ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 7, с. 1082–1100

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.929

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА[1)]

© 2021 г. А. А. Алиханов[1,*], М. Х. Бештоков[2,**], М. Х. Шхануков-Лафишев[2,***]

[1] 355017 Ставрополь, ул. Пушкина, 1, ФГАОУ ВО “Северо-Кавказский федеральный университет”, Россия

[2] 360004 Нальчик, ул. Шортанова, 89а, ИПМатем. и автоматизации, КБНЦ РАН, Россия

*e-mail: alikhanov-tom@yandex.ru

**e-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

***e-mail: lafishev@yandex.ru

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.
Переработанный вариант 26.11.2020 г.
Принята к публикации 11.03.2021 г.

Исследуется первая краевая задача для уравнения конвекции–диффузии дробного порядка. Построена локально-одномерная разностная схема. С помощью принципа максимума получена априорная оценка в равномерной метрике. Доказаны устойчивость и сходимость рассматриваемой разностной схемы. Построен алгоритм приближенного решения локально-одномерной разностной схемы. Проведены численные расчеты, иллюстрирующие полученные теоретические результаты в работе. Библ. 32. Табл. 2.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, уравнение конвекции–диффузии, производная дробного порядка, дробная производная по времени в смысле Капуто, локально-одномерная разностная схема, устойчивость и сходимость разностных схем.

DOI: 10.31857/S0044466921070024

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Для описания структуры неупорядоченных сред и протекающих в них процессов широко используется теория фракталов (см. [1]–[17]). Примерами неупорядоченных сред являются пористые тела. При этом фракталами могут быть поровое пространство, скелет породы, поверхность скелета породы и т.д. В случае, когда пространство представляет собой фрактал с размерностью Хаусдорфа–Безиковича d_f, погруженный в сплошную среду с размерностью d ($d \geq d_f$, $d = 2, 3$), для описания движения примеси в потоке однородной среды используется дифференциальное уравнение дробного порядка (см. [18]).

Перенос, описываемый операторами с дробными производными, на больших расстояниях от источника приводит к совершенно иному поведению относительно малых концентраций по сравнению с классической диффузией. Эти малые концентрации, или “далекие хвосты распределений”, при дробной диффузии подчинены степенному закону убывания, и их существование может заставить пересмотреть существующие ранее представления о безопасности, базирующиеся на представлениях об экспоненциальной скорости затухания (см. [19], [20]).

В [21, с. 199] и [22] дается описание геометрии облаков, размеры которых заключены в широком диапазоне от 1 до 1.2×10^6 км^2. Выяснено, что периметр облака связан с фрактальной размер-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 20-51-53007.

ностью облака $D = 1.35 \pm 0.05$. Заметим, что порядок дробной производной связан с размерностью фрактала (см. [3], [4], [14]).

В [23] найдена связь между порядком дробной производной и фрактальной размерностью.

В [24] рассматривается локально-одномерная схема для решения линейных и квазилинейных уравнений параболического типа с любым числом p пространственных переменных, пригодная для произвольной области G. Доказана равномерная устойчивость локально-одномерной схемы по правой части, краевым и начальным данным. Показано, что локально-одномерные схемы дают точность $O(h^2 + \tau)$.

В [25] рассмотрена локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности с дробной по времени производной без учета движения самой среды. Построена экономичная аддитивная схема в области сложной формы. Показано, что построенная схема обладает свойством суммарной аппроксимации $\psi = O(h_\alpha^2 + \tau)$ в регулярных узлах, в нерегулярных узлах $\psi = O(1)$, где h_α и τ – шаги сетки по направлению x_α и времени t.

Построению локально-одномерных схем для численного решения различных краевых задач для уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области посвящены работы [5], [25]–[27], в которых априорные оценки были получены лишь при условии, когда $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

В настоящей работе рассмотрено построение локально-одномерной (экономичной) разностной схемы для численного решения первой краевой задачи для уравнения переноса пассивных примесей дробного порядка в многомерном случае, основная идея которого состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению ряда одномерных задач по каждому из координатных направлений. Построена локально-одномерная разностная схема. С помощью принципа максимума получена априорная оценка для решения задачи в разностной трактовке, откуда следует равномерная сходимость локально-одномерной схемы в классе достаточно гладких решений при $0 < \alpha < 1$, где α – порядок дробной производной. Построен алгоритм решения локально-одномерной разностной схемы. Проведены численные эксперименты.

1. ПОСТАНОВКА ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В замкнутом цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \le t \le T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, \ldots, x_p) : 0 < x_k < l_k,\ k = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\Gamma} = \mu(x,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \quad \bar{G} = G \cup \Gamma, \tag{1.3}$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

есть дробная производная Капуто порядка α,

$$L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + r_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} - q_k(x,t) u, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

$u(x,t)$ – концентрация примеси в точке x в момент времени t,

$\Theta_k(x,t)$ – коэффициент турбулентной диффузии по направлениям x_k,

$r_k(x,t)$ – компоненты вектора скорости воздушных потоков по направлениям x_k,

$$0 < c_0 \le \Theta_k(x,t), \quad q_k(x,t) \le c_1, \quad |r_k(x,t)| \le c_2,$$

$$c_0, c_1, c_2 \text{ – положительные постоянные}, \quad Q_T = G \times (0 < t \le T], \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$x = (x_1, \ldots, x_p), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p).$$

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (1.1)–(1.3) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

Локально-одномерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области для случая, когда оператор $Lu = \sum_{k=1}^{p} L_k u$, $L_k u = \dfrac{\partial u^2}{\partial x_k^2}$, рассмотрены в [5], а для случая, когда оператор $L_k u = \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(k_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right)$ с краевыми условиями III рода, рассмотрены в [27].

В той же области вместо задачи (1.1)–(1.3) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε:

$$\varepsilon u_t^{\varepsilon} + \partial_{0t}^{\alpha} u^{\varepsilon} = Lu^{\varepsilon} + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.4}$$

$$u^{\varepsilon}\big|_{\Gamma} = \mu(x,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.5}$$

$$u^{\varepsilon}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{1.6}$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Так как при $t = 0$ начальные условия для уравнения (1.1) и (1.4) совпадают, то в окрестности $t = 0$ у производной u_t^{ε} не возникает особенности типа пограничного слоя (см. [28], [29, с. 10]).

