ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 7, с. 1070–1081

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.9

КОРПОРАТИВНАЯ ДИНАМИКА В ЦЕПОЧКАХ СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1)]

© 2021 г. С. А. Кащенко

150003 Ярославль, ул. Советская, 14, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

e-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 14.02.2020 г.
Переработанный вариант 26.11.2020 г.
Принята к публикации 11.03.2021 г.

Рассматривается локальная динамика связанных цепочек одинаковых осцилляторов. В качестве базовой модели осциллятора предложено известное логистическое уравнение с запаздыванием. Осуществлен переход к изучению пространственно распределенной модели. Рассмотрены представляющие наибольший интерес два типа связей: диффузионные и однонаправленные. В задаче об устойчивости состояния равновесия выделены критические случаи. Они, как оказывается, имеют бесконечную размеренность: бесконечно много корней характеристического уравнения стремятся к мнимой оси при стремлении к нулю малого параметра, характеризующего величину, обратную к числу элементов цепочки. В качестве основного результата построены специальные нелинейные краевые задачи, нелокальная динамика которых описывает поведение всех решений цепочки из окрестности состояния равновесия. Библ. 33.

Ключевые слова: бифуркации, устойчивость, нормальные формы, сингулярные возмущения, динамика.

DOI: 10.31857/S0044466921070085

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время особое внимание уделяется таким важным объектам, как цепочки взаимодействующих осцилляторов. Эти цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике (см. [1], [2]), лазерной оптике (см. [3]–[5]), механике (см. [6], [7]), теории нейронных сетей (см. [8], [9]), биофизике (см. [10]), математической экологии (см. [11]–[16]) и др. В данной работе исследуются актуальные для биофизики и математической экологии цепочки связанных логистических уравнений с запаздыванием. В качестве базового объекта рассматривается хорошо известное логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r\left[1 - u(t - T)\right]u,$$

где $u = u(t) \geq 0$ – нормированная численность (плотность) популяции в момент времени t, $r > 0$ – коэффициент мальтузианского роста, а коэффициент $T > 0$ – время запаздывания.

Отметим, что с помощью нормировки времени $t \to Tt$ можно коэффициент T принять равным 1, а получившийся при этим коэффициент rT можно опять переобозначить через r. Таким образом, далее в качестве базового рассматриваем уравнение

$$\dot{u} = r\left[1 - u(t - 1)\right]u, \quad u \geq 0. \tag{1}$$

Напомним (см., например, [11]–[13]), что при условиях $0 < r \leq \frac{\pi}{2}$ состояние равновесия $u_0 \equiv 1$ этого уравнения асимптотически устойчиво, а при $r > \frac{\pi}{2}$ в уравнении (1) существует устойчивый цикл.

[1)]Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (дополнительное соглашение 075-02-2020-1514/1 к Соглашению о предоставлении из федерального бюджета субсидии 075-02-2020-1514).

При $0 < r - \frac{\pi}{2} \ll 1$ его асимптотика имеет вид

$$u = 1 + \left(r - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} C\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + O\left(r - \frac{\pi}{2}\right)\right)t\right) + O\left(r - \frac{\pi}{2}\right), \quad C = \left(40(3\pi - 2)^{-1}\right)^{1/2}. \tag{2}$$

При $r \gg 1$ соответствующий цикл имеет ярко выраженный релаксационный характер (см. [14]), причем и амплитуда цикла, и его период неограниченно растут при $r \to \infty$.

Цепочкой связанных логистических уравнений с запаздыванием называют систему из N уравнений

$$u_j = r\left[1 - u_j(t-1)\right]u_j + d\left(\sum_{i=1, i\neq j}^{N} \alpha_{ij} u_i(t) - u_j\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

в которой удобно считать, что количество популяций N является четным, а коэффициент d положителен. Будем предполагать, что эта цепочка замкнута в кольцо, т.е. $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $u_{j+N} \equiv u_j(t)$.

Относительно коэффициентов α_{ij} примем три идеологически важных ограничения. Во-первых, из биологических соображений вытекает, что эти коэффициенты неотрицательны: $\alpha_{ij} \geq 0$, иначе при некоторых начальных условиях численность хотя бы одной из популяций может стать отрицательной. Во-вторых, предполагаем, что среда однородна. Это означает, что для коэффициентов связей α_{ij} выполнены условия $\alpha_{ij} = \alpha_{j-i}$, $\alpha_{j+N} = \alpha_j$, $\alpha_0 = 0$. Тогда систему (3) можно представить в виде

$$u_j = r\left[1 - u_j(t-1)\right]u_j + d\left(\sum_{i=-\frac{1}{2}N}^{\frac{1}{2}N} \alpha_{j-i} u_i(t) - u_j(t)\right). \tag{4}$$

В-третьих, предполагаем, что выполнено условие

$$\sum_{1}^{N} \alpha_j = 1. \tag{5}$$

Это означает, что в системе (4) имеются однородные решения

$$u_j(t) \equiv u(t), \quad j = 1, 2, \ldots, N,$$

где $u(t)$ – решение уравнения (1).

