

УДК 519.72

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СТАТИСТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ<sup>1)</sup>

© 2021 г. В. М. Старожилец<sup>1,\*</sup>, Ю. В. Чехович<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, Вавилова, 42, ФИЦ ИУ РАН, Россия

\*e-mail: starvsevol@gmail.com

\*\*e-mail: chehovich@forecsys.ru

Поступила в редакцию 26.11.2020 г.

Переработанный вариант 26.11.2020 г.

Принята к публикации 11.03.2021 г.

Предлагается статистическая модель транспортных потоков, предназначенная для моделирования движения транспортных средств на автомагистралях значительной протяженности. Модель симулирует движение групп транспортных средств по магистрали с использованием фундаментальной диаграммы поток-плотность на выбранном участке автодороги для расчета скорости группы, размер группы считается линейно зависящим от ее скорости. Предложенный авторами подход к моделированию позволяет совместить достоинства макроскопического и микроскопического моделирования. А именно моделировать движение на транспортных системах мегаполисов с высокой точностью и низкими требованиями к вычислительным мощностям. В статье описаны принципы моделирования, приведены алгоритмы пересчета состояний модели, приведены результаты вычислительных экспериментов для подтверждения работоспособности и адекватности результатов модели для различных конфигураций дорожно-транспортной сети. Фундаментальная диаграмма в приведенных экспериментах строится по данным дорожных датчиков Центра организации дорожного движения. Библ. 20. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** моделирование транспортных потоков, фундаментальная диаграмма потоков, группы автомобильно-транспортных средств (АТС).

**DOI:** 10.31857/S0044466921070152

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена описанию модели, предназначенной для моделирования потоков в автомобильно-транспортной сети с использованием анонимных данных с GPS-треков и дорожных датчиков, а также полученных видеосъемкой. Процедура комплексирования данных из GPS-треков и дорожных датчиков подробно рассмотрена в [1]. Также проводятся эксперименты на синтетических данных с целью показать адекватность поведения модели.

Моделирование транспортных потоков основано на их сходстве с жидкой или газовой средой. В частности, базовая модель Лайтхилла–Уизема–Ричардса (Lighthill–Whitham–Richards, LWR) [2]–[4] основана на предположении о существовании взаимно однозначной зависимости между скоростью и плотностью потока автомобильно-транспортных средств (АТС) и сохранении числа АТС в транспортной сети. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в различных постановках [5]–[12].

В современных исследованиях также пытаются учесть разнородность транспортных средств в потоке АТС. В работе [13] детально рассматривается движение транспортного потока, состоящего из автомобилей, автобусов, двухколесных и трехколесных мотоциклов на двухполосной дороге. В [14] рассматривается смешанный поток из велосипедов и автомобилей. В [15], [16] для той же задачи моделирования смешанного потока используются клеточные автоматы.

Основное отличие данной модели от уже представленных в том, что рассматривается движение неразделимых групп автомобилей по магистрали (которые, однако, могут соединяться меж-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код прокта 17-07-01574).

ду собой) вместо движения самих автомобилей, считая скорость всех транспортных средств в группе одинаковой. Зависимость скорости групп АТС от плотности автомобилей на рассматриваемом участке автомобильно-транспортной сети рассчитывается на основе построенной по историческим данным фундаментальной диаграммы потока для данного участка [17].

Хотя модель использует довольно грубые приближения из-за использования группы АТС как базовой единицы моделирования, будет показано, что групп АТС достаточно для получения результатов, хорошо совпадающих с реальными измерениями, при любых режимах автомагистрали [18].

## 2. СТРУКТУРА МОДЕЛИ

### 2.1. Внутренние свойства модели

Транспортная сеть представляет собой связный ориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  – множество вершин,  $E = \{(i, j)\}$  – множество ветвей графа. На граф также накладываются ограничения на максимальную и минимальную степень вершин  $d(i)$ :  $\min(d(i)) = 1$  и  $\max(d(i)) = 3$ . Также  $\forall i: d(i) > 1 \rightarrow \exists j, l \in V : (j, i), (i, l) \in E$ , т.е. не существует вершины, в которой только заканчиваются несколько ветвей, и не существует вершины, в которой только начинаются несколько ветвей.

Определим теперь все типы вершин графа в зависимости от их степеней.

1.  $d(i) = 1$ . В данном случае существует два варианта:

(а)  $i: \exists(j, i) \in E$ . Такие вершины будем называть *вершинами-въездами*. Вершины-въезды образуют множество  $V_{in}$  и являются источниками автомобильно-транспортных средств (АТС) в рассматриваемой модели.

(б)  $i: \exists(j, i) \in E$ . Такие вершины будем называть *вершинами-съездами*. Вершины-съезды образуют множество  $V_{out}$  и являются стоками автомобилей в рассматриваемой модели.

2.  $d(i) = 2$ . Это внутренние вершины модели, образующие множество  $V_{int}$ .

3.  $d(i) = 3$  – вершины-центры перекрестков дорожно-транспортной сети. Данные вершины также входят в множество  $V_{int}$ , но образуют еще два подмножества.

(а) Если  $\exists(i, j) \in E, (i, k) \in E: j \neq k$ , то такие вершины образуют множество  $V_{sep}$  – вершины, в которых происходит разделение потоков в дорожно-транспортной сети.

(б) Если  $\exists(j, i) \in E, (k, i) \in E: j \neq k$ , то такие вершины образуют множество  $V_{mer}$  – вершины, в которых происходит слияние потоков в дорожно-транспортной сети.

Таким образом,  $V = V_{int} \cup V_{out} \cup V_{in}$  – все вершины распределены по трем непересекающимся группам. Вершины же перекрестки с  $d(i) = 3$  дополнительно разделены по типу перекрестка, причем  $V_{sep} \cap V_{mer} = \emptyset$ . Ввиду того, что в данной работе рассматриваются только автомагистрали, то вершины с  $d(i) = 4$  и более не встречаются.

Разделим схожим образом ребра, инцидентные этим вершинам. Рассмотрим для этого некоторое ребро  $(i, j)$ .

1. Если  $i \in V_{in}$ , то ребро  $(i, j)$  – это ребро-въезд. Такие ребра образуют множество въездов  $E_{in}$ .

2. Если  $j \in V_{out}$ , то ребро  $(i, j)$  – это ребро-съезд. Такие ребра образуют множество съездов  $E_{out}$ .

3. Если  $i \in V_{int}$  и  $j \in V_{int}$ , то ребро  $(i, j)$  – это внутреннее ребро модели. Такие ребра образуют множество внутренних ребер модели  $E_{int}$ .

Также как и с вершинами  $E = E_{int} \cup E_{out} \cup E_{in}$  за исключением случая, когда модель представляет из себя одно ребро, который в этой работе не рассматривается.

