ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 8, с. 1295–1308

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.632

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1)]

В. В. Карачик

454080 Челябинск, пр-т Ленина, 76, ЮУрГУ, Россия

e-mail: karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 24.06.2020 г.
Переработанный вариант 12.11.2020 г.
Принята к публикации 16.12.2020 г.

Исследована разрешимость одного класса задач типа Неймана для однородного полигармонического уравнения в единичном шаре. Сначала получены локальные достаточные условия разрешимости задач типа Неймана, а затем они преобразованы к условиям на границе в интегральном виде, которые представляют собой условия ортогональности на единичной сфере однородных гармонических полиномов некоторых степеней линейным комбинациям граничных функций с коэффициентами из целочисленного треугольника Неймана. Эти достаточные условия совпадают с полученным ранее набором необходимых условий разрешимости рассматриваемых задач типа Неймана. Рассмотрен пример. Библ. 27.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, необходимые и достаточные условия, разрешимость, задачи типа Неймана.

DOI: 10.31857/S0044466921040050

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическими задачами для полигармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ являются задачи Дирихле (см., например, [1]–[4]) и Неймана (см., например, [5]–[8]). Разрешимость этих задач хорошо исследована в теории краевых задач. Установлено, что все задачи данного типа фредгольмовы и их разрешимость для однородных краевых условий гарантируется ортогональностью правых частей всем решениям однородного сопряженного уравнения.

В [9], [10] были исследованы условия разрешимости краевых задач для полигармонического уравнения в шаре с нормальными производными в граничных условиях. Условия разрешимости в этих работах, а также в работе А.В. Бицадзе [5] имели вид ортогональности некоторых векторфункций, зависящих от данных задачи или равенства рангов некоторых матриц высокого порядка. Чтобы установить, при каких граничных условиях конкретная задача такого типа разрешима, необходимо выполнить некоторые непростые вычисления.

Рассматриваемый в настоящей работе класс задач является естественным обобщением классической постановки задачи Неймана, предложенной для полигармонического уравнения А.В. Бицадзе (см. [6]). В [11] с помощью целочисленного треугольника Неймана (см. [12]) были найдены необходимые условия разрешимости этого класса задач. В настоящей работе доказывается, что найденный ранее набор необходимых условий разрешимости задач типа Неймана является также и достаточным условием разрешимости.

Пусть $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ – единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ – единичная сфера, где $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. В единичном шаре S рассмотрим следующий класс краевых задач

[1)]Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

типа Неймана $\mathcal{N}_k$, зависящий от параметра $k \in \mathbb{N}_0$ (значения параметров n и m в дальнейшем исследовании будем считать фиксированными) для однородного полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}\right|_{\partial S} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}}\right|_{\partial S} = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \left.\frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}}\right|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S, \tag{2}$$

где $\partial/\partial\nu$ – внешняя нормальная производная к единичной сфере, $m \in \mathbb{N}$. Гладкость граничных функций $\varphi_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, определенных на ∂S, будет указана ниже. Задача $\mathcal{N}_0$ является задачей Дирихле, которая безусловно разрешима, а задача $\mathcal{N}_1$ совпадает с задачей Неймана (см. [6], [7]). В [5] А.В. Бицадзе выписал необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_1$ при $m = 1, 2$ и показал, что она решается в квадратурах.

Исследования разрешимости некоторых постановок задач типа Неймана в единичном шаре, кроме перечисленных выше работ, можно найти также для бигармонического уравнения (в частности, задачи $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$) – в [13]–[17], а для полигармонического уравнения в [18]. В [19], [20] для краевых задач для полигармонического уравнения с нормальными производными в граничных условиях получены достаточное условие фредгольмовости этих задач и новая форма критерия фредгольмовости, эквивалентного условию дополнительности.

Настоящая работа устроена следующим образом. В лемме 1 из разд. 2 исследована гладкость гармонических компонент решения задачи Дирихле $\mathcal{N}_0$. В леммах 2 и 3 из разд. 3 найдены достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$ в терминах функции $v(x)$ – решения вспомогательной задачи Дирихле и зависящие от треугольника Неймана $\mathbb{P}$. В теореме 1 из разд. 4 приводятся необходимые условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$ в терминах граничных функций задачи. В лемме 4 и теореме 3 из разд. 5 условия из теоремы 1 в случае четных $k - l$ выражаются через вспомогательную функцию $v(x)$, в случае нечетных $k - l$ это сделано в теореме 4. Наконец, в теореме 5 из разд. 6 доказано, что при $k \le m$ необходимые условия теоремы 1 являются также и достаточными условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$. Приводится пример задачи $\mathcal{N}_3$ для 7-гармонического уравнения.