Как одни из наиболее важных и часто встречающихся в приложениях, отметим два вида связей: 1) диффузионная связь, когда

$$\alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_j = 0 \quad \text{при} \quad j = \pm 2, \ldots, \pm\frac{1}{2}N, \tag{6}$$

2) однонаправленная или адвективная связь, когда

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_j = 0 \quad \text{при} \quad j = -1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{1}{2}N. \tag{7}$$

Значение $u_j(t)$ можно ассоциировать со значением плотности популяции с номером j, находящейся в точке некоторой "окружности" L с угловой координатой x_j, т.е.

$$u_j(t) = u(t, x_j).$$

Основное предположение в настоящей работе состоит в том, что значение N предполагается достаточно большим, т.е. для параметра $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ выполнено условие

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{8}$$

При малых ε количество значений x_j на окружности L является достаточно большим, поэтому представляется естественным перейти от дискретной переменной x_j к непрерывной пространственной переменной $x \in [0, 2\pi]$, имея в виду, что для $u(t, x_{j+n})$ выполнено равенство $u(t, x + \varepsilon n)$. В более общем случае система (4) принимает вид краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r\left[1 - u(t-1, x)\right]u + d\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon)u(t, x+s)ds - u\right), \tag{9}$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \tag{10}$$

Относительно функции $F(s,\varepsilon)$ полагаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)ds = 1, \quad F(s,\varepsilon) \geq 0. \tag{11}$$

Например, в случае (6) $F(s,\varepsilon) = F_\delta(s+\varepsilon) + F_\delta(s-\varepsilon)$, а в случае (7) $F(s,\varepsilon) = F_\delta(s+\varepsilon)$. Здесь $F_\delta(s)$ – δ-функция, сосредоточенная в точке $s = 0$, т.е. для любого $\delta > 0$ имеем $\int_{-\delta}^{\delta} F_\delta(s)ds = 1$.

Ниже будем рассматривать достаточно гладкие функции $F(s,\varepsilon)$. По-видимому, наиболее важным с прикладной точки зрения являются функции F, состоящие из комбинаций функций вида $c_1\exp\left(-(s-c_2)^2\sigma^{-2}\right)$ ($\sigma > 0, c_{1,2}$ – некоторые постоянные). Так, обобщением диффузионного типа связей является функция

$$F(s,\varepsilon) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-(s+\varepsilon)^2\sigma^{-2}\right) + \exp\left(-(s-\varepsilon)^2\sigma^{-2}\right)\right], \tag{12}$$

а обобщением одностороннего типа связей – функция

$$F(s,\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left(-(s+\varepsilon)^2\sigma^{-2}\right). \tag{13}$$

В качестве фазового пространства, т.е. пространства начальных условий, фиксируем $C_{[-1,0]\times[0,2\pi]}$ пространство непрерывных на отрезке $t \in [-1, 0]$ и непрерывных и 2π-периодических по пространственной переменной функций.

Краевая задача (9), (10) имеет однородное состояние равновесия $u(t,x) \equiv u_0 = 1$. Поставим вопрос об исследовании при малых ε локальной динамики (9), (10), т.е. об исследовании поведения при $t \to \infty$ всех решений (9), (10) с начальными условиями из некоторой достаточно малой в норме $C_{[-1,0]\times[0,2\pi]}$ и не зависящей от ε окрестности состояния равновесия u_0.

Тем самым речь идет об изучении динамики распределенных цепочек логистических уравнений с запаздыванием. Отметим, что исследованию динамики в различных цепочках связанных систем были посвящены результаты многих авторов (см., например, [17]–[24]). В настоящей работе, используя специальные методы локального анализа (см. [25]–[28]), будут построены квазинормальные формы – эволюционные краевые задачи, нелокальная динамика которых определяет поведение всех решений исходной краевой задачи (7), (6) в окрестности u_0.

Приведем без доказательства два стандартных утверждения, являющихся аналогом классических теорем А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Рассмотрим линеаризованную в окрестности u_0 краевую задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -rv(t-1,x) + d\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)v(t,x+s)ds - v\right), \tag{14}$$

$$v(t,x+2\pi) \equiv v(t,x). \tag{15}$$

Характеристическое уравнение для нее имеет вид

$$\lambda + r\exp(-\lambda) = d\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)\exp(iks)ds - 1\right), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть все корни уравнения* (16) *имеют отрицательную вещественную часть и отделены от мнимой оси при* $\varepsilon \to 0$. *Тогда найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *все решения краевой задачи* (9), (10) *из некоторой достаточно малой и не зависящей от* ε *окрестности состояния равновесия* u_0 *стремятся к* u_0 *при* $t \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (16) *имеет корень с положительной и отделенной от нуля при* $\varepsilon \to 0$ *вещественной частью. Тогда при малых* ε *состояние равновесия* u_0 *в* (9), (10) *неустойчиво и в некоторой достаточной малой и не зависящей от* ε *окрестности* u_0 *не существует аттрактора этой краевой задачи*.

Таким образом, в условиях теоремы 1 поставленная задача о локальной в окрестности u_0 динамике тривиальна, а в условии теоремы 2 она не может быть исследована методами локального анализа.

Ниже будем предполагать, что реализуется критический случай, т.е. уравнение (16) не имеет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, но существует корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Ограничимся здесь рассмотрением только указанных выше двух наиболее важных и интересных случаев, когда выполнены условия (12) или (13). Отметим, что методика рассмотрения общего случая та же, что и для этих двух случаев. Важно подчеркнуть, что будет рассмотрена ситуация, когда в (12), (13) параметр σ является достаточно малым, что приведет к появлению новых динамических эффектов. В связи с этим интересно выявить роль диффузионного слагаемого, когда в (9) добавляется выражение $\varkappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, причем коэффициент $\varkappa$ тоже является малым параметром. Тем самым будет рассмотрена краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r\left[1 - u(t-1,x)\right]u + d\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)u(t,x+s)ds - u\right) + \varkappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{17}$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t,x). \tag{18}$$

В следующем разделе рассмотрены вопросы о динамике краевой задачи (9), (10) в случае связей диффузионного типа. Показано, что в зависимости от величины параметра σ могут реализоваться принципиально различные ситуации. Все они описаны в соответствующих подразделах. В разд. 2 исследуется динамика (9), (10) при односторонних связях.