Определим теперь понятие состояния модели в момент времени  $t$ . Для этого нам понадобится понятие автомобильной группы на ветви  $(i, j)$ :  $A_k^t = \{Pos_k, V_k, N_k\}$ , обладающей следующими характеристиками:

1.  $Pos_k$  – позиция начала группы относительно начала ветви, на которой она расположена.

2.  $V_k$  – скорость группы АТС.

3.  $N_k$  – размер группы АТС из  $\mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+$ .

Пусть теперь  $\mathbf{A}_{i,j}^t = \{\mathbf{A}_k^t\}$  – упорядоченное множество автомобильных групп на ветви  $(i, j)$ . Причем  $\forall l, m : l < m \rightarrow \text{Pos}_l > \text{Pos}_m$  – группы не могут обгонять друг друга.

Таким образом, введем состояние системы в момент времени  $t$  как  $\mathbf{A}^t = \{\mathbf{A}_{i,j}^t\} \cup \{\mathbf{A}_{\text{out},i,j}^t\}$ , т.е. положение, скорость, размер и тип всех автомобильных групп на всех ветвях дорожно-транспортной сети. Группы АТС  $\{\mathbf{A}_{\text{out},i,j}^t\}$  представляют собой специальные группы-буферы. Их особые свойства рассматриваются в разделе Общих свойств модели.

Для расчетов нам также понадобится понятие потенциала трансфера  $\text{Tr}_{(i,j),k}^t(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1})$  – число АТС, которые могут съехать с ветви  $(i, j)$  на ветвь  $(j, k)$  в интервал времени от  $t-1$  до  $t$ . Данная величина вычисляется заново на каждой временной итерации в зависимости от состояния системы.

## 2.2. Внешние свойства модели

Определим теперь свойства модели, задаваемые при ее инициализации.

Рассмотрим предварительно три ветви с  $d(j) = 3$ :  $(i, j), (j, k_1), (j, k_2)$ . В данной работе мы считаем  $(j, k_1)$  продолжением автомагистрали, а  $(j, k_2)$  – съездом с нее. Данное распределение полностью задается в момент инициализации модели.

Перечислим все внешние параметры модели для каждой ветви  $(i, j) \in \mathbf{E}$  графа  $\mathbf{G}$ .

1. Длина ветви  $l_{i,j}$ .
2. Число полос, по которым разрешено движение автомобилей по данной ветви  $n_{i,j}$ .
3.  $I_{i,j} = \{0, 1\}$  – идентификатор того, является ветвь съездом или нет. Если является, то  $I_{i,j} = 1$ .
4. Функция скорости для данной ветви  $V = f_{i,j}(\rho)$ ,  $f_{i,j} : \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbb{Q}_+$ , где  $\rho \in \mathbb{R}_+$  – плотность АТС. В данной работе рассматриваются только ограниченные, непрерывные, монотонно убывающие функции скорости. Процедура получения данной функции из экспериментальных данных детально описана в статье [17].
5. Матрица перемешивания в узле  $j$  в момент времени  $t$ , задаваемая функцией  $M_j(t)$ . В случае если  $j : \mathcal{A}(j, k) \in \mathbf{E}_{\text{out}} \rightarrow \forall t : M_j(t) = 0$ .

6. Интенсивность источника в узле  $i$  в момент времени  $t$ , задаваемая функцией  $F_i(t)$ . Для всех  $i : i \notin \mathbf{V}_{\text{in}} \rightarrow \forall t : F_i(t) = 0$ .

Также у каждой ветви есть буфер АТС  $A_{\text{out},i,j}^t = \{\text{Pos}_{\text{out},i,j}, V_{\text{out},i,j}, N_{\text{out},i,j}\}$ , представляющий из себя группу АТС с  $\text{Pos}_{\text{out},i,j} = l_{i,j}$ ,  $V_{\text{out},i,j} = 0$ . Данная группа моделирует очередь на съезд с ребра  $(i, j)$  – т.е. группу  $(j, k)$  с  $I_{i,j} = 1$ . Работа с данной группой детально описана в разд. Алгоритмов перемещения и объединения групп АТС 3.

Будем считать, что в модели все автомобили имеют фиксированный размер  $L_{\text{car}^{\text{avg}}}$ . В дальнейшем, путем изменения этой величины можно также исследовать зависимость поведения автомагистрали от состава потока автомобилей. С его помощью получаем максимальное число автомо-

билей на ветви  $(i, j)$  как  $N_{\text{max}}^{i,j} = \frac{l_{i,j} \cdot n_{i,j}}{L_{\text{car}}^{\text{avg}}}$ .

Введем также понятие динамического размера автомобилей  $L_{\text{car}}(V) = L_{\text{car}}^{\text{avg}} + aV$ , где  $a = 0.504$ . Данная величина отражает тот факт, что автомобили в среднем на определенной скорости не сближаются сильнее некоторого расстояния. Сама же константа  $a$ , как и данное приближение, взята из книги [19].

Таким образом, получаем, что все характеристики автомобильной группы ограничены сверху.

1. Положение  $\text{Pos}_k$  группы АТС длиной ветви, на которой группа находится.
2. Скорость  $V_k$  ограничена максимальной скоростью на ветви, которую можно определить из функции скорости  $f_{i,j}(\rho)$ .
3. Максимальный размер  $N_k$  ограничен максимальным числом автомобилей на ветви  $N_{\text{max}}^{i,j}$ .

Однако поскольку в нашей модели все группы АТС движутся так, как будто каждый автомобиль в группе обладает полным знанием обо всех других автомобилях, то это накладывает на группы логическое ограничение на их размер, так как сложно ожидать такого поведения у АТС в огромной группе. Мы в данной работе считаем разумным ограничение в  $N_{\max} = 20$  АТС.

Также нам понадобится величина среднего ускорения группы АТС  $a_{\text{avg}}$  для ограничения увеличения скорости движения групп АТС по ветвям автомагистрали. В данной работе величина ускорения взята за константу и равна  $2.2 \text{ м/с}^2$  (см. [20]).

### 3. АЛГОРИТМЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ОБЪЕДИНЕНИЯ ГРУПП АТС

Определим как группы АТС объединяются в одну, как переезжают с одной ветви на другую, как движутся по ветви и как съезжают на ветви-съезды. Также определим функцию расчета  $\text{Tr}_{(i,j),k}^t(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1})$  на каждом временном шаге.

#### 3.1. Движение групп АТС по ветви

На каждой итерации алгоритма надо рассчитать новое положение групп АТС для каждой ветви. Перерасчет положения групп, а также их скорости производит функция  $\text{group\_mover}(\mathbf{A}_{i,j}^t, k, (i, j), \tau, t)$  по алгоритму 1. Расчеты по данному алгоритму сводятся к следующим шагам.

**Шаг 1.** Для выбранной группы АТС  $\mathbf{A}_k^t$  на ветви  $(i, j)$  рассчитываем ее скорость  $V_k^t$  на основании плотности автомобилей на участке автодороги перед ней.