2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ $\mathcal{N}_0$

Рассмотрим сначала задачу Дирихле $\mathcal{N}_0$ для однородного полигармонического уравнения. Если воспользоваться обозначениями $\Lambda = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $t^{[m]} = t(t-1)\ldots(t-m+1)$ есть m-я факториальная степень t, причем $t^{[0]} = 1$, и равенством $\Lambda^{[i]} u = \frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}$ на ∂S, то эту задачу можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \Delta^m u = 0, \quad x \in S; \\ u|_{\partial S} = \varphi_1(x), \ldots, \Lambda^{[m-1]} u|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S. \end{gathered} \tag{3}$$

Указанные выше свойства оператора $\Lambda = x \cdot \nabla$ были замечены раннее в работе А.В. Бицадзе [6]. Известно (см. [2]), что если функция $u(x)$ является m-гармонической в звездной области $D \subset \mathbb{R}^n$, то она может быть разложена по формуле Альманси

$$u(x) = u^{(0)}(x) + |x|^2 u^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2} u^{(m-1)}(x), \quad x \in D, \tag{4}$$

где $u^{(i)}(x)$ – "гармонические компоненты" m-гармонической функции $u(x)$. Далее нам понадобится гладкость вплоть до границы ∂S гармонических компонент решения задачи Дирихле (3). Пусть ε – малое положительное число.

Лемма 1. *Пусть $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$ при $i = 1, 2, \ldots, m$, тогда все гармонические компоненты $u^{(i-1)}(x)$ из* (4) *решения задачи Дирихле* (3) *таковы, что $u^{(i-1)} \in C^{m-1}(\bar{S})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Доказательство. Пусть $w_i(x)$ – решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в S с граничным условием $w_i|_{\partial S} = \varphi_i(x)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Если использовать разложение Альманси m-гармонической в S функции $u(x)$, то будем иметь в S

$$\Lambda^{[i]}u(x) = \Lambda^{[i]}\sum_{j=1}^{m}|x|^{2j-2}u^{(j-1)}(x) = \sum_{j=1}^{m}|x|^{2j-2}(\Lambda + 2j - 2)^{[i]}u^{(j-1)}(x),$$

а поэтому для i-го граничного условия задачи Дирихле (3) запишем

$$w_i|_{\partial S} = \varphi_i(x) = \Lambda^{[i-1]}u|_{\partial S} = \sum_{j=1}^{m}|x|^{2j-2}(\Lambda + 2j - 2)^{[i-1]}u^{(j-1)}\Big|_{\partial S} = \sum_{j=1}^{m}(\Lambda + 2j - 2)^{[i-1]}u^{(j-1)}\Big|_{\partial S}.$$

Поскольку оператор Λ сохраняет гармоничность функции, то в силу единственности решения задачи Дирихле получим следующие уравнения в гармонических в S функциях:

$$\sum_{j=1}^{m}(\Lambda + 2j - 2)^{[i-1]}u^{(j-1)}(x) = w_i(x), \quad x \in S,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим матрицу этой системы дифференциальных уравнений через

$$A(\Lambda) = ((\Lambda + 2j - 2)^{[i-1]})_{i,j=1,\ldots,m} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \Lambda & \Lambda + 2 & \ldots & \Lambda + 2m - 2 \\ \Lambda^{[2]} & (\Lambda+2)^{[2]} & \ldots & (\Lambda + 2m - 2)^{[2]} \\ \ldots & & \ldots & \\ \Lambda^{[m-1]} & (\Lambda+2)^{[m-1]} & \ldots & (\Lambda + 2m - 2)^{[m-1]} \end{pmatrix}.$$

Пусть $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = (\lambda_i^{j-1})_{i,j=1,\ldots,m}$ – матрица Вандермонда размера $m \times m$, тогда матрицу $W[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] = (\lambda_i^{[j-1]})_{i,j=1,\ldots,m}$ будем называть факториальной матрицей Вандермонда. Видно, что

$$A(\Lambda) = W[\Lambda, \Lambda + 2, \ldots, \Lambda + 2m - 2].$$

Первые две строки определителей $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ и $W[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ совпадают, и если вторую строку определителя $W[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ сложить с его третьей строкой, то получим третью строку определителя $W(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Продолжая аналогичные действия, убеждаемся, что $\det W(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \det W[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$. Поэтому

$$\det W[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] = \prod_{1 \le i < j \le m}(\lambda_j - \lambda_i),$$

а значит,

$$\det A(\Lambda) = \det W[\Lambda, \Lambda + 2, \ldots, \Lambda + 2m - 2] = (2m - 2)!! \cdot (2m - 4)!! \ldots 2 \equiv a_m.$$

Пусть $A^*(\Lambda) = (A_{j,i}(\Lambda))_{i,j=1,\ldots,m}$ – присоединенная матрица к $A(\Lambda)$, где $A_{i,j}(\Lambda)$ – алгебраические дополнения к элементам исходной матрицы. Докажем, что $\deg A_{j,i}(\Lambda) = m - j$.