Будут построены специальные нелинейные краевые задачи, не содержащие малых параметров, которые играют роль нормальных форм. Кроме этого, будет рассмотрена важная задача о взаимодействующих осцилляторах в цепочке со слабыми связями. Речь пойдет об изучении динамики в случае, когда параметр $\varkappa$ является достаточно малым. В заключительном разделе сформулированы выводы.

1. ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК В СЛУЧАЕ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА СВЯЗЕЙ

Предполагаем, что функция $F(s,\varepsilon)$ задана равенством (12). В зависимости от параметра σ можно выделить три принципиально различные ситуации. В первой из них, самой простой, предполагается, что параметр $\sigma > 0$ как-то фиксирован и, естественно, не зависит от малого параметра ε. Этот случай рассмотрен в п. 1.1. В п. 1.2 предполагаем, что найдется такое значение $\sigma_0 > 0$, что

$$\sigma = \varepsilon\sigma_0. \tag{19}$$

При этом условии реализуется упомянутый выше критический случай бесконечной размерности. Наконец, в п. 1.3 предполагаем, что параметр σ еще более мал: $\sigma = o(\varepsilon)$. Точнее, будем для некоторого фиксированного $\sigma_0 > 0$ рассматривать соотношение

$$\sigma = \varepsilon^2\sigma_0. \tag{20}$$

Этот случай наиболее сложен и интересен. Он естественным образом обобщает случай “чисто диффузионных” связей, когда $\sigma \sim 0$.

1.1. Динамика цепочек при фиксированном значении σ

Фиксируем в формуле (12) произвольное значение $\sigma_0 > 0$. Необходимое и достаточное условие отрицательности при всех $\varepsilon > 0$ вещественных частей всех собственных значений характеристических уравнений (16) состоит в выполнении неравенств

$$0 < r < \frac{\pi}{2}. \tag{21}$$

При условии $r = \dfrac{\pi}{2}$ уравнение (16) имеет ровно два чисто мнимых корня $\lambda_{\pm} = \pm i\dfrac{\pi}{2}$, а вещественные части остальных коней отрицательны и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$. Тем самым выполнены условия хорошо изученной бифуркации Андронова–Хопфа. Пусть для произвольно фиксированного значения r_1 имеем

$$r = \frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 r_1. \tag{22}$$

Тогда близкие при $\varepsilon \ll 1$ к $\lambda_\pm$ корни $\lambda_\pm(\varepsilon)$ уравнения (16) имеют вид

$$\lambda_+(\varepsilon) = \lambda_-(\varepsilon),$$
$$\lambda_+(\varepsilon) = i\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2\lambda_{10} + O(\varepsilon^4), \tag{23}$$
$$\text{где}\quad \lambda_{10} = \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}\left(\frac{\pi}{2} + i\right)r_1.$$

При этих условиях и при достаточно малых ε краевая задача (9), (10) имеет в окрестности $u_0 = 1$ двумерное устойчивое локальное интегральное инвариантное многообразие $M(\varepsilon)$, на котором эту краевую задачу можно с точностью до $O(\varepsilon^4)$ записать в виде специального скалярного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \lambda_{10}\xi + g\xi|\xi|^2, \tag{24}$$

в котором $\tau = \varepsilon^2 t$ — медленное время, а $\xi(\tau)$ — медленно меняющаяся амплитуда в асимптотическом представлении решений на многообразии $M(\varepsilon)$:

$$u = 1 + \varepsilon\left(\xi(\tau)\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\xi}(\tau)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \varepsilon^2 u_2(t,\tau) + \varepsilon^3 u_3(t,\tau) + \ldots\,. \tag{25}$$

Здесь функции $u_j(t,\tau)$ — 4-периодические по t. Подставим формальное выражение (25) в (9) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Сначала, приравнивая коэффициенты при ε^2, находим, что

$$u_2 = \frac{2-i}{5}\xi^2\exp(i\pi t) + \frac{2+i}{5}\xi^2\exp(-i\pi t). \tag{26}$$

На следующем шаге из условия разрешимости получающегося уравнения относительно u_3 приходим к необходимости выполнения соотношения (24), в котором

$$g = -\frac{\pi}{2}[3\pi - 2 + i(\pi + 6)]\left(10\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\right)^{-1}. \tag{27}$$

Сформулируем итоговые утверждения. Доказательства их хорошо известны (см., например, [11], [12]).

Теорема 3. *Пусть* $r_1 < 0$. *Тогда при всех достаточно малых* ε *решение краевой задачи* (9), (10) *из некоторой достаточно малой и не зависящей от* ε *окрестности состояния равновесия* $u_0 = 1$ *стремится к* 1 *при* $t \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $r_1 > 0$. *Тогда все, кроме нулевого, решения уравнения* (24) *стремятся к орбитально устойчивому циклу*

$$\xi_0(\tau) = \left[10\frac{\pi}{2}r_1(3\pi - 2)^{-1}\right]^{1/2}\xi_0\exp(i\phi_0\tau),$$
$$\phi_0 = \operatorname{Im}\lambda_{10} + \xi_0^2\operatorname{Im} g, \tag{28}$$

а все решения ($\not\equiv 1$) *из* $M(\varepsilon)$ *при* $t \to \infty$ *стремятся к циклу*

$$u_0(t,\varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\xi_0\left(\varepsilon^2 t\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \bar{\xi}_0\left(\varepsilon^2 t\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\right) + O(\varepsilon^2). \tag{29}$$

Таким образом, в рассмотренной ситуации краевая задача (9), (10) может иметь в окрестности u_0 только однородный цикл, являющийся решением в условии (22) логистического уравнения (2). По-видимому, рассмотренный здесь случай интереса не представляет.