Покажем, что $u^{\varepsilon} \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим $\tilde{z} = u^{\varepsilon} - u$ и подставим $u^{\varepsilon} = \tilde{z} + u$ в задачу (1.4)–(1.6). Тогда получим

$$\varepsilon \tilde{z}_t + \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z} = L\tilde{z} + \tilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.7}$$

$$\tilde{z}\big|_{\Gamma} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.8}$$

$$\tilde{z}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{1.9}$$

где $\tilde{f}(x,t) = -\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.7) скалярно на $\tilde{\mathbf{z}}$ и получим энергетическое тождество

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}, \tilde{z}\right) + \left(\partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}, \tilde{z}\right) = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k}\right), \tilde{z}\right) + \left(\sum_{k=1}^{p} r_k(x,t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k}, \tilde{z}\right) - \left(\sum_{k=1}^{p} q_k(x,t)\tilde{z}, \tilde{z}) + (\tilde{f}(x,t), \tilde{z}\right). \tag{1.10}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v) = \int_G uv\,dx, \quad (u,u) = \|u\|_0^2, \quad \|u\|_{L_2(0,l_k)}^2 = \int_0^{l_k} u^2(x,t)\,dx_k.$$

Далее через M_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 1 из [30], преобразуем интегралы, входящие в тождество (1.10):

$$\left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}, \tilde{z}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\tilde{z}\|_0^2, \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} \left(\partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}, \tilde{z}\right) = \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}, \tilde{z}\right) = \frac{1}{p} \int_G \sum_{k=1}^{p} \tilde{z} \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}\,dx = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \int_G \tilde{z} \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}\,dx = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \int_{G'} \left(\int_0^{l_k} \tilde{z} \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}\,dx_k\right) dx' \ge \\ \ge \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{p} \int_{G'} \left(\int_0^{l_k} \partial_{0t}^{\alpha} \tilde{z}^2\,dx_k\right) dx' = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{p} \int_{G'} \partial_{0t}^{\alpha} \|\tilde{z}\|_{L_2(0,l_k)}^2\,dx' = \frac{1}{2p} \sum_{k=1}^{p} \partial_{0t}^{\alpha} \|\tilde{z}\|_0^2 = \frac{1}{2} \partial_{0t}^{\alpha} \|\tilde{z}\|_0^2, \end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right),\tilde z\right)=\sum_{k=1}^{p}\int_{G'}\Theta_k(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\bigg|_0^{l_k}dx'-\sum_{k=1}^{p}\int_G\Theta_k(x,t)\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right)^2dx=$$
$$=-\sum_{k=1}^{p}\int_G\Theta_k(x,t)\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right)^2dx\le -c_0\|\tilde z_x\|_0^2, \tag{1.13}$$

где $u_x^2=\sum_{k=1}^p u_{x_k}^2$, $G'=\{x'=(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_p):0<x_k<l_k\}$, $dx'=dx_1\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_p$.

Далее, для оценки слагаемых в правой части применим ε-неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{p}r_k(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k},\tilde z\right)=\int_G\sum_{k=1}^{p}r_k(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\tilde z dx=\sum_{k=1}^{p}\int_G r_k(x,t)\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\tilde z dx\le$$
$$\le\varepsilon_1\sum_{k=1}^{p}\int_G\left(\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\right)^2dx+M_1^{\varepsilon_1}\sum_{k=1}^{p}\int_G\tilde z^2dx, \tag{1.14}$$

$$\left(\tilde f(x,t),\tilde z\right)\le\frac12\|\tilde f\|_0^2+\frac12\|\tilde z\|_0^2. \tag{1.15}$$

Учитывая преобразования (1.11)–(1.15), из (1.10) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2+\frac12\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2+c_0\|\tilde z_x\|_0^2+c_0\|\tilde z\|_0^2\le\varepsilon_1\|\tilde z_x\|_0^2+M_2^{\varepsilon_1}\|\tilde z\|_0^2+\frac12\|\tilde f\|_0^2. \tag{1.16}$$

Выбирая $\varepsilon_1=\frac{c_0}{2}$, из неравенства (1.16) находим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2+\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z_x\|_0^2+\|\tilde z\|_0^2\le M_3\|\tilde z\|_0^2+M_4\|\tilde f\|_0^2. \tag{1.17}$$

Проинтегрируем (1.17) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z_x\|_0^2\right)d\tau\le M_5\int_0^t\|\tilde z\|_0^2d\tau+M_6\int_0^t\|\tilde f\|_0^2d\tau, \tag{1.18}$$

где $D_{0t}^{\alpha-1}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$, $0<\alpha<1$.

В (1.18) покажем, что $\int_0^t\|\tilde z\|_0^2d\tau=D_{0t}^{-\alpha}\left(D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2\right)$:

$$D_{0t}^{-\alpha}\left(D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^{\tau}\frac{\|\tilde z\|_0^2ds}{(\tau-s)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\|\tilde z\|_0^2ds\int_s^{\tau}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}(\tau-s)^{\alpha}}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\|\tilde z\|_0^2ds\int_0^{\infty}\frac{dv}{(1+v)v^{\alpha}}=\frac{B(1-\alpha,\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\|\tilde z\|_0^2d\tau=\int_0^t\|\tilde z\|_0^2d\tau, \tag{1.19}$$

где $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка α, $0<\alpha<1$.

Учитывая (1.19), из (1.18) получаем

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\int_0^t\left(\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z_x\|_0^2\right)d\tau\le M_5D_{0t}^{-\alpha}\left(D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2\right)+M_6\int_0^t\|\tilde f\|_0^2d\tau. \tag{1.20}$$

С помощью леммы 2 (см. [30]) из (1.20) получаем неравенство

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2\le M_7\int_0^t\|\tilde f\|_0^2d\tau=\varepsilon^2M_7\int_0^t\|u_{\tau}\|_0^2d\tau=O(\varepsilon^2), \tag{1.21}$$

где M – зависит только от входных данных задач (1.1)–(1.3), $\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2=\int_0^t\|\tilde z_x\|_0^2d\tau$.