Сначала исследуем операторы $A_{m,s}(\Lambda)$. Для этого рассмотрим алгебраическое дополнение до элементов m-й строки в факториальной матрице Вандермонда $W^*_{m,s}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m]$ при $s = 1, 2, \ldots, m$. Видно, что

$$W^*_{m,s}[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] = (-1)^{m-s}\prod_{1 \le i < j \le m; i, j \ne s}(\lambda_j - \lambda_i),$$

откуда находим

$$A_{m,s}(\Lambda) = \frac{(-1)^{m-s}a_m}{(2s - 2)!!(2m - 2s)!!},$$

и, значит, $\deg A_{m,s}(\Lambda) = 0$. Далее рассмотрим оператор $A_{k,s}(\Lambda)$ при $k = 1\ldots, m - 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$ и предположим, что $\deg A_{i,s}(\Lambda) = m - i$ при $i = k + 1, \ldots, m$ и $s = 1, 2, \ldots, m$. Заменим оператор Λ на числовой параметр λ и для простоты обозначений рассмотрим последний элемент в k-й строке матрицы $A^*(\lambda)$

$$A_{k,m}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & \lambda+2 & \dots & \lambda+2m-4 \\ \dots & & \dots & \\ \lambda^{[k-2]} & (\lambda+2)^{[k-2]} & \dots & (\lambda+2m-4)^{[k-2]} \\ \lambda^{[k]} & (\lambda+2)^{[k]} & \dots & (\lambda+2m-4)^{[k]} \\ \dots & & \dots & \\ \lambda^{[m-1]} & (\lambda+2)^{[m-1]} & \dots & (\lambda+2m-4)^{[m-1]} \end{vmatrix}.$$

Для нахождения степени полинома $A_{k,m}(\lambda)$ рассмотрим дискретную производную многочлена $P(\lambda)$ в виде $P^{(1)}(\lambda) = P(\lambda+1) - P(\lambda)$ (см. [21, с. 220]. Видно, что

$$\left(\prod_{i=1}^{m} P_i(\lambda)\right)^{(1)} = \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{i-1} P_j(\lambda+1)P_i^{(1)}(\lambda)\prod_{j=i+1}^{m} P_j(\lambda)\right)$$

и $(\lambda^{[k]})^{(1)} = k\lambda^{[k-1]}$ при $k > 0$, а $(\lambda^{[0]})^{(1)} = 0$. Поэтому производная $A_{k,m}^{(1)}(\lambda)$ равняется сумме $(m-1)$ определителей, в которых производные берутся по каждой строке отдельно. При взятии производных от первых $(k-1)$ строк мы получаем определители, в которых строка, по которой берется производная, линейно зависит от предыдущих строк, а значит, эти определители равны нулю. При взятии производных от последних $(m-k-1)$ строк получаем определители, являющиеся линейными комбинациями определителей $A_{i,m}(\lambda)$ при $i > k+1$. Производная k-й строки $A_{k,m}(\lambda)$ равна

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda+1 & \lambda+3 & \dots & \lambda+2m-3 \\ \dots & & \dots & \\ (\lambda+1)^{[k-2]} & (\lambda+3)^{[k-2]} & \dots & (\lambda+2m-3)^{[k-2]} \\ k\lambda^{[k-1]} & k(\lambda+2)^{[k-1]} & \dots & k(\lambda+2m-4)^{[k-1]} \\ \dots & & \dots & \\ \lambda^{[m-1]} & (\lambda+2)^{[m-1]} & \dots & (\lambda+2m-4)^{[m-1]} \end{vmatrix} = kA_{k+1,m}(\lambda),$$

откуда по предположению $\deg A_{k,m}(\lambda) = \deg A_{k+1,m}(\lambda) + 1 = m-k-1+1 = m-k$. Поскольку значение $W_{m,s}^*[\lambda_1,\dots,\lambda_m]$ зависит от разности $\lambda_j - \lambda_i$, то по аналогии с проделанным $\deg A_{k,s}(\lambda) = m-k$ при $s = 1,2,\dots,m$. Таким образом, доказано, что $\deg A_{j,i}(\Lambda) = m-j$. Например, при $m = 3$ имеем

$$A^*(\Lambda) = 2\begin{pmatrix} (\Lambda+2)(\Lambda+4) & -2\Lambda-5 & 1 \\ -2\Lambda(\Lambda+4) & 4\Lambda+6 & -2 \\ \Lambda(\Lambda+2) & -2\Lambda-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если обозначить столбцы матрицы $A^*(\Lambda)$ через $A_1^*(\Lambda),\dots,A_m^*(\Lambda)$, то

$$\begin{pmatrix} u^{(0)}(x) \\ \dots \\ u^{(m-1)}(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{a_m}(A_1^*(\Lambda)w_1(x) + \dots + A_m^*(\Lambda)w_m(x)),$$

где $\deg(A_i^*)_j(\Lambda) = m-i$ для всех $j = 1,2,\dots,m$. Следовательно, для того чтобы

$$u^{(i-1)}(x) = \frac{1}{a_m}\sum_{j=1}^{m}(A_j^*)_i(\Lambda)w_j(x) \in C(\bar{S})$$

достаточно потребовать $w_j \in C^{m-j}(\overline{S})$, а значит, для того чтобы $u^{(i-1)} \in C^{m-1}(\overline{S})$ достаточно $w_j \in C^{2m-j-1}(\overline{S})$, а это выполнено, например, если $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$ (см. [22, лемма 2.7]). Очевидно, что решение задачи Дирихле

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} |x|^{2i-2} u^{(i-1)}(x)$$

обладает такой же гладкостью $u \in C^{m-1}(\overline{S})$. Лемма доказана.