1.2. Динамика цепочек при значении σ порядка ε

Предполагаем, что выполнено условие (19). Тогда характеристическое уравнение (16) имеет совокупность корней $\lambda_m(\varepsilon)$ и $\overline{\lambda}_m(\varepsilon)$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to \infty$. Для этих корней справедливо представление

$$\begin{gathered}\lambda_m(\varepsilon) + \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2 r_1\right)\exp(-\lambda_m(\varepsilon)) = d\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s,\varepsilon)\exp(ims)ds - 1\right) = \\ = d\left(\cos(\varepsilon m)\exp\left(-\varepsilon^2 m^2\sigma_0^2\right) - 1\right).\end{gathered} \tag{30}$$

Отсюда получаем, что для каждого целого m выполнено асимптотическое равенство

$$\lambda_m(\varepsilon) = i\frac{\pi}{2} + \varepsilon^2\lambda_1 + \ldots,\ \lambda_1 = \lambda_{10} - \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} d\left(\frac{1}{2} + \sigma_0^2\right)m^2.$$

Каждому такому корню отвечает решение $v_m(t,x)$ линейной краевой задачи (14), (15), для которого

$$v_m(t,x) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}t + imx\right)\nu_m(\tau),$$
$$\text{где}\quad \nu_m(\tau) = \nu_m\exp\left(\left(-\varepsilon^2\lambda_1 + O(\varepsilon^4)\right)t\right).$$

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{gathered}u(t,x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\xi_m(\tau)\exp(imx) + \right. \\ \left. + \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{\xi}_m(\tau)\exp(-imx)\right) + \varepsilon^2 u_2(t,\tau,x) + \varepsilon^3 u_3(t,\tau,x) + \ldots .\end{gathered} \tag{31}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ – медленное время, $\xi_m(\tau)$ – неизвестные медленно меняющиеся амплитуды, а функции $u_j(t,\tau,x)$ – периодичны по t и x. Отметим, что в линейном приближении, т.е. при $u_j \equiv 0$, формула (31) задает совокупность решений линейной краевой задачи (14), (15).

Выражение (31) можно существенно упростить. Для этого положим

$$\xi(\tau,x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\xi_m(\tau)\exp(imx).$$

Тогда из (31) вытекает, что

$$\begin{gathered}u(t,x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\xi(\tau,x)\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \overline{\xi}(\tau,x)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \\ + \varepsilon^2 u_2(t,\tau,x) + \varepsilon^3 u_3(t,\tau,x) + \ldots .\end{gathered} \tag{32}$$

Подставим (31) в (9), (10) и в получившемся формальном тождестве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. На первом шаге при ε^1 тождество выполнено, а на втором шаге, собирая коэффициенты при ε^2, приходим к равенству (26), в котором $\xi = \xi(\tau,x)$. На следующем шаге из условия разрешимости получающегося уравнения относительно u_3 приходим к краевой задаче для определения $\xi(\tau,x)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = d_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \lambda_{10}\xi + g\xi|\xi|^2, \quad \xi(t,x+2\pi) \equiv \xi(\tau,x), \tag{33}$$

где $d_0 = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sigma_0^2\right)$, а коэффициенты λ_{10} и g те же, что и в (23), и (27).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 5. *Пусть краевая задача* (33) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi_0(\tau, x)$. *Тогда функция*

$$u_0(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\xi_0(\tau, x)\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \overline{\xi}_0(\tau, x)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \\ + \varepsilon^2\left(\frac{2-i}{5}\xi_0^2(\tau, x)\exp(i\pi t) + \frac{2+i}{5}\overline{\xi}_0^2(\tau, x)\exp(-i\pi t)\right)$$

удовлетворяет краевой задаче (9), (10) *с точностью до* $O(\varepsilon^4)$.

Вопрос о существовании и об устойчивости точного решения (9), (10), близкого при $\varepsilon \to 0$ к соответствующему решению краевой задачи (33), может быть решен, например, в случае, когда $\xi_0(\tau, x)$– периодическое решение, обладающее свойством грубости. Под грубостью будем понимать следующее. Если $\xi_0(\tau, x) \equiv \mathrm{const} \cdot \exp(i\omega\tau + imx)$, то лишь один мультипликатор линеаризованной на $\xi_0(\tau, x)$ краевой задачи равен по модулю 1. В остальных случаях условие грубости состоит в том, что только два мультипликатора линеаризованной на $\xi_0(\tau, x)$ краевой задачи равны по модулю 1.

Теорема 6. *Пусть* $\xi_0(\tau, x)$ *– периодическое с периодом* ω_0 *решение краевой задачи* (33), *обладающее свойством грубости. Тогда при всех достаточно малых* ε *краевая задача* (9), (10) *имеет периодическое по t решение* $u_0(t, x, \varepsilon)$ *с периодом* $\omega_0 + O(\varepsilon)$ *той же, что и* $\xi_0(\tau, x)$, *устойчивости и для которого верно асимптотическое равенство*

$$u_0(t, x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\xi_0((1 + O(\varepsilon))\varepsilon^2 t, x\right)\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right) + \overline{\xi}_0\left((1 + O(\varepsilon))\varepsilon^2 t, x\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\right) + \dots . \tag{34}$$

Доказательство теоремы 5 вытекает непосредственно из приведенного построения асимптотики решения краевой задачи (9), (10). Обоснование теоремы 6 стандартно (см., например, [29], [30]), но громоздко, поэтому его опустим.