**Шаг 2.** Рассчитываем новое положение группы АТС.

**Шаг 3.** Если группа оказалась в конце ветви:

(а) рассчитать, сколько времени она ехала до конца ветви;

(б) в соответствии с матрицей перемешивания часть группы добавляется в буфер-группу  $\mathbf{A}_{\text{out},i,j}^t$ ;

(в) оставшаяся часть группы  $\mathbf{A}_k^t$  пытается переехать на следующую для нее ветвь с  $I_{j,m_1} = 0$ ;

(г) группа-буфер  $\mathbf{A}_{\text{out},i,j}^t$  пытается переехать на следующую для нее ветвь с  $I_{j,m_1} = 1$ .

Заметим, что функция  $\text{group\_transferer}$  алгоритм 3 вызывается тут с временным шагом  $\tau'$ , что означает, что группа АТС при переезде на новую ветвь будет двигаться меньшее количество времени.

---

#### Алгоритм 1. Алгоритм расчета положения и скорости группы АТС

---

**Вход:**  $\mathbf{A}_{i,j}^t$  – множество характеристик автомобильных групп на ветви;

$k$  – индекс рассматриваемой автомобильной группы;

$(i, j)$  – рассматриваемая ветвь графа;

$\tau$  – временной шаг;

$t$  – текущий момент времени;

**если**  $\text{Pos}_k = l_{i,j}$ , **то**

Если группа АТС уже в конце ветви, то она просто пытается переехать на следующую ветвь

Пусть  $j'$ :  $(j, j') \in \tilde{\mathbf{E}}$  – ветвь с  $I_{j,j'} = 0$

$\text{group\_transferer}(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1}, k, (i, j), (j, j'), \tau')$  из Алгоритма 3

**return 0**

$\text{Pos}_{k+} = V_k \cdot \tau$

Пусть  $\rho = \frac{\sum_{m=k+1}^{\text{len}(\mathbf{A}_{i,j}^t)} N_m}{l_{i,j} \cdot n_{i,j}}$  – плотность АТС на участке ветви  $(i, j)$  перед группой АТС  $k$ ,

тогда  $V'_k = f_{i,j}(\rho)$  – новая скорость группы АТС.

**если**  $V'_k - V_k > a_{\text{avg}} \cdot \tau$ , **то**

$$V'_k = V_k + a_{\text{avg}} \cdot \tau$$

**если**  $\text{Pos}_k \geq l_{i,j}$  и  $k = 0$ , **то**

$$\tau' = \tau \cdot \frac{\text{Pos}_k - l_{i,k}}{V_k \cdot \tau} - \text{'оставшееся' время движения автомобильной группы}$$

$$\text{Pos}_k = l_{i,k}$$

Добавим АТС в группу-буфер  $\mathbf{A}_{\text{out},i,j}^t$

$$N_{\text{out},i,j}^+ = N_k \cdot M_j(t)$$

$$N_k = N_k \cdot (1 - M_j(t))$$

Оставшиеся АТС должны продолжить движение по магистрали

Пусть  $j'$ :  $(j, j') \in \tilde{\mathbf{E}}$  – ветвь с  $I_{j,j'} = 0$

group\_transferrer( $\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1}, k, (i, j), (j, j'), \tau'$ ) по Алгоритму 3

Группа-буфер пытается съехать

Пусть  $j''$ :  $(j, j'') \in \tilde{\mathbf{E}}$  – ветвь с  $I_{j,j''} = 0$

group\_transferrer( $\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1}, k, (i, j), (j, j''), \tau'$ ) по Алгоритму 3

**иначе**

**если**  $\text{Pos}_k \geq \text{Pos}_{i,k-1}$ , **то**

$$\text{Pos}_k = \text{Pos}_{k-1} - L_{\text{car}}(V_{k-1}) \cdot N_{k-1}$$

group\_union( $\mathbf{A}_{i,j}, k, (i, j), t$ )

Если группа АТС  $\mathbf{A}_k^t$  все еще существует  $V_k = V'_k$

---

### 3.2. Объединение двух групп АТС

После изменения положения группы АТС на ветви нужно проверить, не может ли она быть объединена с какой-либо другой группой. Поскольку группы движутся только вперед и в нашей модели не могут обгонять друг друга, то проверка на возможность объединения идет только с группой перед рассматриваемой. То есть для группы АТС  $j$  рассматривается возможность ее слияния с группой  $j - 1$ . За слияние групп отвечает функция group\_union( $\mathbf{A}_{i,j}, k, (i, j), t$ ), работающая по алгоритму 2.

---

#### Алгоритм 2. Алгоритм объединения групп АТС

---

**Вход:**  $\mathbf{A}_{i,j}^t$  – множество характеристик автомобильных групп на ветви;

$k$  – индекс рассматриваемой автомобильной группы;

$(i, j)$  – рассматриваемая ветвь графа;

$t$  – текущий момент времени;

**если**  $k = 0$ , **то**

Группу не с чем объединять, так как она самая первая

**иначе**

**если**  $\text{Pos}_{k-1} - \text{Pos}_k \leq L_{\text{car}}(V_{k-1}) \cdot N_{k-1}$  и  $N_{k-1} + N_k \leq N_{\text{max}}$ , **то**

Объединяем группы в одну

**если**  $k - 1 = 0$  и  $\text{Pos}(k - 1) = l_{i,j}$ , **то**

$$N_{\text{exit}}^j+ = N_k \cdot M_j(t)$$

$$N_{k-1}+ = N_k \cdot (1 - M_j(t))$$

**иначе**

$$N_{k-1}+ = N_k$$

$\text{del } \mathbf{A}_k^t$  – группа  $k$  удаляется

### 3.3. Перемещение групп АТС между ветвями

Когда группа автомобилей достигает конца ветви, на которой она находится, требуется определить, какая ее часть переедет на следующий сегмент автомагистрали и какое положение и скорость примет на новой ветви. За данные расчеты отвечает функция  $\text{group\_transferrer}(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1}, k, (i, j), (j, j'), \tau, t)$  по алгоритму 3. Расчеты по данному алгоритму сводятся к следующим шагам.

**Шаг 1.** Определяем индекс новой группы АТС на ветви  $(j, j')$ .

**Шаг 2.** Определяем, может ли группа переехать на новую ветвь полностью. Если да:

(а) создаем новую группу АТС в конце ветви  $(j, j')$  с  $N_{k'} = N_k$ .

(б) Удаляем группу  $k$  из  $\mathbf{A}_{i,j}^t$ .

**Шаг 3.** Если нет:

(а) создаем новую группу АТС в конце ветви  $(j, j')$  с  $N_{k'} = N'$ , где  $N'$  – число АТС, которые могут переехать.

(б) Уменьшаем размер группы  $k$  на величину  $N'$ .