В [23] приводится решение задачи $\mathcal{N}_0$ в шаре при полиномиальных данных.

3. ЗАДАЧА $\mathcal{N}_k$

Рассмотрим теперь общую задачу $\mathcal{N}_k$ для однородного полигармонического уравнения. Ее можно переписать в виде

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S; \quad \Lambda^{[k]} u\big|_{\partial S} = \varphi_1(x), \ldots, \Lambda^{[m+k-1]} u\big|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S. \tag{5}$$

Из равенства $(\Lambda + 2m)\Delta^m u = \Delta^m \Lambda u$ следует, что если функция u m-гармоническая в S, то функция Λu тоже m-гармоническая в S. Рассмотрим m-гармоническую в S функцию $v = \Lambda^{[k]} u$. Относительно этой функции получим следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered}\Delta^m v = 0, \quad x \in S, \\ v\big|_{\partial S} = \varphi_1(x), \quad (\Lambda - k)v\big|_{\partial S} = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad (\Lambda - k)^{[m-1]} v\big|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S.\end{gathered} \tag{6}$$

Лемма 2. *Задача* (6) *эквивалентна задаче Дирихле*

$$\begin{gathered}\Delta^m v = 0, \quad x \in S, \\ v\big|_{\partial S} = \psi_1(x), \quad \Lambda^{[1]} v\big|_{\partial S} = \psi_2(x), \quad \ldots, \quad \Lambda^{[m-1]} v\big|_{\partial S} = \psi_m(x), \quad x \in \partial S,\end{gathered} \tag{7}$$

где функции $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *находятся из рекуррентных равенств*

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} (-k)^{[i-j]} \psi_j(x). \tag{8}$$

Если $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, *то* $\psi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$ *при* $i = 1, 2, \ldots, m$, *а значит*, $v^{(i)} \in C^{m-1}(\overline{S})$.

Доказательство. Пусть $v(x)$ – решение задачи (6). Рассмотрим i-е граничное условие этой задачи

$$(\Lambda - k)^{[i-1]} v\big|_{\partial S} = \varphi_i(x).$$

С помощью биномиальной теоремы о факториальных степенях (см. [21]) запишем

$$(\Lambda - k)^{[i-1]} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-k)^{[i-1-j]} \Lambda^{[j]}.$$

Если обозначить $\Lambda^{[j]} v\big|_{\partial S} = \psi_{j+1}(x)$ и использовать полученную формулу в i-м граничном условии, сдвигая при этом индекс суммирования $j \to j-1$, то найдем

$$\varphi_i(x) = (\Lambda - k)^{[i-1]} v\big|_{\partial S} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-k)^{[i-1-j]} \psi_{j+1}(x) =$$
$$= \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i-1}{j} (-k)^{[i-1-j]} \psi_{j+1}(x) + \psi_i(x) = \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} (-k)^{[i-j]} \psi_j(x) + \psi_i(x),$$

где $i = 1,2,\dots,m$. Видно, что $\psi_i(x)$ находится из уравнений (8) единственным образом и поэтому $v(x)$ – решение задачи (7). Верно и обратное утверждение, поскольку

$$\Lambda^{[i-1]} = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} k^{[i-1-j]} (\Lambda - k)^{[j]}.$$

Для завершения доказательства леммы вспомним гладкость гармонических компонент $v^{(i)}(x)$ функции $v(x)$ из леммы 1. Лемма доказана.

Задача Дирихле из леммы 2 безусловно разрешима и ее решение можно находить по лемме 1.

Исследуем уравнение $v = \Lambda^{[k]}u$ относительно неизвестной функции $u(x)$ в m-гармонических в S функциях. Достаточные условия разрешимости этого уравнения и будут достаточными условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$.

Лемма 3. *Пусть $v(x)$ – решение задачи* (6). *Уравнение $v(x) = \Lambda^{[k]}u(x)$ разрешимо в m-гармонических в S функциях тогда и только тогда, когда m-гармоническая в S функция $v(x)$ не имеет членов до $(k-1)$-го порядка малости включительно в своем разложении в окрестности нуля. Решение $u(x)$ единственно с точностью до m-гармонических многочленов степени $k-1$. Если $v \in C^{m-1}(\bar{S})$ и $u(x)$ существует, то $\Lambda^i u \in C^{m-1}(\bar{S})$ для любого $i = 0,1,\dots,k$.*

Доказательство. Достаточность. Разложим функцию $v(x)$ в ряд в окрестности начала координат $v(x) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(x)$, где $v_i(x)$ – однородные m-гармонические полиномы степени i и ряд сходится равномерно в некоторой окрестности нуля $U \subset S$. При выполнении условия леммы мы имеем $v(x) = \sum_{i=k}^{\infty} v_i(x)$. Рассмотрим функцию

$$u(x) = \int_0^1 v(tx) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{a_i t^{i+1}} dt,$$