Замечание 1. При рассмотрении более общей по сравнению с (9), (10) краевой задачи (17), (18) с малым коэффициентом диффузии $\varkappa = \varepsilon^2\varkappa^0$, изменения невелики. Коэффициент d_0 в (33) дополняется еще одним слагаемым:

$$d_0 = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1} d\left(\frac{1}{2} + \sigma_0^2\right) + \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\varkappa^0.$$

Отметим, что краевая задача (33) может обладать богатой динамикой, поэтому этот же вывод справедлив и для цепочки рассматриваемых осцилляторов.

1.3. Динамика цепочек при $\sigma = O(\varepsilon^2)$

Предполагаем, что выполнено условие (20). Выделим все те корни характеристического уравнения (16), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Корни $\lambda = \lambda(k)$ этого уравнения находятся из формулы

$$\lambda + \left(r_0 + \varepsilon^2 r_1\right)\exp(-\lambda) = d\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s, \varepsilon)\exp(iks)ds - 1\right) = \\ = d\left(\cos(z)\exp\left(-\varepsilon^4\sigma_0^2 z^2\right) - 1\right), \tag{35}$$

где $z = \varepsilon k$. Условие стремления вещественных частей корней к нулю обусловлено обращением в нуль с точностью до $o(1)$(при $\varepsilon \to 0$) правой части в (36). Этому условию удовлетворяют такие номера $k = k(\varepsilon)$, для которых $\cos(z) \sim 1$. Для описания таких номеров введем обозначения. Фиксируем произвольное целое n и через $\theta_n = \theta_n(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначим выражение, которое дополняет до целого значение $2\pi n\varepsilon^{-1}$. Оказывается, что функцию $\theta_n(\varepsilon)$ можно считать тождественно равной нулю. Дело в том, что введенный выше параметр ε был определен как $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$. Поэтому $2\pi n\varepsilon^{-1} = nN$, т.е. целое.

Тогда совокупность номеров $k(\varepsilon)$ корней $\lambda(k(\varepsilon))$ в рассматриваемом случае состоит из значений

$$k(\varepsilon) = 2\pi n\varepsilon^{-1} + m, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{36}$$

Эти корни удобно обозначать через $\lambda_{m,n}(\varepsilon)$. Для них имеем асимптотическое выражение

$$\lambda_{m,n}(\varepsilon) = i\frac{\pi}{2} - \varepsilon^2\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left(m^2 + 4\pi^2\sigma_0^2 n^2\right) + O(\varepsilon^4).$$

Следуя изложенной выше схеме исследования, введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{gathered} u = 1 + \varepsilon\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_{m,n}(\tau)\exp\left(i\left(2\pi n\varepsilon^{-1} + m\right)x\right) + \right. \\ \left. + \varepsilon\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{\xi}_{m,n}(\tau)\exp\left(-i\left(2\pi n\varepsilon^{-1} + m\right)x\right)\right) + \varepsilon^2 u_2(t,\tau,x) + \varepsilon^3 u_3(t,\tau,x) + \ldots, \end{gathered} \tag{37}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, а функции $u_j(t,\tau,x)$ периодичны по t и x.

Положим $y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$ и

$$\xi(\tau,x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_{m,n}(\tau)\exp(iny + imx).$$

Тогда выражение (37) можно упростить:

$$u = 1 + \varepsilon\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right)\xi(\tau,x,y) + \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\overline{\xi}(\tau,x,y)\right) + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \ldots. \tag{38}$$

Подставим (38) в (9) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. Сначала находим $u_2(\tau,t,x)$, а затем из условия разрешимости уравнения относительно u_3 приходим к выражению для определения $\xi(\tau,x,y)$:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \left(1 + i\frac{\pi}{2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + 4\pi^2\sigma_0^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right) + \lambda_{10}\xi + g\xi|\xi|^2, \tag{39}$$

$$\xi(\tau,x+2\pi,y) \equiv \xi(\tau,x,y+2\pi) \equiv \xi(\tau,x,y), \tag{40}$$

где коэффициенты λ_{10} и g те же, что и в (24).

Основные результаты здесь в идеологическом плане повторяют утверждение теорем 5 и 6. Приведем для примера аналог теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть* $\xi_0(\tau,x,y)$*– ограниченное при* $\tau\to\infty$ *решение краевой задачи* (39), (40). *Тогда функция*

$$u_0(t,x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon\left(\exp\left(i\frac{\pi}{2}t\right)\xi_0\left(\varepsilon^2 t, x, 2\pi^{-1}x\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{2}t\right)\overline{\xi}_0\left(\varepsilon^2 t, x, 2\pi\varepsilon^{-1}x\right)\right) + \varepsilon^2 u_2 \tag{41}$$

удовлетворяет краевой задаче (9), (10) *с точностью до* $O(\varepsilon^3)$.

Краевые задачи (33) и (38), (40) численно исследовались многими авторами (см., например, [31]). Показано, что для таких краевых задач, особенно для (39), (40), характерны сложные и нерегулярные колебания. Согласно формулам (32) и (38), связывающих решения этих краевых задач и решений краевой задачи (9), (10), такой же вывод можно сформулировать и о решениях (9), (10).

2. ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ПРИ ОДНОСТОРОННИХ СВЯЗЯХ

Рассмотрим краевую задачу (9), (10), в которой для функции $F(s,\varepsilon)$ выполнено равенство (13), а для параметра σ имеет место соотношение (19).