Из априорной оценки (1.21) следует сходимость u^{ε} к u при $\varepsilon \to 0$ в норме $\|\tilde{z}\|_1^2 = \varepsilon\|\tilde{z}\|_0^2 + D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde{z}\|_0^2 + \|\tilde{z}\|_{2,Q_t}^2 + \|\tilde{z}_x\|_{2,Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (1.4)–(1.6) будем принимать за приближенное решение первой краевой задачи для уравнения конвекции–диффузии дробного порядка (1.1)–(1.3).

2. ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \dfrac{l_k}{N_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_{h_k} = \left\{x_k^{(i_k)} = i_k h_k : i_k = 0, 1, \ldots, N_k, h_k = \frac{l_k}{N_k}, k = 1, 2, \ldots, p\right\}, \quad \bar{\omega} = \prod_{k=1}^{p} \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $0 \le t \le T$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}'_{\tau} = \left\{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau,\ j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1,\ \tau = \frac{T}{j_0},\ k = 1, 2, \ldots, p\right\},$$

содержащую, наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$. Будем обозначать через ω'_{τ} множество узлов сетки $\bar{\omega}'_{\tau}$, для которых $t > 0$.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ по аналогии с [31] уравнению (1.4) поставим в соответствие цепочку “одномерных” уравнений, для этого перепишем уравнение (1.4) в виде

$$\pounds^{\varepsilon} = \varepsilon u_t^{\varepsilon} + \partial_{0t}^{\alpha} u^{\varepsilon} - Lu^{\varepsilon} - f = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} \pounds_k u^{\varepsilon} = 0, \quad J_k u^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{p} u_t^{\varepsilon} + \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u^{\varepsilon} - L_k u^{\varepsilon} - f_k,$$

где $f_k(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{p} f_k = f$.

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\begin{gathered} \pounds_k \vartheta_{(k)} = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ \vartheta_{(k)} = \mu(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma_k, \end{gathered} \tag{2.1}$$

полагая при этом

$$\begin{gathered} \vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \quad j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \\ \vartheta_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = \vartheta_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right), \quad k = 2, 3, \ldots, p, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где Γ_k – множество граничных точек по направлению x_k.

Аналогично [31, с. 401], получим для уравнения (2.1) номера k монотонную схему второго порядка аппроксимации по h_k, для которой справедлив принцип максимума при любых τ и h_k, $k = 1, 2, \ldots, p$. Для этого рассмотрим уравнение (2.1) при фиксированном k с возмущенным оператором $\tilde{L}_k$:

$$\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}\vartheta_{(k)} = \tilde{L}_k \vartheta_{(k)} + f_k, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{2.3}$$

где

$$\tilde{L}_k\vartheta_{(k)} = \chi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}\right) + r_k(x,t)\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k} - q_k(x,t)\vartheta_{(k)},$$

$\chi_k = \dfrac{1}{1+R_k}$, $R_k = 0.5h_k\dfrac{|r_k|}{\Theta_k}$ – разностное число Рейнольдса.

Каждое из уравнений (2.3) заменим разностной схемой

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_t^{\frac{s}{p}} = \tilde{\Lambda}_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k)y^{j+\frac{k-1}{p}}\right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\\ x\in\omega_h,\quad k=1,2,\ldots,p,\\ y^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}},\quad j=0,1,\ldots,j_0-1,\\ y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\bar{G},\end{gathered}\tag{2.4}$$

где

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_{j+\frac{k}{p}}}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{\left(t_{j+\frac{k}{p}}-\eta\right)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)u_t^{\frac{s}{p}} + O\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

$$y_t^{\frac{s}{p}} = \frac{y^{\frac{s}{p}} - y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}},\quad \mu^{j+\frac{k}{p}} = \mu\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right),\quad \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = f_k\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right),\quad k=1,2,\ldots,p,$$

σ_k – произвольные параметры, $\gamma_{h,k}$ – множество граничных по направлению x_k узлов,

$$x\in\bar{\omega}_h = \left\{x_i = (i_1h_1,\ldots,i_ph_p)\in\bar{G},\ i_k=0,1,\ldots N_k, h_k=\frac{l_k}{N_k}\right\},$$

$$\tilde{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} = \chi_k\left(a_k y_{\bar x}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} + b_k^+a_k^{(+1)}y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}} + b_k^-a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} - d_k y^{j+\frac{k}{p}},$$

$$d_k^{j+\frac{k}{p}} = q\left(x_i, t^{j+\frac{k}{p}}\right),\quad a^{(+1)} = a_{i+1},\quad a_i^j = \Theta(x_{i-1/2},\bar t),\quad \bar t = t_{j+\frac{1}{2}},$$

$$r_k^+ = 0.5(r_k + |r_k|)\geq 0,\quad r_k^- = 0.5(r_k - |r_k|)\leq 0,\quad b_k^+ = \frac{r_k^+}{\Theta_k},\quad b_k^- = \frac{r_k^-}{\Theta_k},\quad r_k = r_k^+ + r_k^-,$$

3. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (2.4) номера k не аппроксимирует уравнение (1.4), но сумма погрешностей аппроксимации:

$$\psi = \psi_1 + \ldots + \psi_p,$$

стремится к нулю при τ и $|h|$, стремящимся к нулю.