где $a_i = (-1)^{k-i-1} i!(k-i-1)!$. Видно, что при $0 \le i \le k-1$

$$\begin{gathered}(\Lambda - i)\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \int_0^1 D_t v(tx)\frac{dt}{t^i} - i\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \left.\frac{v(tx)}{t^i}\right|_0^1 + i\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} - i\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \\ = v(x) - \lim_{t\to+0}\frac{v(tx)}{t^i} = v(x) - \lim_{t\to+0}\sum_{j=k}^{\infty} t^{j-i} v_j(x) = v(x).\end{gathered} \tag{9}$$

Выберем $\mu > 0$ такое, что $\mu S \in U$. Поскольку при $0 \le i < k$ интеграл

$$\int_0^{\mu} v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \int_0^{\mu} \sum_{j=k}^{\infty} v_j(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\mu^{j-i}}{j-i} v_j(x)$$

сходится, а других особенностей интеграл, задающий $u(x)$, не имеет, то функция $u(x)$ определена в S. Аналогичные рассуждения показывают, что функция $u(x)$ является также m-гармонической в S. Проверим выполнения уравнения $\Lambda^{[k]}u = v$ в S. Обозначим

$$\Lambda_i^{[k]} = \Lambda(\Lambda - 1)\dots(\Lambda - i + 1)(\Lambda - i - 1)\dots(\Lambda - k + 1).$$

В силу (9) будем иметь

$$\Lambda^{[k]}u(x) = \Lambda^{[k]}\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a_i}\Lambda_i^{[k]}(\Lambda - i)\int_0^1 v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a_i}\Lambda_i^{[k]}v(x) \equiv Q_{k-1}(\Lambda)v(x).$$

Очевидно, что $Q_{k-1}(\lambda)-1$ – действительный многочлен степени $k-1$. Он имеет k корней. Действительно, если $0\le j\le k-1$, то $\Lambda_i^{[k]}\Big|_{\Lambda=j}=a_i\delta_{i,j}$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронеккера и поэтому

$$Q_{k-1}(j)-1=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i\delta_{i,j}}{a_i}-1=0.$$

Это значит, что $Q_{k-1}(\Lambda)-1\equiv 0$ и поэтому $\Lambda^{[k]}u(x)=v(x)$ в S.

Исследуем гладкость функций $\Lambda^i u$. Заметим, что $\sum_{i=0}^{k-1}i^s/a_i=0$ при $s=0,1,\ldots,k-2$ и $\sum_{i=0}^{k-1}i^{k-1}/a_i=1$. В силу (9) можно записать

$$\Lambda u(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a_i}\int_0^1(\Lambda-i)v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}}+\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}}=v(x)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{a_i}+\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}}=\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{a_it^{i+1}}dt$$

и, аналогично, при $s=0,1,\ldots,k-1$

$$\Lambda^s u(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^{s-1}}{a_i}\int_0^1(\Lambda-i)v(tx)\frac{dt}{t^{i+1}}+\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^s}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}}=v(x)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^{s-1}}{a_i}+\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^s}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}}=\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^s}{a_it^{i+1}}dt.$$

Наконец,

$$\Lambda^k u(x)=v(x)+\int_0^1 v(tx)\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i^k}{a_i}\frac{dt}{t^{i+1}}.$$

Поэтому, если $v\in C^{m-1}(\bar S)$, то $\Lambda^i u\in C^{m-1}(\bar S)$ для любого $i=0,1,\ldots,k$.

Необходимость. Пусть $u(x)$ – решение уравнения $\Lambda^{[k]}u=v$ в m-гармонических в S функциях и $u(x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x)$ – разложение функции $u(x)$ в ряд в окрестности начала координат, $U\subset S$. Тогда из единственности разложения функции $u(x)$ в ряд и свойства $\Lambda^{[k]}u_i(x)=i^{[k]}u_i(x)=0$, где $i=0,1,\ldots,k-1$, получаем

$$\Lambda^{[k]}u(x)=\sum_{i=k}^{\infty}\Lambda^{[k]}u_i(x)=\sum_{i=k}^{\infty}v_i(x)=v(x),\qquad x\in U,$$

т.е. $v_i(x)=0$ при $i=0,1,\ldots,k-1$. Более того, однородные многочлены $u_i(x)$, $i\ge k$, находятся единственным образом из равенства $\Lambda^{[k]}u_i(x)\equiv i^{[k]}u_i(x)=v_i(x)$. Наконец, если $u(x)$ – решение уравнения $v(x)=\Lambda^{[k]}u(x)$, а $R_{k-1}(x)$ – некоторый полином степени $k-1$, то $u(x)+R_{k-1}(x)$ – тоже решение данного уравнения. Лемма доказана.

4. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ

Условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$, полученные в лемме 3, явным образом не связаны с граничными функциями задачи. Попытаемся из них получить достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$, похожие на необходимые условия разрешимости этой задачи из [11]. Необходимые условия разрешимости были получены на основании работы [24] и явным образом зависят от граничных функций задачи. Затем покажем, что найденные условия будут необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$.