Предположим, что в отсутствие связей состояние равновесия $u_0 = 1$ логистического уравнения (1) асимптотически устойчиво. Тем самым значения параметра r удовлетворяют неравенству

$$0 < r < \frac{\pi}{2}. \tag{42}$$

Пункт 2.1 посвящен анализу линеаризованной на u_0 краевой задаче, а в п. 2.2 построена нелинейная краевая задача, которая играет роль нормальной формы.

2.1. Линейный анализ

Характеристическое уравнение для линеаризованной на u_0 краевой задачи в рассматриваемом случае приобретает вид

$$\lambda + r\exp(-\lambda) = d\left(\exp\left(iz - \sigma_0^2 z^2\right) - 1\right), \tag{43}$$

где $d > 0$, $z = \varepsilon k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия в краевой задаче (14), (15) исследуем расположение корней уравнения (43).

Приведем без доказательств несколько простых утверждений о корнях (43).

Лемма 1. *При всех $d > 0$ и при всех $z \in [\pi(2n+1), \pi(2n+2)]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, уравнение* (43) *не может иметь корней с нулевой вещественной частью.*

Лемма 2. *Для каждого $z \in (2\pi n, \pi(2n+1))$ найдется такое $d > 0$, что при $d = d_z$ уравнение* (43) *имеет корень с нулевой вещественной частью.*

Введем обозначение: $d(r) = \min\limits_{-\infty<z<\infty} d_z = d_{z(r)}$.

Тогда при всех $d \in (0, d(r))$ состояние равновесия краевой задачи (14), (15) асимптотически устойчиво. При $d = d(r)$ и $z = z(r)$ уравнение (43) имеет корни $\lambda_\pm(r)$ с нулевой вещественной частью: $\lambda_\pm(r) = \pm i\omega(r)$, $\omega(r) > 0$.

Лемма 3. *Для значений $\omega(r)$ и $z(r)$ выполнены неравенства*

$$0 < z(r) < \pi, \quad \frac{\pi}{2} < \omega(r) < \frac{3\pi}{2}.$$

Рассмотрим отдельно вопросы об асимптотике выражений $d(r)$, $\omega(r)$ и $z(r)$ при $r \to 0$ и при $r \to \frac{\pi}{2}$.

Пусть сначала $r \to 0$. Обозначим через ω_0 корень из промежутка $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ уравнения $\operatorname{tg}\omega = -\omega^{-1}$ и положим

$$c_0 = \left(1 + \sigma_0^2\right)\omega_0^2\left(\omega_0^2 + 4\right), \quad z_0 = \omega_0 c_0^{-1}.$$

Лемма 4. *При $r \to 0$ имеют место асимптотические равенства*

$$d(r) = c_0 r^{-1}(1 + o(1)), \quad \omega(r) = \omega_0 + o(1), \quad z(r) = z_0 r(1 + o(1)).$$

Пусть затем $r = \frac{\pi}{2} - \mu$ и $0 < \mu \ll 1$. Введем обозначения: через $z_{00} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ обозначим наименьший корень уравнения

$$z = \left(\frac{\pi}{2} - 2\sigma_0^2 z\right)\left(1 + \pi\sigma_0^2 z\right)^{-1}.$$

Положим

$$c_{00} = \left(f_2 + \frac{2}{\pi} f_1\right)^{-1}, \quad w_{00} = -\frac{2}{\pi} f_1\left(f_2 + \frac{2}{\pi} f_1\right)^{-1},$$
$$f_1 = \cos z_{00} \cdot \exp\left(-\sigma_0^2 z_{00}^2\right) - 1,$$
$$f_2 = \sin z_{00} \cdot \exp\left(-\sigma_0^2 z_{00}^2\right).$$

Лемма 5. *При всех достаточно малых μ имеют место асимптотические равенства*

$$d(r) = c_{00}\mu(1 + o(1)),$$
$$\omega(r) = \frac{\pi}{2} + \omega_{00}\mu(1 + o(1)), \quad z(r) = z_{00} + o(1).$$

Обоснования лемм 4, 5 достаточно простые, но громоздкие. Поэтому их опустим.

Фиксируем далее значение $r_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и произвольные величины r_1 и d_1. Положим в (9), (10)

$$r = r_0 + \varepsilon^2 r_1, \quad d = d(r_0) + \varepsilon^2 d_1. \tag{44}$$

Ниже через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ обозначаем выражение, которое дополняет до целого величину $z(r_0)\varepsilon^{-1}$. Исследуем асимптотику всех корней уравнения (43), близких к мнимой оси. Обозначим их через $\lambda_m(\varepsilon)$ и $\lambda_m(\varepsilon)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Имеем равенства

$$\lambda_m(\varepsilon) = i\omega(r) + \varepsilon i R_1(\theta + m) + \varepsilon^2 \left(R_{20} + (\theta + m)^2 R_2\right) + \ldots, \tag{45}$$

где

$$R_1 = (1 - r_0 \exp(-i\omega(r_0)))^{-1} d(r_0) z(r_0) \left(1 + 2i\sigma_0^2\right) \exp\left(-\sigma_0^2 z^2(r_0) + iz_0(r_0)\right),$$

$$R_{20} = (1 - r_0 \exp(-i\omega(r_0)))^{-1} \left[d_1 \left(1 - \exp\left(-\sigma_0^2 z^2(r_0) + iz_0(r_0)\right) - 1\right) - r_1 \exp(-i\omega(r_0))\right],$$

$$R_2 = (1 - r_0 \exp(-i\omega(r_0)))^{-1} \left[\frac{1}{2} r_0 \exp(-i\omega(r_0)) R_1^2 + d(r_0)\left(2\sigma_0^2 z^2(r_0) - \left(\sigma_0^2 + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\sigma_0^2 z^2(r_0) + iz(r_0)\right)\right].$$