Будем считать $\sigma_k = 1$, $k=1,2,\ldots,p$. Пусть $u = u(x,t)$ – решение задачи (1.4)–(1.6), а $y^{j+\frac{k}{p}}$ – решение разностной задачи (2.4). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{k}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{k}{p}} = u\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$, полагая $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в разностное уравнение (2.4), получаем

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) z_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \tilde{\Lambda}_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{3.1}$$

$$z^{j+\frac{k}{p}}\Big|_{\gamma_{h,k}} = 0, \quad z(x,0) = 0, \tag{3.2}$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \tilde{\Lambda}_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Обозначив через

$$\mathring{\psi}_k = \left(L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

и, замечая, что

$$\sum_{k=1}^{p} \mathring{\psi}_k = 0,$$

если

$$\sum_{k=1}^{p} f_k = f,$$

представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде

$$\psi_k = \mathring{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \left(\tilde{\Lambda}_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}(\partial_{0t}^{\alpha} u)^{j+\frac{1}{2}}\right) -$$

$$- \left(\frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{1}{2}}\right) + \mathring{\psi}_k = \mathring{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

$$\overset{*}{\psi}_k = \left(\tilde{\Lambda}_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}(\partial_{0t}^{\alpha} u)^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{1}{2}}\right).$$

Ясно, что $\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau)$, так как каждая из схем (2.4) номера k аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (2.3), т.е. $\|\overset{*}{\psi}_k\|$ стремится к нулю (в некоторой норме) при $|h| \to 0$, $\tau \to 0$. Таким образом, ЛОС (2.4) обладает суммарной аппроксимацией

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau), \quad \mathring{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p} \mathring{\psi}_k = 0,$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \psi_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\mathring{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \overset{*}{\psi}_k = O\left(|h|^2 + \tau\right).$$

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (2.4), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Исследование устойчивости разностной схемы (2.4) будем проводить с помощью принципа максимума (см. [31, с. 226]), для чего решение задачи (2.4) представим в виде суммы

$$y = \overline{y} + v,$$

где $\overline{y}$ — решение однородных уравнений (2.4) с неоднородными краевыми и начальными условиями

$$\left.\overline{y}^{\,j+\frac{k}{p}}\right|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\overline{y}(x,0) = u_0(x),$$

v — решение неоднородных уравнений (2.4) с однородными краевыми и начальными условиями

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t}^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\overline{y}_t^{\frac{s}{p}} = \tilde\Lambda_k\overline{y}^{\,j+\frac{k}{p}},\\ \left.\overline{y}^{\,j+\frac{k}{p}}\right|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}},\\ \overline{y}(x,0) = u_0(x),\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar t}^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_t^{\frac{s}{p}} = \tilde\Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\\ \left.v^{j+\frac{k}{p}}\right|_{\gamma_{h,k}} = 0,\\ v(x,0) = 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Получим оценку для $\overline{y}$, записав уравнение (4.1) в канонической форме. В точке $P = P\left(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ имеем

$$\begin{gathered}\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{\chi_k a_{k,i_k+1}}{h_k^2} + \frac{\chi_k a_{k,i_k}}{h_k^2} + \frac{b_k^+ a_{k,i_k+1}}{h_k} - \frac{b_k^- a_{k,i_k}}{h_k} + d_k\right]\overline{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k}{p}} = \frac{\chi_k a_{k,i_k+1}}{h_k^2}\overline{y}_{i_k+1}^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{\chi_k a_{k,i_k}}{h_k^2}\overline{y}_{i_k-1}^{\,j+\frac{k}{p}} + \frac{b_k^+ a_{k,i_k+1}}{h_k}\overline{y}_{i_k+1}^{\,j+\frac{k}{p}} - \\ - \frac{b_k^- a_{k,i_k}}{h_k}\overline{y}_{i_{k-1}}^{\,j+\frac{k}{p}} + \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}(2 - 2^{1-\alpha})\right]\overline{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)\overline{y}_{i_k}^{0} + \right. \\ \left. + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)\overline{y}_{i_k}^{\frac{1}{p}} + \ldots + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\overline{y}_{i_k}^{\,j+\frac{k-2}{p}}\right],\end{gathered} \tag{4.3}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Справедлива следующая (см. [5])

Лемма. *Пусть* $l = pj + k - 1 \geq 1$, *тогда имеет место неравенство*

$$-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}} > 0, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1, \quad k = 2, 3, \ldots, p. \tag{4.4}$$

В [31] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q\in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega,$$

$$y(P) = \mu(P) \quad \text{при} \quad P \in S,$$

где P, Q – узлы сетки $\Omega + S$, $Ш'(P)$ – окрестность узла P, не содержащего самого узла P. Коэффициенты $A(P)$, $B(P,Q)$ удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geq 0. \tag{4.5}$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$, узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S – границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ при $t_{j+\frac{k}{p}} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h,k}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, p$ и $j = 0, 1, \ldots, j_0$.

Справедливы следующие теоремы (см. [32]).

Теорема 1 (см. [32, с. 344]). *Пусть коэффициенты уравнения*

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega, \tag{*}$$

удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) \geq 0, \quad D(P) > 0, \quad P \in \overset{*}{\omega},$$

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = F(P) = 0, \quad P \in \overset{\circ}{\omega},$$

где $\overset{\circ}{\omega}$ *– некоторое связное подмножество множества* ω, *а* $\overset{*}{\omega}$ *– дополнение* $\overset{\circ}{\omega}$ *до* ω.

Тогда для решения задачи (*) *справедлива оценка*

$$\|y\|_C \leq \left\|\frac{F(P)}{D(P)}\right\|_{C^*},$$

где

$$\|f\|_C = \max_{P \in \omega} |f(P)|, \quad \|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|.$$

Теорема 2 (см. [32, с. 347]). *Если выполнены условия*

$$D'(P_{(n+1)}) > 0 \quad \text{для всех} \quad P_{(n+1)} \in \omega, \quad A(P_{(n+1)}) > 0, \quad B(P_{(n+1)}, Q) \geq 0$$

для всех $Q \in Ш''_n$, $Q \in Ш'_{n+1}$,

$$\sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q) > 0, \quad \frac{1}{D'(P_{(n+1)})} \sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q) \leq 1 + c_1\tau,$$

где $c_1 = \mathrm{const} > 0$ *не зависит от* τ, h.

Тогда для решения задачи

$$A(P_{(n+1)})y(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in Ш'_{n+1}} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + \Phi(P_{(n+1)}),$$

где

$$P_{(n+1)} = P(x, t_{n+1}),$$

$$\Phi(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in Ш'_n} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + F(P_{(n+1)}),$$

$$D'(P_{(n+1)}) = A(P_{(n+1)}) - \sum_{Q \in Ш''_m} B(P_{(n+1)}, Q),$$

справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{C_h} \leq e^{c_1 t_n}\left(\|y_0\|_{C_h} + \sum_{k=1}^{n+1} \tau \|\tilde{F}_k\|_{C_h}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 1, опираясь на лемму. Тогда, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках, имеем, что коэффициенты уравнения (4.3) в точке $P = P\left(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}}\right)$ удовлетворяют условиям (4.5) и $D(P) = 0$.