**Шаг 4.** Вызываем функцию для перемещения новой группы по ветви  $(j, j')$ .

### Алгоритм 3. Алгоритм перемещения группы АТС на новую ветвь

**Вход:**  $\mathbf{A}^t$  – состояние системы в текущий момент времени;

$\mathbf{A}^{t-1}$  – состояние системы в предыдущий момент времени;

$k$  – индекс рассматриваемой автомобильной группы;

$(i, j)$  – ветвь, с которой хочет съехать группа АТС;

$(j, j')$  – ветвь, на которую хочет съехать группа АТС;

$\tau$  – временной шаг;

$t$  – текущий момент времени;

**если**  $N_k \leq \text{Tr}_{(i,j),j'}^t(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1})$ , **то**

Группа полностью может переехать на новую ветвь

Пусть  $k' = \text{len}(\mathbf{A}_{j,j'}^t) + 1$  – индекс новой группы АТС

Создаем новую группу АТС на ребре  $(j, j')$  с индексом  $k'$  и характеристиками:

$$\text{Pos}_{k'} = 0, V_{k'} = f_{j,j'}(\rho), N_{k'} = N_k$$

Удаляем группу  $k$  из  $\mathbf{A}_{i,j}^t$

$$\text{group\_mover}(\mathbf{A}_{j,j'}^t, k', (j, j'), \tau, t)$$

**иначе**

Только часть группы переезжает на новую ветвь

Пусть  $k' = \text{len}(\mathbf{A}_{j,j'}^t) + 1$  – индекс новой группы АТС

Создаем новую группу АТС на ребре  $(j, j')$  с индексом  $k'$  и характеристиками:

$$\text{Pos}_{k'} = 0, V_{k'} = f_{j,j'}(\rho), N_{k'} = \text{Tr}_{(i,j),j'}^t(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1})$$

$$N_{k'}^- = \text{Tr}_{(i,j),j'}^t(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1})$$

$$\text{group\_mover}(\mathbf{A}_{i,j}^t, k', (j, j'), \tau, t)$$

## 4. РАСЧЕТНЫЙ ЦИКЛ

### 4.1. Расчет потенциала трансфера

Для начала определим то, как в конце каждой итерации рассчитывается сколько АТС могут переехать с ветви  $(i, j)$  на ветвь  $(j, k)$ . Особенностью является то, что алгоритм рассчитывает не потенциал трансфера для ветви  $(i, j)$  на ветвь  $(j, k)$ , а все потенциалы трансфера  $\forall i: (i, j) \in \mathbf{E} \rightarrow \text{Tr}_{i,j}^k$ . То есть для ветви  $(j, k)$  рассчитываются всевозможные  $\text{Tr}_{i,j}^k$ .

Данный расчет производит функция  $\text{Tr\_calculator}(\mathbf{A}^t, \mathbf{A}^{t-1}, (j, k), \tau)$  по алгоритму 4. В процессе расчета нам также понадобятся величины  $Q(i, j) = \max(\rho \cdot f_{i,j}(\rho))$  – максимальный поток АТС на ветви  $(i, j)$ ,  $N_{\max}^{i,j}$  – максимальное число АТС на ветви  $(i, j)$  и  $N_{i,j}^t = \sum_{m=0}^{\text{len}(\mathbf{A}_{i,j}^t)} N_m$  – текущее число АТС на ветви  $(i, j)$ .

Процедура расчета сводится к определению двух величин:

1)  $P_i$  – потенциальное количество АТС, которые могут доехать до конца ветви  $(i, j)$ , предшествующей  $(j, k)$ ;

2)  $N_{\text{total}}$  – сколько всего АТС может переехать на ветвь  $(j, k)$  на основании ее вместимости и максимального потока на ней.

В итоге число АТС, которые могут переехать с ветви  $(i, j)$  на ветвь  $(j, k)$ , определяется формулой  $N_{\text{total}} \frac{P_i}{\sum P_i}$ .

### 4.2. Процедура расчета

Процедура перехода от состояния системы  $\mathbf{A}^{t-1}$  к состоянию  $\mathbf{A}^t$  происходит в соответствии со следующим циклом.

1.  $\forall (i, j) \in \mathbf{V}_{\text{out}}$ : удаляем все группы АТС, находящиеся на этой ветви, так как это ветви – стоки.

2.  $\forall (i, j) \in \mathbf{V}_{\text{in}}$ : формируем новую группу АТС  $k' = \text{len}(\mathbf{A}_{i,j}^t) + 1$  с  $\text{Pos}_{k'} = 0$ ,  $V_{k'} = f_{j,j'}(\rho)$ ,  $N_{k'} = F_i(t)$ .

3. Пусть  $\mathbf{C}$  – некоторое подмножество ветвей графа. Будем выполнять следующие действия пока оно не пусто:

(а)  $\mathbf{C} = \{(i, j)\}, (i, j) \in \mathbf{V}_{\text{out}}$ .

