим уравнение для функции $V(y)$:

$$V(y-y^2) - V(y) = \log(y^2 - y + 1) + \frac{y(1-y)}{y^2 - y + 1}. \tag{21}$$

Отметим, что уравнение (21) регулярно на всей вещественной оси, так как $y^2 - y + 1 \neq 0$ при $y \in \mathbb{R}$. Поэтому можно показать, что функция $V(y)$ однозначно вычислима на всей вещественной оси, причем с неограниченной и гарантированной точностью. Приняв пока этот факт на веру, получаем окончательно, что

$$H(x, y) = -x + \frac{1}{2} \log[y^2(1-y)^2] + \frac{y^2 - y + 1}{y(1-y)} - V(y) = \text{const} \tag{22}$$

является первым интегралом логистического отображения (1), дающим его глобальную интерполяцию для вещественного времени x , а также при определенных ограничениях и для комплексных x .

Уравнение (22) можно интерпретировать как решение уравнения для непрерывной итерации $y = (z - z^2)^{(x)}$ относительно x , где $z = y_0$ играет роль константы интегрирования в (22). Например, возьмем нулевую итерацию $x = 0$, $y_0 = 0.1$. Получим $H(0, y_0) = C = 7.75116409701$. Тогда $H(1, y_1) = H(2, y_2) = \dots = C$, а также $H(1/2, y_{1/2}) = C$, где $y_{1/2} = (y_0 - y_0^2)^{(1/2)}$. Последнее равенство выполняется с некоторой погрешностью ($\approx 10^{-12}$), которая сильно зависит от значения y_0 .

Отметим, что правильное суммирование расходящихся рядов – это отдельная задача, которую мы здесь не рассматриваем (см., например, [12]).

Из уравнения (22) можно сделать некоторые выводы, даже не зная пока всех свойств функции $V(y)$. Например, найдем асимптотику отображения (1) при $0 < z_0 < 1$, обещанную во Введении.

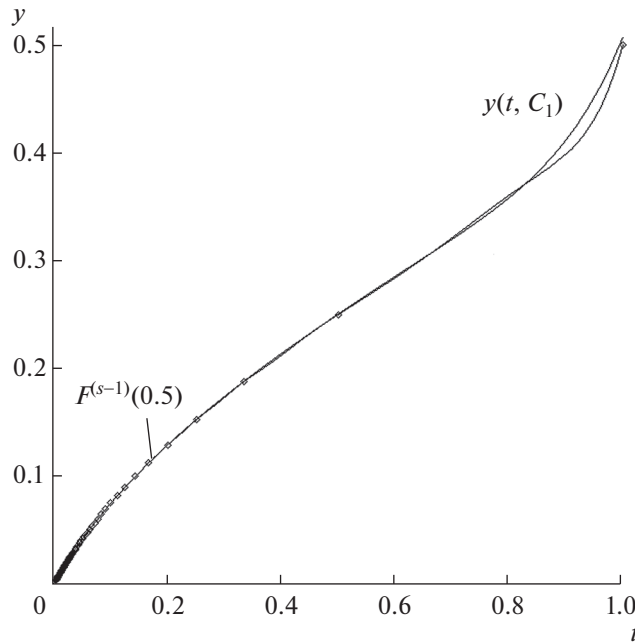
Поскольку $z_n = y_n \rightarrow 0$, то удобно взять время $t = 1/x$, как мы сделали на фиг. 1. Положим $H(x, y) = C$, тогда имеем

$$t = y + (C - \log y)y^2 - \left[\frac{1}{2} - (C - \log y)^2 \right] y^3 + \dots \tag{23}$$

Этот ряд может быть продолжен неограниченно, так как коэффициенты $[y^n]V(y)$ известны.

Таким образом, мы получаем так называемый *пси-ряд* (см. [13, с. 249]), который к тому же заведомо расходится в силу расходимости ряда для $V(y)$.

Осталось обратить ряд (23), что можно, конечно, сделать средствами CAS. Но можно также применить алгоритм непрерывной итерации.



Фиг. 4. Асимптотика логического отображения при $0 < z_0 < 1$.

Для этого коэффициенты c_n определяем так, как будто $\log y$ – это константа. Затем вычисляем полиномы $a_n(s)$, как показано в разд. 2. Затем подставляем $s = -1$ и получаем обращение ряда $y = t + \dots$, но с $\log y$ в правой части вместо $\log t$. Поэтому далее надо просто сделать несколько подстановок полученного ряда в себя, что обеспечит $\log t$ в правой части. В результате получим

$$y = t + (\log t - C)t^2 + \left[\log^2 t + (1 - 2C)\log t + C^2 - C + \frac{1}{2} \right] t^3 + \left[\log^3 t + \left(\frac{5}{2} - 3C \right) \log^2 t + \left(3C^2 - 5C + \frac{5}{2} \right) \log t - C^3 + \frac{5}{2}C^2 - \frac{5}{2}C + \frac{5}{6} \right] t^4 + \dots \tag{24}$$

Данная формула (посчитанная нами до члена t^5) используется следующим образом.

Возьмем начальные значения отображения (1): $y = y_1 = 0.5$ при времени $x = t = 1$. Тогда $H(1, 0.5) = C_1 \approx 0.77261429$ получим прямо по степенному ряду для $V(y)$ (точное значение $C_1 = 0.7679937861362$). Далее посчитаем 300 точек итерации отображения (1) и построим график массива $[1/n, y_n]$, $n = 1, 2, \dots, 300$. Затем построим график функции (24), $y = y(t, C_1)$, и наложим графики на одну фигуру. В результате (см. фиг. 4) видим хорошее совпадение графиков, несмотря на расходимость ряда (24) и приближенное значение константы C_1 .