Из теоремы 2 следует, что для решения задачи (4.1) верна оценка

$$\left\|\overline{y}^j\right\|_C \le \|u_0\|_C + \max_{0<t'\le j\tau}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma}, \tag{4.6}$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x\in\overline{\omega}_h}|y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|.$$

Переходим к оценке функции v. Уравнение (4.2) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\left(\frac{\varepsilon}{p}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}} = \tilde\Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}} + \tilde\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\\ \left. v^{j+\frac{k}{p}}\right|_{\gamma_{h,k}} = 0,\\ v(x,0) = 0,\end{gathered} \tag{4.7}$$

где

$$\tilde\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} = \varphi^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}.$$

Уравнение (4.7) приведем к каноническому виду

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}}{h_k^2}+\frac{\chi_{i_k}a_{k,i_k}}{h_k^2}+\frac{b_k^+a_{k,i_k+1}}{h_k}-\frac{b_k^-a_{k,i_k}}{h_k}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$= \frac{1}{h_k^2}\left[\chi_{i_k}a_{k,i_k+1}\nu_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \chi_{i_k}a_{k,i_k}\nu_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}}\right] + \frac{b_k^+a_{k,i_k+1}}{h_k}\nu_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{b_k^-a_{k,i_k}}{h_k}\nu_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right),$$

где

$$\Phi\left(P_{j+\frac{k}{p}}\right) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\overline{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} - \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}} - v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right).$$

Проверим выполнимость условий теоремы 2

$$\begin{gathered}D'(P_{(k)}) = A(P_{(k)}) - \sum_{Q\in Ш'_k(P)} B\left(P_{(k)},Q\right) = \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+d_k \ge \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha} > 0,\\ P_{(k)} = P\left(x, t_{j+\frac{k}{p}}\right), \quad A(P_{(k)}) > 0, \quad B\left(P_{(k)},Q\right) > 0,\end{gathered} \tag{4.8}$$

для всех $Q \in Ш''_{k-1}$, $Q \in Ш'_k$,

$$\sum_{Q\in Ш''_{k-1}} B\left(P_{(k)},Q\right) = \frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right) > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})}\sum_{Q\in Ш''_{k-1}} B(P_{(k)},Q)=\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^{\alpha}}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\le 1,$$

где $Ш'\left(P\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right)\right)=Ш'_k+Ш'_{k-1}$, $Ш'_k$ – множество узлов $Q=Q(\xi,t_k)\in Ш'(P(x,t_k))$, $Ш'_{k-1}$ – множество узлов $Q=Q(\xi,t_{k-1})\in Ш'(P(x,t_{k-1}))$.

На основании теоремы 2, в силу (4.8), получаем оценку для v

$$\left\|v^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C\le\frac{1}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\left\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C+\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^{\alpha}}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^{\alpha}}}\left\|v^{j+\frac{k-1}{p}}\right\|_C. \tag{4.9}$$

Оценим $\left\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C$, где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}&=\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\\&=\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{0}+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha}+2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}-t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{\frac{1}{p}}+\ldots+\right.\\&\qquad\left.+\left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha}+2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha}-t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Так как, в силу леммы, выражения, стоящие в круглых скобках положительны, то из (4.10) получаем оценку

$$\left\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C\le\left\|\varphi_k^{j+\frac{k}{p}}\right\|_C+\frac{\gamma(2^{1-\alpha}-1)}{\tau^{\alpha}}\max_{0\le s\le k-2}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{4.11}$$

С помощью (4.11) из (4.9) находим

$$\max_{0\le s\le k}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C\le\max_{0\le s\le k-1}\left\|v^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\max_{0\le s\le k}\left\|\varphi_k^{j+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{4.12}$$

Просуммировав (4.12) сначала по $k=1,2,\ldots,p$, затем по $j'=0,1,\ldots,j$, получим оценку

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C\le\left\|v^0\right\|_C+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\left\|\varphi_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{4.13}$$

Из (4.6) и (4.13) следует окончательная оценка

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C\le\left\|y^0\right\|_C+\max_{0<t'\le t_{j+1}}\|\mu(x,t')\|_{C_\gamma}+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\left\|\varphi_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C. \tag{4.14}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Локально-одномерная схема* (2.4) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи* (2.4) *справедлива оценка* (4.14).

5. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k = 0$, $\overset{\circ}{\psi} = O(1)$, представим по аналогии с [31] решение задачи для погрешности (3.1), (3.2) в виде суммы

$$z_{(k)} = v_{(k)} + \eta_{(k)}, \quad z_{(k)} = z^{j+\frac{k}{p}}, \tag{5.1}$$

где $\eta_{(k)}$ определяется условиями

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}\eta_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)\eta_t^{\frac{s}{p}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad x \in \omega_h + \gamma_{h,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ \eta(x,0) = 0.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)v_t^{\frac{s}{p}} = \tilde{\Lambda}_k v_{(k)} + \tilde{\psi}_k, \\ v_{(k)}\big|_{\gamma_{h,k}} = -\eta_{(k)}, \quad v(x,0) = 0,\end{gathered} \tag{5.3}$$

где

$$\widetilde{\psi}_k = \overset{*}{\psi}_k + \tilde{\Lambda}_k\eta_{(k)}, \quad \overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2 + \tau).$$

Покажем, что

$$\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1.$$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай ($p = 2$). Сначала положим $j = 0$, т.е. рассмотрим первый слой $(0, t_1]$. Тогда задача (5.2) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{k}\left(t_{\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha}\right)\eta_t^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad k = 1, 2.$$

Пусть $k = 1$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}\eta_t^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_1. \tag{5.4}$$

При $k = 2$ получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_1^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}\right)\eta_t^{\frac{1}{2}} + t_{\frac{1}{2}}^{1-\alpha}\eta_{\bar{t}}^{1}\right] = \overset{\circ}{\psi}_2. \tag{5.5}$$

Складывая выражения (5.4) и (5.5), получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}}\right)\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}}\eta^{1}\right] = 0. \tag{5.6}$$