Важно отметить, что

$$\operatorname{Im} R_1 = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} R_2 < 0. \tag{46}$$

2.2. Построение квазинормальной формы

Введем в рассмотрение формальный ряд

$$\begin{gathered} u = 1 + \varepsilon\left(\exp(i\omega(r_0)t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp\left(i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta + m\right)x + \varepsilon i R_1(\theta + m)t\right) + \right. \\ \left. + \exp(-i\omega(r_0)t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{\xi}_m(\tau) \exp\left(-i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta + m\right)x - \varepsilon i R_1(\theta + m)t\right)\right) + \\ + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x, \varepsilon) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, \varepsilon) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon^2 t. \end{gathered} \tag{47}$$

Это выражение можно существенно упростить. Положим

$$\xi(\tau, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_m(\tau) \exp(imy), \quad y = x + \varepsilon R_1 t.$$

Тогда от (47) переходим к представлению

$$\begin{gathered} u = 1 + \varepsilon\left(\exp\left(i(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta)t + i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta\right)x\right)\xi(\tau, y) + \right. \\ \left. + \exp\left(-i(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta)t - i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta\right)x\right)\overline{\xi}(\tau, y)\right) + \\ + \varepsilon^2 u_2(t, \tau, x, y) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, y) + \ldots. \end{gathered} \tag{48}$$

Фигурирующие здесь функции $u_j(t, \tau, x, y)$ периодичны по t, x и y.

Подставим (48) в (9). Тогда, применяя стандартные процедуры, сначала находим $u_2(t, \tau, x, y)$:

$$\begin{gathered} u_2(t, \tau, x, y) = u_{20} |\xi(\tau, y)|^2 + \\ + u_{21}\xi^2(\tau, y) \exp\left(2i(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta)t + 2i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta\right)x\right) + \\ + u_{21}\overline{\xi}^2(\tau, y) \exp\left(-2i(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta)t - 2i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta\right)x\right), \end{gathered}$$

где

$$u_{20} = -2\cos\omega(r_0),$$

$$u_{21} = -2r\cos(2\omega(r_0))\left[2i\omega(r_0) + r_0 \exp(-2i\omega(r_0)) - d(r_0)(\exp(-2i\omega(r_0) - 4\sigma_0^2 z^2(r_0)) - 1)\right]^{-1}.$$

На следующем этапе получим уравнение для $u_3(t, \tau, x, y)$, из условия разрешимости которого в указанном классе функций приходим к краевой задаче для определения $\xi(\tau, y)$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = R_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - i\theta R_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(R_{20} + \theta^2 R^2\right)\xi + q\xi|\xi|^2, \tag{49}$$

$$\xi(\tau, y + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \tag{50}$$

Для коэффициента q имеем равенство

$$q = r_0(1 - r_0\exp(-i\omega(r_0)))^{-1}\left[2\cos(\omega(r_0))(1 + \exp(-i\omega(r_0)) - u_{21}(\exp(i\omega(r_0)) + \exp(-2i\omega(r_0)))\right].$$

Для формулировки основного результата введем еще одно обозначение. Фиксируем произвольно значение $\theta_0 \in [0, 1)$ и через $\varepsilon_n(\theta_0)$ обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_n(\theta_0) \to 0$ при $n \to \infty$ и для каждого n выполнено равенство $\theta(\varepsilon_n(\theta_0)) = \theta_0$.

Из приведенных выше построений вытекает следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть при некотором* $\theta = \theta_0$ *краевая задача* (49), (50) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $y \in [0, 2\pi]$ *решение* $\xi_o(\tau, y)$. *Тогда функция*

$$u_0 = 1 + \varepsilon\Big(\exp\Big(i\left(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta_0\right)t + i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta_0\right)x\Big)\xi_0(\tau, y) +$$
$$+ \exp\Big(-i\left(\omega(r_0) + \varepsilon R_1\theta_0\right)t - i\left(z(r_0)\varepsilon^{-1} + \theta_0\right)x\Big)\overline{\xi}_0(\tau, y)\Big), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \quad y = x + \varepsilon R_1 t,$$

при условиях (13), (19) *и при* $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_0)$ *удовлетворяет краевой задаче* (9), (10) *с точностью до* $O(\varepsilon^2)$.

ВЫВОДЫ

Показано, что рассмотренные критические случаи в задаче об устойчивости распределенной цепочки логистических уравнений с запаздыванием имеют бесконечную размерность. Это приводит к тому, что описание их локальной динамики сводится к исследованию нелокального поведения решений краевых задач типа Гинзбурга–Ландау. Известно (см., например., [31]), что динамика таких объектов может быть сложной, причем для них характерны нерегулярные колебания, явления мультистабильности и др. Сами динамические эффекты существенно зависят от выбора связей. Показано, что в ряде случаев решения содержат быстро и медленно осциллирующие по пространственной переменной составляющие. Основные результаты определяют структуру асимптотических по невязке решений исходных краевых задач. Вопрос о существовании, устойчивости и более сложных асимптотических разложений точных решений, близких к построенным, может быть решен в случае периодических решений нормализованных уравнений.