Рассмотрим следующий целочисленный треугольник (см. [12]):

$$
\mathbb{P} = \begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & -1 & & 1 & & & \\
 & & 3 & & -3 & & 1 & & \\
 & -15 & & 15 & & -6 & & 1 & \\
105 & & -105 & & 45 & & -10 & & 1 \\
 & & & & & & & & \\
 & & \ldots & p_i^{(k)} = p_{i-1}^{(k-1)} + (i-2k+2)p_i^{(k-1)} & \ldots, & & & &
\end{array} \tag{10}
$$

где $p_i^{(k)}$ при $1 \le i \le k$, $k \in \mathbb{N}$, – элемент k-й строки треугольника $\mathbb{P}$, стоящий на i-м месте, и $p_1^{(1)} = 1$ – начальное условие, а $p_i^{(k)} = 0$ при $i > k$ и $0 \ge i$ – граничные условия для приведенного рекуррентного уравнения. Числа $p_i^{(k)}$ удовлетворяют равенству (см. [12])

$$
p_i^{(k)} = (-1)^{k-i}\binom{2k-i-1}{i-1}\frac{(2k-2i+1)!!}{2k-2i+1}. \tag{11}
$$

Треугольник $\mathbb{P}$ называется треугольником Неймана, поскольку он играет важную роль в исследовании задач типа Неймана $\mathcal{N}_k$. Теорема 1 из [11] при $k \le 2m$ имеет следующий вид.

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ такие, что решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ для однородного полигармонического уравнения* (1) *существует и оно такое, что $u \in C^{m+k-1}(\bar{S})$. Тогда при всяком $l \in \mathbb{N}_0$ таком, что $l < k$ должны быть выполнены следующие условия ортогональности*:

$$
\begin{gathered}
\int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-\lambda)}\varphi_{\delta_\lambda+1}(x) + \ldots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)}\varphi_{m-\sigma_\lambda}(x))ds_x = 0, \\
\lambda = \lambda_0, \ldots, \min\{k-l, m\} - 1, \\
\int_{\partial S} H_l(x)\varphi_i(x)ds_x = 0, \quad i = \max\{2m+l-k, 0\} + 1, \ldots, m,
\end{gathered} \tag{12}
$$

где $p_j^{(i)}$ – элементы треугольника $\mathbb{P}$, $\lambda_0 = [(k-l)/2]$, $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l,

$$
\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1, \quad \sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1. \tag{13}
$$

Число условий (12) *при $l < k \le 2m$ равно $N_k = [(k+1)/2][(k+2)/2]$.*

Замечание 1. Гладкость решения в теореме 1 можно ослабить, т.е. достаточно требовать $\Lambda^i u \in C(\bar{S})$ при $i = 0, 1, \ldots, m+k-1$. Поэтому, если $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, то из лемм 2 и 3 следует, что $\Lambda^i u \in C^{m-1}(\bar{S})$ при $i = 0, 1, \ldots, k$, а значит, $\Lambda^i u \in C(\bar{S})$ для $i = 0, 1, \ldots, m+k-1$. Следовательно, по теореме 1, при таких $\varphi_i(x)$ и $k \le m$ из существования $u(x)$ следуют условия (12), т.е. условия (12) – необходимые условия задачи $\mathcal{N}_k$.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ $\mathcal{N}_k$

Исследуем необходимые условия задачи $\mathcal{N}_k$ из теоремы 1, когда $k \le m$. В этом случае $2m + l - k + 1 \ge m + l + 1 > m$ и, значит, второй группы условий вида (12) не будет.

Рассмотрим случай, когда разность $(k - l)$ – четное число, где $l \in \mathbb{N}_0$ и $l < k$. Выясним, что означают условия (12) при $k \le m$ в терминах функции $v(x) = \Lambda^{[k]}u(x)$. В дальнейшем понадобится обобщенный символом Похгаммера $(a, b)_l = a(a+b)\cdots(a+(l-1)b)$.

Лемма 4. *Пусть* $v(x)$ *— решение задачи* (6) *и данные задачи* $\mathcal{N}_k$ *удовлетворяют условиям* (12) *при четном* $k-l$ *и* $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. *Тогда должны быть выполнены* $(k-l)/2$ *следующих равенств*:

$$\begin{gathered}\int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2} v\, ds_x = 0,\\ \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k + 2, -2)_{m-(k-l)/2+1} v\, ds_x = 0,\\ \ldots\\ \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - l - 2, -2)_{m-1} v\, ds_x = 0,\end{gathered} \tag{14}$$

где $H_l(x)$ *— произвольный однородный гармонический полином степени* l.