Из (5.4) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\overset{\circ}{\psi}_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\overset{\circ}{\psi}_2, \tag{5.7}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{2^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Выражая η^1 из (5.6) и учитывая (5.7), получаем

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{5.8}$$

Допустим, что при $j = n$ выполнено условие

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1}, \eta^{1+\frac{1}{2}}, \ldots, \eta^{n+1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{5.9}$$

Опираясь на допущение (5.9), покажем, что аналогичное условие выполнено и при $j = n+1$. Для чего запишем уравнение (5.2) при $j = n+1$, $p = 2$:

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{n+1+\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{2(n+1)+k}\left(t_{n+1+\frac{k-s+1}{2}}^{1-\alpha} - t_{n+1+\frac{k-s}{2}}^{1-\alpha}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \mathring{\psi}_k, \quad k = 1, 2. \tag{5.10}$$

Полагая в (5.10) $k = 1$, находим

$$\tau^{1-\alpha}\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)^{1-\alpha} - 2(n+1)^{1-\alpha} + \left(n+\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right]\eta^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \tau^{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 2\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} + n^{1-\alpha}\right]\eta^{1} + \dots - \Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(1-2^{\alpha})\right)\eta^{n+1} + \tag{5.11}$$
$$+ \Gamma(2-\alpha)(\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha})\eta^{n+\frac{3}{2}} = 2\Gamma(2-\alpha)\tau\mathring{\psi}_1.$$

Откуда с учетом (5.9) и достаточной ограниченности коэффициентов при $\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1}, \ldots, \eta^{n+\frac{3}{2}}$ находим $\eta^{n+\frac{3}{2}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right)$.

Положим теперь в (5.10) $k = 2$, затем сложим полученное таким образом выражение с выражением (5.11) с учетом равенства

$$\mathring{\psi}_1 + \mathring{\psi}_2 = 0.$$

Тогда получим

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^{1}, \ldots, \eta^{n+1}, \eta^{n+\frac{3}{2}}, \eta^{n+2} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{5.12}$$

Итак, равенство (5.12) выполнено при любом значении j. Аналогично можно показать, что

$$\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1.$$

Для оценки решения задачи (5.3) воспользуемся теоремой 3:

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C \le \max_{0 < j'+\frac{k}{p} \le j+1}\left\|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\right\|_{C_\gamma} + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0 \le s \le k}\left\|\tilde{\psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C, \tag{5.13}$$

где $\tilde{\psi}_k = \overset{*}{\psi}_k + \tilde{\Lambda}_k\eta_{(k)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar{Q}_T$ производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$, $k \ne \nu$, то

$$\tilde{\Lambda}_k\eta_{(k)} = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}a_k\tilde{\Lambda}_k\left(\mathring{\psi}_{k+1} + \ldots + \mathring{\psi}_p\right) = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right),$$

a_k – известные постоянные.

Тогда из оценки (5.13) находим, что

$$\left\|v^{j+1}\right\|_C \le M\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + p\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{j'=0}^{j}\left(h^2 + \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right)\right) \le M\left(\frac{h^2}{\varepsilon + \tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon + \tau^{1-\alpha})^2}\right), \quad h = \max_{1 \le k \le p} h_k.$$

Откуда получаем

$$\left\|z^{j+1}\right\|_C \le \left\|\eta^{j+1}\right\|_C + \left\|v^{j+1}\right\|_C \le O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}\right).$$

Итак, справедлива теорема

Теорема 4. *Пусть задача* (1.4)–(1.6) *имеет единственное непрерывное решение* $u(x,t)$ *в* $\bar{Q}_T$ *при всех значениях* ε *и существуют непрерывные в* $\bar{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2 \partial t}, \frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}, \quad 1 \le k, \quad \nu \le p, \quad k \ne \nu, \quad 0 < \alpha < 1,$$

тогда решение разностной задачи (2.4) *равномерно сходится к решению дифференциальной задачи* (1.1)–(1.3) *со скоростью*

$$O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2} + \varepsilon\right), \quad h^2 = o(\varepsilon+\tau^{1-\alpha}), \quad \tau = o((\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2),$$

где ε – *малый параметр*.

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если

$$\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}} + \frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2} = \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = \tau^\gamma$, тогда из последнего получаем

$$h^2(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha}) + \tau = \tau^\gamma(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha})^2$$

или

$$\tau \le \tau^\gamma(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha})^2.$$

Следовательно,

$$\min\{\gamma, 1-\alpha\} = \frac{1-\gamma}{2},$$

откуда получаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \tau^{\frac{1}{3}}, & 0 < \alpha \le \frac{2}{3}, \\ \tau^{2\alpha-1}, & \frac{2}{3} < \alpha < 1. \end{cases} \tag{5.14}$$

Тогда справедливо

Следствие. Если ε определяется из условия (5.14), тогда решение разностной задачи (2.4) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right), \quad \text{если} \quad 0 < \alpha \le \frac{2}{3},$$

и

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad \text{если} \quad \frac{2}{3} < \alpha < 1.$$

При $\alpha \to 1$ получаем, что решение разностной задачи (2.4) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.3) со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

6. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Для численного решения поставленной задачи (1.1)–(1.3) выпишем расчетные формулы ($0 \le x_k \le l_k$, $k = 1, 2$, $p = 2$):

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} + \partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Theta_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Theta_2(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + r_1(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \\ + r_2(x_1, x_2, t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - q_1(x_1, x_2, t)u(x_1, x_2, t) - q_2(x_1, x_2, t)u(x_1, x_2, t) + f(x_1, x_2, t), \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} u(0, x_2, t) = \mu_{11}(x_2, t), \quad u(l_1, x_2, t) = \mu_{12}(x_2, t), \\ u(x_1, 0, t) = \mu_{21}(x_1, t), \quad u(x_1, l_2, t) = \mu_{22}(x_1, t), \end{cases} \tag{6.2}$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \tag{6.3}$$

Рассмотрим сетку $x_k^{(i_k)} = i_k h_k$, $k = 1, 2$, $t_j = j\tau$, где $i_k = 0, 1, \ldots, N_k$, $h_k = l_k/N_k$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $\tau = T/m$. Вводим один дробный шаг $t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + 0.5\tau$. Обозначим через $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} = y(i_1h_1, i_2h_2, (j + 0.5k)\tau)$, $k = 1, 2$, сеточную функцию.