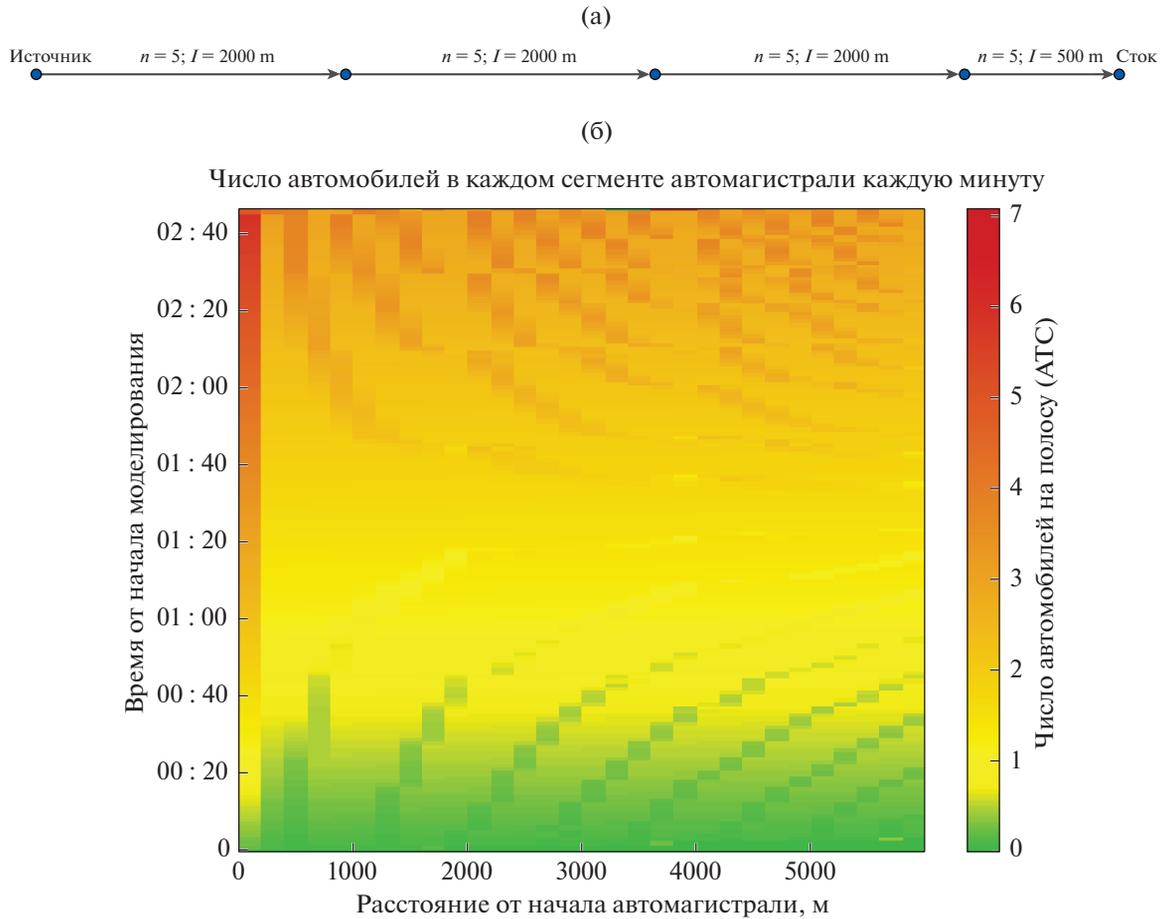
(б)  $\forall (i, j) \in \mathbf{C} \rightarrow \forall \mathbf{A}_k^t \in \mathbf{A}_{i,j}^t \rightarrow \text{group\_mover}(\mathbf{A}_{i,j}^t, k, (i, j), \tau, t)$  – для каждой группы АТС рассчитываем ее новое положение. Причем расчет производится упорядоченно по убыванию величины  $\text{Pos}_k$ , причем группы-буферы обсчитываются первыми.

(в)  $\mathbf{C}' = \{(k, i)\} : \exists j : (i, j) \in \mathbf{C}$  – формируем новое подмножество для расчетов.

(г)  $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$ .

4.  $\forall (i, j) \in \mathbf{E} \rightarrow \forall \mathbf{A}_k^t \in \mathbf{A}_{i,j}^t \rightarrow \text{group\_union}(\mathbf{A}_{i,j}^t, k, (i, j), t)$  – объединяем группы АТС, если это возможно.

Таким образом, получаем состояние системы  $\mathbf{A}^t$ .



**Фиг. 1.** (а) Схема простой дороги в модели состоит из 3 сегментов по 2 километра. (б) Тепловая карта автомобилей на простой дороге без перекрестков с линейно нарастающим вплоть до 150 АТС/мин потоком.

**Алгоритм 4.** Алгоритм расчета  $T_{i,j}^k$

**Вход:**  $A^t$  – состояние системы в текущий момент времени;

$A^{t-1}$  – состояние системы в предыдущий момент времени;

$(j, k)$  – ветвь, для которой проводится расчет;

$\tau$  – временной шаг;

Пусть  $I = \{i : (i, j) \in E\}$  – множество ветвей, предшествующих рассматриваемой

для всех  $i \in I$

$P_i = 0$  – число АТС, которые теоретически могут достигнуть конца их ветви на следующей временной итерации

для всех  $m = 0; l \leq \text{len}(A_{i,j}^t); m++$

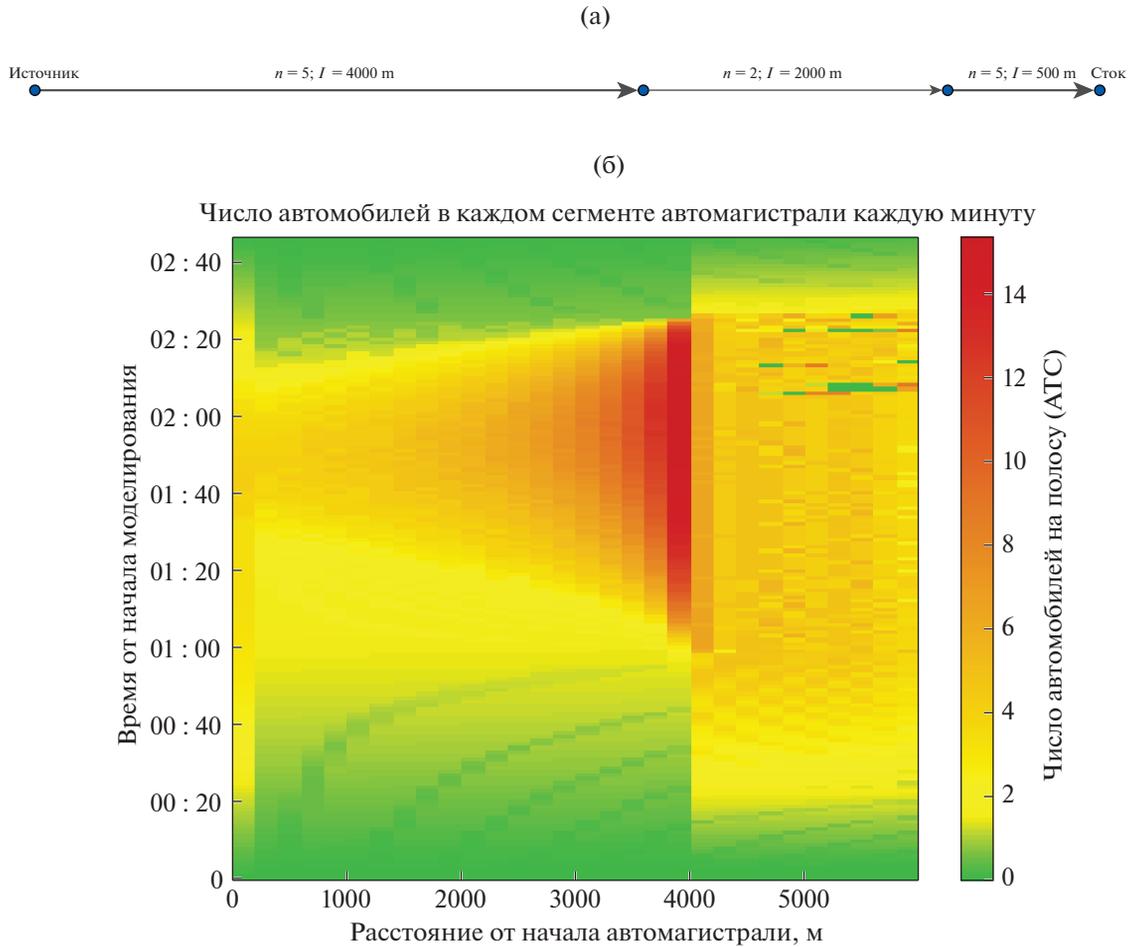
если  $\text{Pos}_m + V_m \cdot \tau \geq m_{i,j}$ , то

если  $(j, k) \in E_{\text{int}}$ , то

$$P_{i+} = N_m \cdot (1 - M_j(t))$$

иначе

$$P_{i+} = N_m \cdot M_j(t)$$



**Фиг. 2.** (а) Схема дороги. (б) Тепловая карта автомобилей на пятиполосной дороге без перекрестков с сужением до двух полос и синусоидальным потоком на входе.