Остановимся отдельно на роли фигурирующего выше параметра $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$. Напомним, что динамические свойства исходной системы определяются квазинормальной формой (49), (50), куда входит параметр θ. При различных значениях этого параметра динамика (49), (50), а значит, и краевой задачи (9), (10), может меняться. Детально это показано в [32]. Отсюда следует, что при $\varepsilon \to 0$ может происходить бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Сформулируем еще один вывод общего плана. Выше было показано, что квазинормальные формы, определяющие динамику исходной краевой задачи, являются уравнениями Гинзбурга–Ландау. Устойчивость простейших решений этих уравнений исследована в [33]. В частности, установлено, что свойства их устойчивости во многом определяются мнимыми составляющими коэффициентов диффузии и ляпуновской величины (коэффициенты g и q в (49) и (50)). Численный анализ соответствующего критерия позволил сформулировать вывод о неустойчивости простейших решений вида $\mathrm{const}\cdot\exp(i\omega t + ikx)$. Таким образом, в рассмотренных цепочках синхронизация решений является достаточно редким явлением.

Отметим, что в зависимости от коэффициента σ функции $F(s,\varepsilon)$ ((12), (13)) в качестве квазинормальной формы могут выступать параболические краевые задачи как с одной, так и с двумя пространственными переменными. Кроме этого, выявлены порядки (по параметру ε) коэффициентов диффузии в исходной краевой задаче, которые делают сопоставимым вклад диффузионного слагаемого со слагаемым, обеспечивающим связь элементов цепочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maurer J., Libchaber A.* Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid ^{4}He // J. Phys. Lett. (France) 1982. V. 41. P. 515.
2. *Кузнецов С.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Автономная система – генератор гиперболического хаоса. Схемотехническое моделирование и эксперимент // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 5. С. 17–30.
3. *Brun E., Derighette B., Meier D., Holzner R., Raveni M.* Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. V. 2. P. 156.

4. *Dangoisse D., Glorieux P., Hennequin D.* Chaos in a CO_2 laser with modulated parameters: Experiments and numerical simulations // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 4775.
5. *Chembo Y.K., Jacquot M., Dudley J.M., Larger L.* Ikeda-like chaos on a dynamically filtered supercontinuum light source // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 023847.
6. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Chichester: Wiley, 1986.
7. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and delayed recurrent loops // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 708.
8. *Sysoev I.V., Ponomarenko V.I., Kulminskiy D.D., Prokhorov M.D.* Recovery of couplings and parameters of elements in networks of time-delay systems from time series // Phys. Rev. E. 2016. V. 94. P. 052207.
9. *Ponomarenko V.I., Kulminskiy D.D., Prokhorov M.D.* Chimeralike states in networks of bistable time-delayed feedback oscillators coupled via the mean field // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 022209.
10. *Караваев А.С., Ишбулатов Ю.М., Киселев А.Р., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Миронов С.А., Шварц В.А., Гриднев В.И., Безручко Б.П.* Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43. № 1. С. 70–80.
11. *Kuang Y.* Delay Differential Equations : With Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 410 p. (Mathematics in science and engineering; 191). ISBN 0124276105.
12. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer Verlag, 1996. 439 p. (Applied mathematical sciences; 119). ISBN 9780387947716.
13. *Gourley S.A., Sou J.W.-H., Wu J.H.* Nonlocality of reaction-diffusion equations induced by delay: biological modeling and nonlinear dynamics // J. Math. Sci. 2004. V. 124. № 4. P. 5119–5153. https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047249.39572.6d
14. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of the solutions of the generalized hutchinson equation // Automat. Control and Comp. Sci. 2013. V. 47. № 7. P. 470–494. https://doi.org/10.3103/S0146411613070079
15. *Кащенко С.А.* Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 561–571. https://doi.org/10.1134/S0374064116050022
16. *Кащенко С.А., Логинов Д.О.* Бифуркации при варьировании граничных условий в логистическом уравнении с запаздыванием и диффузией // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 138–143. https://doi.org/10.4213/mzm12438
17. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Springer, 1984.
18. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexisting of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonlinear Phenom Complex Syst. 2002. V. 5. № 4. P. 380.
19. *Haken H.* Brain dynamics: synchronization and activity patterns in pulse-coupled neural nets with delays and noise. Springer, 2002.
20. *Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer, 2007.
21. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., and Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization networks. Singapore: World Scientific, 1994.
22. *Крюков А.К., Осипов, Г.В., Половинкин А.В.* Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осциллятолров: Цепочка и решетка связанных элементов // Изв. вузов "ПНД", 2009. Т. 17. № 2.
23. *Крюков А.К., Канаков О.И., Осипов Г.В.* Волны синхронизации в ансамблях слабонелинейных осцилляторов // Изв. вузов "ПНД". 2009. Т. 17. № 1.
24. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
25. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Comm. Nonlin. Sci. and Numer. Simulat. 2016. V. 34. P. 123–129. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.10.011
26. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1049–1052.
27. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Inter. J. of Bifurcat. and Chaos in Appl. Sci. and Eng. 1996. V. 6. № 6. P. 1093–1109. https://doi.org/10.1142/S021812749600059X
28. *Кащенко С.А.* Простейшие критические случаи в динамике нелинейных систем с малой диффузией // Тр. Московского матем. общества. 2018. Т. 79. Вып. 1. С. 97–115. https://doi.org/10.1090/mosc/285
29. *Kashchenko S.A.* Asymptotics of periodic solutions of autonomous parabolic equations with small diffusion // Siberian Math. J. 1986. V. 27. № 6. P. 880–889.
30. *Кащенко С.А.* Бифуркации в окрестности цикла при малых возмущениях с большим запаздыванием // Ж. вычисл матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 5. С. 693–702.
31. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.*Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992. 544 с.
32. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite process of forward and backward bifurcations in the logistic equation with two delays // Nonlin. Phenomena in Complex Syst. 2019. V. 22. № 4. P. 407–412.
33. *Kashchenko A.A.* Analysis of running waves stability in the Ginzburg–Landau equation with small diffusion // Automat. Control and Comp. Sci. 2015. V. 49. № 7. P. 514–517.