Напишем локально-одномерную схему

$$\varepsilon \frac{y^{j+\frac{1}{2}} - y^j}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{2j+1}\left(t_{j+\frac{2-s}{2}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{1-s}{2}}^{1-\alpha}\right) y_t^{\frac{s}{2}} = \tilde{\Lambda}_1 y^{j+\frac{1}{2}} + \varphi_1, \\ \varepsilon \frac{y^{j+1} - y^{j+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{2j+2}\left(t_{j+\frac{3-s}{2}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{2-s}{2}}^{1-\alpha}\right) y_t^{\frac{s}{2}} = \tilde{\Lambda}_2 y^{j+1} + \varphi_2, \tag{6.4}$$

$$y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_{11}\left(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_{12}\left(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}\right), \\ y_{i_1,0}^{j+1} = \mu_{21}\left(i_1h_1, t_{j+1}\right), \quad y_{i_1,N_2}^{j+1} = \mu_{22}\left(i_1h_1, t_{j+1}\right), \tag{6.5}$$

$$y_{i_1,i_2}^{0} = u_0\left(i_1h_1, i_2, h_2\right),$$

$$\tilde{\Lambda}_k y^{j+\frac{k}{p}} = \varkappa_k\left(a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k} + b_k^+ a_k^{(+1)} y_{x_k}^{j+\frac{k}{p}} + b_k^- a_k y_{\bar{x}_k}^{j+\frac{k}{p}} - d_k y^{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, \tag{6.6}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} f(x_1, x_2, t_{j+0.5k}) \quad \text{или} \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = f(x_1, x_2, t_{j+1}).$$

Приведем расчетные формулы для решения задачи (6.4)–(6.6).

На первом этапе находим решение $y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}}$. Для этого при каждом значении $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$ решается следующая задача:

$$A_{1(i_1,i_2)} y_{i_1-1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} - C_{1(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + B_{1(i_1,i_2)} y_{i_1+1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = -F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}}, \quad 0 < i_1 < N_1, \\ y_{0,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_{11}\left(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad y_{N_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} = \mu_{12}\left(i_2h_2, t_{j+\frac{1}{2}}\right), \tag{6.7}$$

где

$$A_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1^2} - \frac{(b_1^-)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1,i_2}}{h_1},$$

$$B_{1(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_1)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1^2} + \frac{(b_1^+)_{i_1,i_2}(a_1)_{i_1+1,i_2}}{h_1},$$

$$C_{1(i_1,i_2)} = A_{1(i_1,i_2)} + B_{1(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{2\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{p} d_{1(i_1,i_2)},$$

Таблица 1. Результаты численных экпериментов при $0 < \alpha \le \frac{2}{3}$

α	h	$\lVert z \rVert_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\lVert \cdot \rVert_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	$O(\tau^{1/3})$
0.1	1/2	0.029143444		0.33
	1/4	0.025357432	0.1004	
	1/8	0.021421778	0.1217	
	1/16	0.018023784	0.1246	
	1/32	0.014033112	0.1805	
	1/64	0.010004234	0.2441	
	1/128	0.006583291	0.3019	
0.2	1/2	0.029013789		0.33
	1/4	0.025301206	0.0988	
	1/8	0.021371432	0.1218	
	1/16	0.017972508	0.1249	
	1/32	0.013990212	0.1807	
	1/64	0.009976202	0.2439	
	1/128	0.006567871	0.3015	
0.3	1/2	0.028951506		0.33
	1/4	0.025219101	0.0996	
	1/8	0.021285824	0.1223	
	1/16	0.017871468	0.1261	
	1/32	0.013892420	0.1817	
	1/64	0.009902294	0.2442	
	1/128	0.006521075	0.3013	
0.4	1/2	0.028874976		0.33
	1/4	0.025100031	0.1011	
	1/8	0.021141306	0.1238	
	1/16	0.017674549	0.1292	
	1/32	0.013673165	0.1852	
	1/64	0.009711621	0.2468	
	1/128	0.006381999	0.3029	
0.5	1/2	0.028782052		0.33
	1/4	0.024929275	0.1037	
	1/8	0.020901055	0.1271	
	1/16	0.017300340	0.1364	
	1/32	0.013200657	0.1951	
	1/64	0.009253975	0.2562	
	1/128	0.005996327	0.3130	
0.6	1/2	0.028670815		0.33
	1/4	0.024688137	0.1079	
	1/8	0.020511074	0.1337	
	1/16	0.016619461	0.1518	
	1/32	0.012273815	0.2186	
	1/64	0.008259210	0.2858	
	1/128	0.005092653	0.3488	

Таблица 2. Результаты численных экпериментов при $\frac{2}{3} < \alpha < 1$

α	h	$\|z\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$	$O(\tau^{2\alpha-1})$
0.7	1/2	0.028539879		0.4
	1/4	0.024131209	0.1210	
	1/8	0.021062646	0.0981	
	1/16	0.016421549	0.1795	
	1/32	0.011107562	0.2820	
	1/64	0.006532123	0.3830	
0.8	1/2	0.028445640		0.6
	1/4	0.024093465	0.1198	
	1/8	0.020990772	0.0994	
	1/16	0.015942124	0.1985	
	1/32	0.009999178	0.3365	
	1/64	0.005163160	0.4768	
0.9	1/2	0.028288873		0.8
	1/4	0.023793274	0.1248	
	1/8	0.019898778	0.1289	
	1/16	0.013266177	0.2925	
	1/32	0.006775084	0.4847	
	1/64	0.002731669	0.6552	
0.99	1/2	0.028105342		0.98
	1/4	0.023231860	0.1374	
	1/8	0.017992042	0.1844	
	1/16	0.009925780	0.4291	
	1/32	0.004029305	0.6503	
	1/64	0.001270309	0.8327	

$$F_{1(i_1,i_2)}^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{\tau} y_{i_1,i_2}^{j} + \frac{1}{2\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} y_{i_1,i_2}^{j} + \frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{2j} \left(t_{j+\frac{2-s}{2}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{1-s}{2}}^{1-\alpha} \right) y_{t}^{\frac{s}{2}} + \varphi_{1(i_1,i_2)}.$$