Определим  $N_{\text{total}}$  – сколько всего АТС может переехать на ветвь  $(j, k)$

если  $N_{\text{max}}^{j,k} - N_{\text{cur}}^{j,k} < Q(j, k)$ , то

$$N_{\text{total}} = N_{\text{max}}^{j,k} - N_{\text{cur}}^{j,k}$$

иначе

$$N_{\text{total}} = Q(j, k)$$

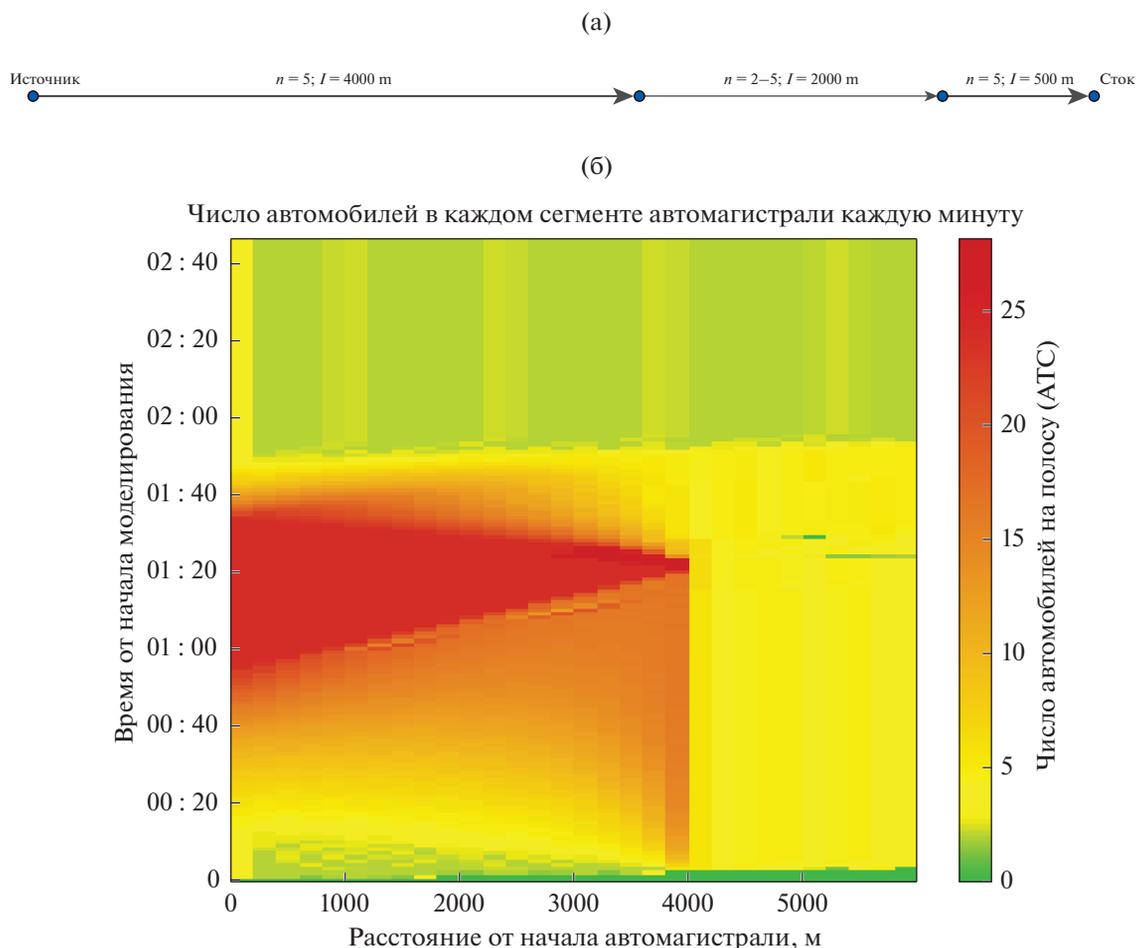
для всех  $i \in \mathbf{I}$

$$\Gamma_{i,j}^k = N_{\text{total}} \cdot \frac{P_i}{\sum P_i}$$

## 5. ОПИСАНИЕ ДАННЫХ

В данной работе во всех экспериментах использовалась одна фундаментальная диаграмма поток-плотность, полученная анализом реальных данных с дорожных датчиков за 2012 г. Построение фундаментальной диаграммы сводится к следующим шагам.

1. Для каждого надежного датчика на выбранном участке дороги извлечем данные измерений плотности и потока за наблюдаемый период времени. Каждая точка на диаграмме определяется парой значений “плотность–поток” на плоскости  $Q(\rho)$ .



**Фиг. 3.** (а) Схема дороги. (б) Тепловая карта автомобилей на пятиполосной дороге без перекрестков с сужением до двух полос пропадающим в середине моделирования и постоянным потоком в 100 АТС/мин.

2. Фильтрация выбросов путем построения альфа-оболочек облака точек диаграммы до тех пор, пока разница площадей оболочек для двух смежных итераций не будет мала.

3. Находим опорные точки на границе облака точек диаграммы и строим на их основе функцию-оггибающую, которую и принимаем за фундаментальную диаграмму поток-плотность.