Доказательство. Пусть условия (12) выполнены при четном $k-l$. Тогда $\lambda_0 = (k-l)/2$, $\lambda = (k-l)/2, (k-l)/2+1, \ldots, k-l-1$, $\delta_\lambda = 1, 3, \ldots, k-l-1$, $\sigma_\lambda = (k-l)/2-1, (k-l)/2-2, \ldots, 0$ и число условий (12) равно $N_{m,k,l} = (k-l)/2$,

$$\begin{gathered}\int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-(k-l)/2)}\varphi_2(x) + \ldots + p_{m-(k-l)/2}^{(m-(k-l)/2)}\varphi_{m-(k-l)/2+1}(x))ds_x = 0,\\ \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-(k-l)/2-1)}\varphi_4(x) + \ldots + p_{m-(k-l)/2-1}^{(m-(k-l)/2-1)}\varphi_{m-(k-l)/2+2}(x))ds_x = 0,\\ \ldots\\ \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-k+l+1)}\varphi_{k-l}(x) + \ldots + p_{m-k+l+1}^{(m-k+l+1)}\varphi_m(x))ds_x = 0.\end{gathered}$$

В силу лемм 2 и 1 при $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, функция $v(x)$ обладает гладкостью $v \in C^{m-1}(\bar{S})$. С учетом равенств $\varphi_i = (\Lambda - k)^{[i-1]}v$ на ∂S, оставляя первое равенство неизменным, вынося общий множитель $\Lambda^{[2]}$ во втором равенстве и т.д. и $\Lambda^{[k-l-2]}$ — в последнем равенстве, получим

$$\begin{gathered}\int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-(k-l)/2)}(\Lambda - k) + \ldots + p_{m-(k-l)/2}^{(m-(k-l)/2)}(\Lambda - k)\ldots(\Lambda - m - (k-l)/2))v\, ds_x = 0,\\ \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-(k-l)/2-1)}(\Lambda - k - 2) + \ldots + p_{m-(k-l)/2-1}^{(m-(k-l)/2-1)}(\Lambda - k - 2)\ldots(\Lambda - m - (k-l)/2 - 1))(\Lambda - k)^{[2]} v\, ds_x = 0,\\ \ldots\\ \int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-k+l+1)}(\Lambda - 2k + l + 2) + \ldots + p_{m-k+l+1}^{(m-k+l+1)}(\Lambda - 2k + l + 2)\ldots(\Lambda - m - k + 2))(\Lambda - k)^{[k-l-2]} u\, ds_x = 0.\end{gathered}$$

Обозначим $w = (\Lambda - k)(\Lambda - k - 2)\ldots(\Lambda - 2m - l + 2)v = (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}v$. Тогда, согласно равенству $P_{[k]}(\lambda) = (\lambda, -2)_k$ (см. [11]), выражение под интегралом без множителя $H_l(x)$ в первом равенстве преобразуется к виду

$$(p_1^{(m-(k-l)/2)}(\Lambda - k)^{[1]} + \ldots + p_{m-(k-l)/2}^{(m-(k-l)/2)}(\Lambda - k)^{[m-(k-l)/2]})v = (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}v = w,$$

во втором равенстве — к виду

$$\begin{gathered}(p_1^{(m-(k-l)/2-1)}(\Lambda - k - 2)^{[1]} + \ldots + p_{m-(k-l)/2-1}^{(m-(k-l)/2-1)}(\Lambda - k - 2)^{[m-(k-l)/2-1]})(\Lambda - k)^{[2]}v =\\ = (\Lambda - k - 2, -2)_{m-(k-l)/2-1}(\Lambda - k)(\Lambda - k - 1)v = (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}(\Lambda - k - 1)v = (\Lambda - k - 1)w,\end{gathered}$$

и, наконец, в последнем $(k-l)/2$-м равенстве к виду

$$\begin{gathered}(p_1^{(m-k+l+1)}(\Lambda - 2k + l + 2)^{[1]} + \ldots + p_{m-k+l+1}^{(m-k+l+1)}(\Lambda - 2k + l + 2)^{[m-k+l+1]})(\Lambda - k)^{[k-l-2]}v =\\ = (\Lambda - 2k + l + 2, -2)_{m-k+l+1}(\Lambda - k, -1)_{k-l-2}v = ((\Lambda - k)(\Lambda - k - 1)\ldots(\Lambda - 2k + l + 3))\times\\ \times((\Lambda - 2k + l + 2)(\Lambda - 2k + l)\ldots(\Lambda - 2m - l + 2))v = ((\Lambda - k)(\Lambda - k - 2)\ldots\end{gathered}$$

$$\ldots(\Lambda - 2m - l + 2))((\Lambda - k - 1)(\Lambda - k - 3)\ldots(\Lambda - 2k + l + 3))v =$$
$$= (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}(\Lambda - k - 1, -2)_{(k-l)/2-1}v = (\Lambda - k - 1, -2)_{(k-l)/2-1}w.$$

Тогда полученные выше $(k - l)\ /\ 2$ равенств можно записать в виде

$$\int\limits_{\partial S} H_l(x)wds_x = 0, \quad \int\limits_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k - 1, -2)_1 wds_x = 0, \quad \ldots, \quad \int\limits_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k - 1, -2)_{(k-l)/2-1}wds_x = 0.$$