На втором этапе находим решение y_{i_1,i_2}^{j+1}. Для этого, как и в первом случае, при каждом значении $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$ решается задача

$$\begin{gathered}
A_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2-1}^{j+1} - C_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2}^{j+1} + B_{2(i_1,i_2)} y_{i_1,i_2+1}^{j+1} = -F_{2(i_1,i_2)}^{j+1}, \quad 0 < i_2 < N_2, \\
y_{i_1,0}^{j+1} = \mu_{21}\left(i_1 h_1, t_{j+1}\right), \quad y_{i_1,N_2}^{j+1} = \mu_{22}\left(i_1 h_1, t_{j+1}\right), \\
A_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2^2} - \frac{(b_2^-)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2}}{h_2}, \\
B_{2(i_1,i_2)} = \frac{(\varkappa_2)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2^2} + \frac{(b_2^+)_{i_1,i_2}(a_2)_{i_1,i_2+1}}{h_2}, \\
C_{2(i_1,i_2)} = A_{2(i_1,i_2)} + B_{2(i_1,i_2)} + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{1}{2\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} + \frac{1}{p} d_{2(i_1,i_2)}, \\
F_{2(i_1,i_2)}^{j+1} = \frac{\varepsilon}{\tau} y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)} y_{i_1,i_2}^{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{2j+1} \left(t_{j+\frac{3-s}{2}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{2-s}{2}}^{1-\alpha} \right) y_{t}^{\frac{s}{2}} + \varphi_{2(i_1,i_2)}.
\end{gathered} \tag{6.8}$$

Каждая из задач (6.7), (6.8) решается методом прогонки (см. [32]).

7. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Коэффициенты уравнения и граничных условий задачи (1.1)–(1.3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи была функция $u(x,t) = t^3(x_1^4 - l_1x_1^3)(x_2^4 - l_2x_2^3)$.

Ниже в табл. 1 и 2 при уменьшении размера сетки приведены максимальное значение погрешности ($z = y - u$) и порядок сходимости в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\bar{w}_{h\tau})} = \max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{w}_{h\tau}} |y|$ при $0 < \alpha < 1$, когда $h^2 = \tau$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right), \quad \text{если} \quad 0 < \alpha \le \frac{2}{3},$$

и

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad \text{если} \quad \frac{2}{3} < \alpha < 1,$$

где $h = \max\limits_{1\le\alpha\le p} h_\alpha$,

$$\varepsilon = \begin{cases} \tau^{\frac{1}{3}}, & 0 < \alpha \le \frac{2}{3}, \\ \tau^{2\alpha-1}, & \frac{2}{3} < \alpha < 1. \end{cases}$$

Таким образом, проведены численные расчеты тестовых примеров на ЭВМ, иллюстрирующие полученные в работе теоретические выкладки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Динариев О.Ю.* Фильтрация в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 1990. № 5. С. 66–70.
2. *Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П.* Недебаевская релаксация и диффузия во фрактальном пространстве // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 6. С. 755–758.
3. *Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П.* Автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 3. С. 332–333.
4. *Кочубей А.Ю.* Диффузия дробного порядка // Дифференц. ур-ния. 1990. Т. 26. С. 660–670.
5. *Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 10. С. 1878–1887.
6. *Бештоков М.Х.* К краевым задачам для вырождающихся псевдопараболических уравнений с дробной производной Герасимова–Капуто // Изв. вузов. Математика. 2018. № 10. С. 3–16.
7. *Бештоков М.Х.* Численное исследование начально-краевых задач для уравнения соболевского типа с дробной по времени производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 185–202.
8. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для псевдопараболического уравнения с дробной производной Капуто // Дифференц. уравнения. Т. 55. № 7. 2019. С. 919–928.
9. *Бештоков М.Х., Водахова В.А.* Нелокальные краевые задачи для уравнения конвекции–диффузии дробного порядка // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 459–482.
10. *Бештоков М.Х., Эржибова Ф.А.* К краевым задачам для интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Матем. труды. 2020. Т. 23 № 1. С. 16–36.
11. *Мальшаков А.В.* Уравнения гидродинамики для пористых сред со структурой порового пространства, обладающей фрактальной геометрией // ИФЖ. 1992. Т. 62. № 3. С. 405–410.
12. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматгиз, 2003, 272 с.
13. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: “Артишок”, 2008. 512 с.
14. *Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Докл. АМАН. 1996. Т. 2. № 1. С. 43–45.
15. *Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus. New York–London: Acad. Press, 1974. 234 p.
16. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San-Diego: Acad. Press, San Diego-Boston-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1999. 368 p.
17. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

18. *Nigmatulin R.R.* The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // Phys. Status Solidi. B. 1986. V. 133. P. 425–430.
19. *Головизнин В.М., Кисилев В.П., Короткин И.А., Юрков Ю.П.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии // Препринт IBRAE-2002-01. M: ИБРАЭ РАН, 2002.
20. *Головизнин В.М., Кисилев В.П., Короткин И.А.* Численные методы решения уравнения диффузии с дробной производной в одномерном случае // Препринт IBRAE-2002-01. M: ИБРАЭ РАН, 2002.
21. *Федер Е.* Фраткалы. М.: Мир, 1991. 260 с.
22. *Lovejoy S.* Area-perimeter relation for rain and cloud areas // Science. 1982. V. 216. P. 185–187.
23. *Шогенов В.Х., Ахубеков А.А., Ахубеков Р.А.* Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. 2004. № 1. С. 46–50.
24. *Самарский А.А.* Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 2. № 5. 1962. С. 787–811.
25. *Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 113–123.
26. *Ашабоков Б.А., Бештокова З.В., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения переноса примесей дробного порядка// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 9. С. 1517–1529.
27. *Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 7. С. 1200–1208.
28. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1967. Т. 12. № 5. С. 3–122.
29. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.
30. *Alikhanov A.A.* Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Appl. Math. 2012. V. 219. P. 3938–3946.
31. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
32. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.