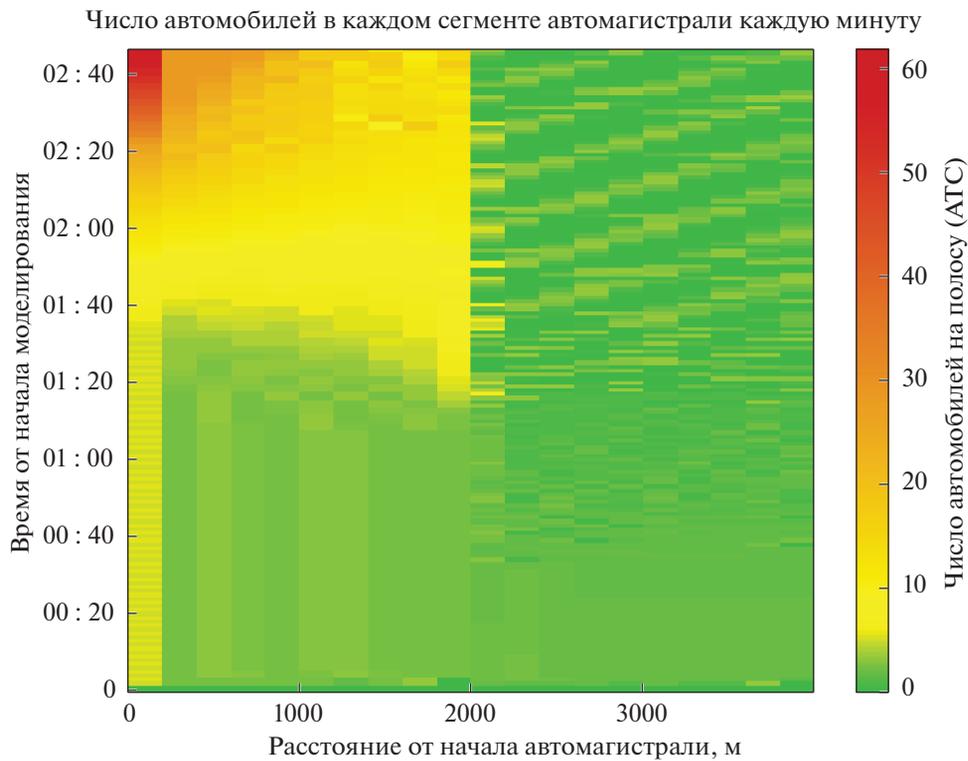
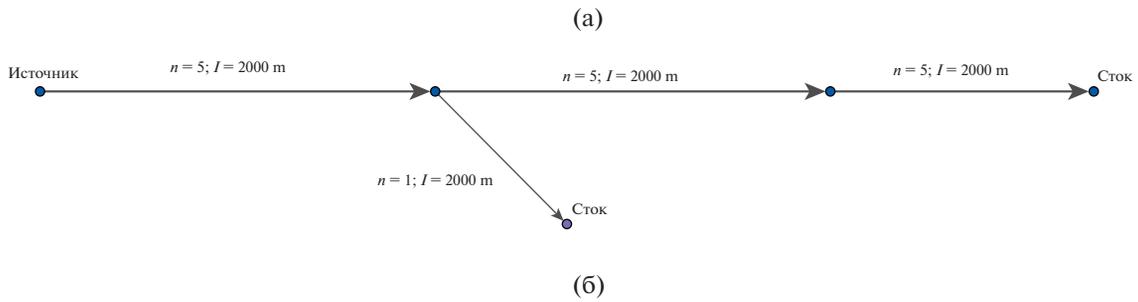
Детально процедура построения фундаментальной диаграммы описана в работе [17].

## 6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В работе проводится серия экспериментов на синтетических данных в различных конфигурациях транспортной сети. Цель экспериментов – проверка адекватности модели на всех режимах работы автомагистрали. Графики представляют из себя тепловые карты, по оси  $x$  которых отложено расстояние от начала участка магистрали, по оси  $y$  – время. В конце автомагистрали всегда находится небольшая ветвь, представляющая собой сток.

### 6.1. Прямая дорога

Для начала рассмотрим поведение модели для простой пятиполосной дороги длиной 6 километров без перекрестков с линейно нарастающим вплоть до 150 АТС/мин потоком изображенное на фиг. 1. В модели данная дорога представлена тремя ветвями по 2 километра. Данный эксперимент показывает, что в модели нет существенных краевых эффектов на стыке ветвей.



Фиг. 4. (а) Схема дороги. (б) Тепловая карта автомобилей на пятиполосной дороге со съездом.

### 6.2. Прямая дорога с сужением и синусоидальным потоком

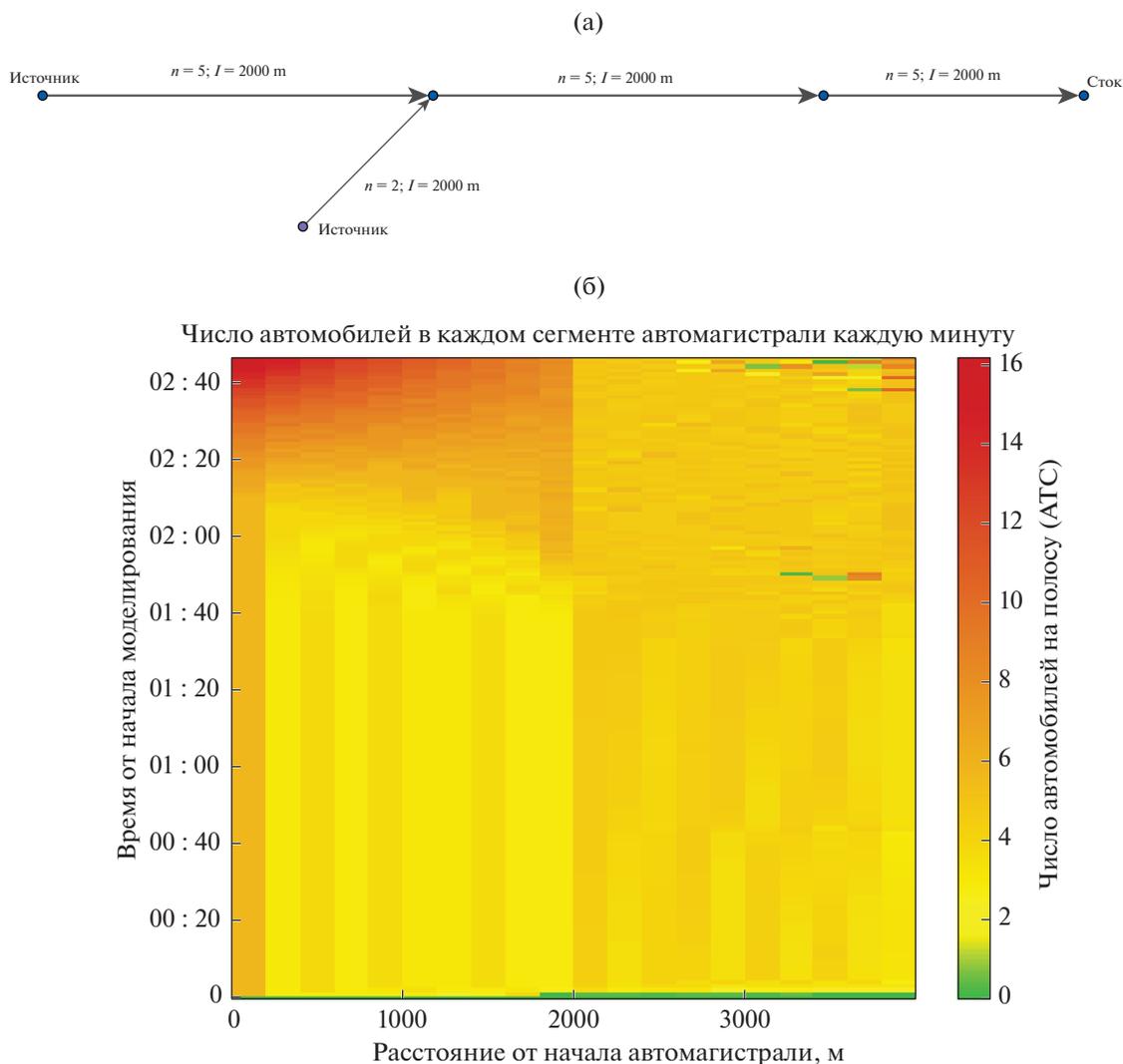
Для следующего эксперимента возьмем прямой участок пятиполосной дороги с сужением до двухполосной. В данном эксперименте с целью рассмотрения как процесса формирования затора, так и его исчезновения пустим на вход синусоидальный поток с периодом, равным времени моделирования, и амплитудой в 85 АТС/мин. Результат моделирования можно наблюдать на фиг. 2. На графике видно, что при уменьшении потока на сегменте, соответствующем двухполосной дороге, наблюдается разрыв потока АТС, который мы связываем с групповыми эффектами модели.