Также на фиг. 4 показан график непрерывной итерации отображения (1) как параметризованной кривой $\{1/s, F^{(s-1)}(0.5), s \in [1, 6]\}$, $F(z) = z - z^2$, для 20 полиномов $a_n(s)$. Видно, что вначале кривая непрерывной итерации хорошо ложится на массив точек, но при $s > 5$ становится непригодной. Причем увеличение числа полиномов $a_n(s)$ здесь не поможет ввиду расходимости рядов непрерывной итерации.

Для изучения асимптотики отображения (1) при $|z_n| \rightarrow \infty$ некоторые свойства функции $V(y)$ понадобятся нам уже здесь.

Подстановка $y \rightarrow 1 - y$ в уравнение (21) показывает, что функция $V(y)$ является четной по отношению к точке $y = 1/2$. В частности, $V(0) = V(1) = 0$, $V(y) = V(1 - y)$. Поэтому (21) можно переписать в виде

$$V(y^2 - y + 1) - V(y) - \log(y^2 - y + 1) - \frac{y(1 - y)}{y^2 - y + 1} = 0.$$

Непосредственно из этого уравнения можно найти асимптотику функции $V(y)$ при $y \rightarrow \infty$. Опуская промежуточные выкладки, получаем, что при $y \rightarrow +\infty$

$$V(y) = A + 2 \log y - \frac{\log \log y}{\log 2} - \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1}{2 \log 2 \log y} \right) - \frac{1}{y^2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8 \log 2 \log^2 y} \right) + O\left(\frac{1}{y^3}\right),$$

где A – однозначно определяемая константа, которую мы вычислим, когда научимся вычислять функцию $V(y)$ на вещественной оси.

Учитывая, что $y_n \rightarrow -\infty$ при начальном значении y_0 вне интервала $[0,1]$, а также, что $V(y) = V(1 - y)$, получаем

$$n = b + \frac{\log \log |y_n|}{\log 2} + \frac{1}{2|y_n| \log 2 \log |y_n|} + O\left(\frac{1}{y_n^2}\right),$$

где b – некоторая константа, определяемая начальными данными. Поскольку $|y_n|$ растет очень быстро, то ограничимся первым членом этого разложения. Окончательно получаем

$$|y_n| \asymp \exp(2^{n-b}).$$

Легко проверить, что массив точек $\{n, \log \log |y_n|\}$ хорошо ложится на линейную функцию $y = (x - b) \log 2$, если константу b вычислить по данной асимптотике для 2-й или 3-й итераций отображения $y_{n+1} = y_n - y_n^2$.

Такого рода взрывной рост, когда функция растет быстрее экспоненты, но не имеет вертикальной асимптоты, может описывать увеличение популяции организмов на начальной стадии, когда внешние факторы ограничения роста еще не включились.

В заключение заметим, что асимптотики итерационных последовательностей мало изучены. Например, хорошо известно, что итерации синуса $y_{n+1} = \sin y_n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, неизбежно стремятся к нулю. Но в литературе вряд ли удастся найти информацию о том, как именно они стремятся к нулю.

Даже для логистического отображения (1) удастся найти только некоторые оценки роста (убывания).

Как мы видели, эта задача весьма нетривиальна. Однако теперь, имея некоторые представления о том, как должна выглядеть такая асимптотика, ее можно, в принципе, вычислить методом неопределенных коэффициентов. Например, для итераций синуса $y_{n+1} = \sin y_n$, $y_0 > 0$, имеем

$$y_{1/t} = \sqrt{3}t + \left(A + \frac{3\sqrt{3}}{10} \log t \right) t^{3/2} + \left[\frac{79\sqrt{3}}{700} + \frac{3A}{5} + \frac{\sqrt{3}A^2}{2} + \left(\frac{9\sqrt{3}}{50} + \frac{9A}{10} \right) \log t + \frac{27\sqrt{3}}{200} \log^2 t \right] t^{5/2} + \dots,$$

где A – некоторая константа, определяемая начальными данными, а функция $y_{1/t}$ интерполирует последовательность $[t = 1/n, y_n]$, $n \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Labelle G.* Sur l’Inversion et l’Iteration Continue des Series Formelles // *Europ. J. Combinatorics*. 1980. V. 1. P. 113–138.
2. *Baker I.N.* Zusammensetzungen ganzer Funktionen // *Math. Zeitschr.* 1958. Bd. 69. S. 121–163.
3. *Thron W.J.* Entire solutions of a functional equation // *Canadian J. Math.* 1956. V. 8. P. 47–48.
4. *Jabotinsky E.* Analytic Iteration // *Transact. Am. Math. Soc.* 1963. V. 108. № 3. P. 457–477.
5. *Rota G.-C., Mullin R.* On the foundations of combinatorial theory, graph theory and applications. New York: Academic Press, 1970. P. 167–213.
6. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions (3rd ed.) Dordrecht-Holland: D. Reidel Publ. Co., 1974.
7. *Knuth D.E.* Convolution Polynomials // [arXiv:math/9207221v1]. 1992; <http://arXiv.org/abs/math/9207221v1>
8. *Euler L.* Introduction to the analysis of the infinite (Blanton J.D., tr.). New York: Springer, 1988, 1990.
9. Sloane online encyclopedia of integer sequences, <http://oeis.org>.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
11. *Levin M.* MSc. Thesis. Israel Institute of Technology, 1960.
12. *Варин В.П.* Факториальное преобразование некоторых классических комбинаторных последовательностей // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 59. № 6. С. 1747–1770.
13. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. New-York: John Wiley & Sons, 1976.