### 6.3. Прямая дорога с пропадающим сужением

Также рассмотрим ситуацию, когда при постоянном потоке в 100 АТС/мин на пятиполосной дороге с сужением до двухполосной данное сужение в середине моделирования пропадает. Такая ситуация может сложиться, например, при прекращении ремонтных работ или устранении аварии. Результаты моделирования можно наблюдать на фиг. 3.

### 6.4. Перекресток со съездом

Промоделируем оба варианта перекрестков, возможных в предложенной модели. Перекресток со съездом и перекресток с въездом. В обоих случаях основная автомагистраль — пятиполосная. Въезд или съезд однополосные.



**Фиг. 5.** (а) Схема дороги. (б) Тепловая карта автомобилей на пятиполосной дороге с въездом с постепенно нарастающим потоком с него.

В эксперименте со съездом входной поток – 65 АТС/мин. Доля съезжающих автомобилей линейно растет с 20% до 60%. На фиг. 4 видно, что из-за недостаточной пропускной способности съезда на основной автомагистрали образуется пробка.

### 6.5. Перекресток с въездом

В эксперименте со въездом поток на автомагистрали – 140 АТС/мин, поток на въезде линейно растет от 20 до 50 АТС/мин. В данном случае также образуется пробка на основной автомагистрали, что видно на фиг. 5.

## 7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В работе изложен новый алгоритм моделирования числа проехавших АТС для задачи моделирования транспортных потоков и проведены пять экспериментов, показывающих его состоятельность.

Эксперименты из разд. 6 показывают работоспособность модели для моделирования всевозможных конфигураций автомагистрали при любом потоке АТС на ней. Показано, что модель адекватно симулирует поведение АТС на автомагистрали как в ситуации достаточной ее про-

пусковой способности, так и при ее превышении, а также моделирует различные варианты образования заторных ситуации как при распространении пробки из-за проблем на магистрали на фиг. 2, так и по причине недостаточной пропускной способности прилегающих съездов 4.

Из недостатков стоит отметить отсутствие каких-либо ограничений на генерируемые источниками автомобили в зависимости от уже имеющейся загруженности ветви автомагистрали, а также невозможность в текущем состоянии моделировать перекрестки с несколькими въездами и съездами, инцидентными одному узлу.

С точки зрения развития модели требуется на реальных данных проверить зависимость точности моделирования от размера группы АТС. Провести эксперименты с различными динамическими размерами автомобилей, а также проверить необходимость использования ограничения на ускорение группы АТС в зависимости от ее скорости вместо статического, использованного в данной работе. Также требуются улучшения в работе с группой АТС, моделирующей очередь на съезд с автомагистрали.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старожилец В.М., Чехович Ю.В. Комплексование данных из разнородных источников в задачах моделирования транспортных потоков // Машинное обучение и анализ данных. 2016. Т. 2. № 3. С. 260–276.
2. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads // P. Roy. Soc. Lond. A Mat. 1955. V. 229. P. 317–345.
3. Richards P.I. Shock waves on the highway // Oper. Res. 1956. V. 4. № 1. P. 42–51.
4. Whitham J.B. Linear and nonlinear waves. Hoboken: Wiley, 1974. 656 p.
5. Daganzo C.F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow // Transport. Res. B Meth. 1995. V. 29. № 4. P. 277–286.
6. Payne H.J. Models of freeway traffic and control // Math. Models Public Syst. 1998. № 4. P. 51–61.
7. Papageorgiou M. Some remarks on macroscopic traffic flow modelling // Transport. Res. A Pol. 1998. V. 32. № 5. P. 323–329.
8. Aw A., Michel Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM J. Appl. Math. 2000. V. 60. № 3. P. 916–938.
9. Zhang M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transport. Res. B Meth. 2002. V. 36. № 3. P. 275–290.
10. Zhang M. Anisotropic property revisited – does it hold in multi-lane traffic? // Transport. Res. B Meth. 2003. V. 37. № 6. P. 561–577.
11. Siebel F., Mauser W. On the fundamental diagram of traffic flow // SIAM J. Appl. Math. 2006. V. 66. № 4. P. 1150–1162.
12. Siebel F., Mauser W. Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // Phys. Rev. E. 2006. V. 73. № 6. P. 066108.
13. Dey P.P., Chandra S., Gangopadhyay S. Simulation of mixed traffic flow on two-lane roads // J. of Transportation Engng. 2008. V. 134. № 9. P. 361–369.
14. Guo Hong-Wei, Gao Zi-You, Zhao Xiao-Mei, Xie Dong-Fan. Dynamics of motorized vehicle flow under mixed traffic circumstance // Communications in Theoretical Physics. 2011. V. 55. № 4. P. 719.
15. Gundaliya P.J., Tom V. Mathew, Sunder Lall Dhingra. Heterogeneous traffic flow modelling for an arterial using grid based approach // J. of Advanced Transportation. 2008. V. 42. № 4. P. 467–491.
16. Lan L.W., Chang C. -W., Gangopadhyay S. Inhomogeneous cellular automata modeling for mixed traffic with cars and motorcycles // J. of advanced transportation. 2005. V. 39. № 3. P. 323–349.
17. Алексеенко А.Е., Холодов Я.А., Холодов А.С., Горева А.И., Васильев М.О., Чехович Ю.В., Мишин В.Д., Старожилец В.М. Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Ч. I // Компьютерные исследования и моделирование. 2015. Т. 7. № 6. С. 1185–1203.
18. Kerner B. The physics of traffic. Berlin: Springer, 2004. 681 p.
19. Гасников А.В. и др. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.: Litres, 2015. С. 89.
20. Long G. Acceleration characteristics of starting vehicles // Transportation Research Record. 2000. V. 1737. № 1. P. 58–70.