Из первого и второго равенств следует $\int_{\partial S} H_l(x)wds_x = \int_{\partial S} H_l(x)\Lambda wds_x = 0$. Затем из третьего равенства – $\int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k - 1, -2)_2 wds_x = 0$, и с учетом уже полученных следует $\int_{\partial S} H_l(x)\Lambda^2 wds_x = 0$. Продолжая этот процесс, мы будем получать равенства вида $\int_{\partial S} H_l(x)\Lambda^i wds_x = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, (k - l)/2 - 2$. С их учетом из $\int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k - 1, -2)_{(k-l)/2-1}wds_x = 0$ получим $\int_{\partial S} H_l(x)\Lambda^i wds_x = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, (k - l)/2 - 1$. Из найденных равенств, в свою очередь, аналогичным образом следует, что

$$\int\limits_{\partial S} H_l(x)wds_x = 0, \quad \int\limits_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k + 2, 2)_1 wds_x = 0, \quad \ldots, \quad \int\limits_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k + 2, 2)_{(k-l)/2-1}wds_x = 0. \quad (15)$$

Вспоминая обозначение $w = (\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}v$ и учитывая, что

$$(\Lambda - k + 2, 2)_i(\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2} =$$
$$= (\Lambda - k + 2i)\ldots(\Lambda - k + 2)(\Lambda - k)\ldots(\Lambda - 2m - l + 2) = (\Lambda - k + 2i, -2)_{m-(k-l)/2+i},$$

где $i = 0, 1, \ldots, (k - l)/2 - 1$, из (15) получим (14). Лемма доказана.

В дальнейшем исследовании необходима будет теорема 6 из [26].

Теорема 2. *Пусть $w(x)$ – гармоническая в S и непрерывная в $\overline{S}$ функция, тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{|\xi|=1} G_{(\nu)}(\xi)w(\xi)ds_\xi = g_\nu G_{(\nu)}(D)w(x)\big|_{x=0}, \quad (16)$$

где $\{G_{(\nu)}(x) : \nu \in \mathbb{N}_0^n, \nu_1 \geq \ldots \geq \nu_n, \nu_n = 0, 1\}$ – полная система гармонических полиномов (см. [27]), *а $g_\nu > 0$ – некоторая константа.*

Обозначим через $v_l(x)$ малые l-го порядка малости в разложении m-гармонической в S функции $v(x)$ в окрестности нуля.

Теорема 3. *Пусть данные задачи $\mathcal{N}_k$ удовлетворяют условиям* (12) *при четном $k - l$, имеют гладкость $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а m-гармоническая функция $v(x)$, являющаяся решением задачи* (6), *имеет следующее разложение Альманси*:

$$v(x) = v^{(0)}(x) + |x|^2 v^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2}v^{(m-1)}(x), \quad x \in S.$$

Тогда при четном $k - l$ верны равенства

$$v_l^{(0)}(x) = v_l^{(1)}(x) = \ldots = v_l^{((k-l)/2-1)}(x) = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Из лемм 2 и 1 следует, что при $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, гармонические компоненты функции $v(x)$ обладают гладкостью $v^{(i)} \in C^{m-1}(\overline{S})$, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, а значит, $v \in C^{m-1}(\overline{S})$. Кроме того, в силу леммы 4 верны равенства (14). Докажем, что в этом случае из равенств (14) вытекают условия (17).

Рассмотрим последнее равенство из (14). Применим к разложению Альманси функции $v(x)$ оператор $(\Lambda - l - 2, -2)_{m-1}$:

$$(\Lambda - l - 2, -2)_{m-1}v(x) = (\Lambda - l - 2, -2)_{m-1}v^{(0)}(x) + |x|^2(\Lambda - l, -2)_{m-1}v^{(1)}(x) + \ldots$$
$$+ |x|^{2m-2}(\Lambda + 2m - l - 4, -2)_{m-1}v^{(m-1)}(x),$$

и рассмотрим гармоническую в S функцию

$$h^{(0)}(x) = (\Lambda - l - 2, -2)_{m-1} v^{(0)}(x) + (\Lambda - l, -2)_{m-1} v^{(1)}(x) + \ldots + (\Lambda + 2m - l - 4, -2)_{m-1} v^{(m-1)}(x),$$

которая в силу гладкости $v^{(i)} \in C^{m-1}(\overline{S})$ и последнего равенства из (14) удовлетворяет условию

$$0 = \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - l - 2, 2)_{m-1} v\, ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) h^{(0)}(x)\, ds_x,$$

где $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l. Тогда из теоремы 2 следует, что $h_l^{(0)}(x) = 0$. В силу однородности оператора Λ и определения обобщенного символа Похгаммера запишем

$$0 = h_l^{(0)}(x) = (\Lambda - l - 2, -2)_{m-1} v_l^{(0)} + (\Lambda - l, -2)_{m-1} v_l^{(1)} + \ldots + (\Lambda + 2m - l - 4, -2)_{m-1} v_l^{(m-1)} =$$
$$= (-2, -2)_{m-1} v_l^{(0)} + (0, -2)_{m-1} v_l^{(1)} + \ldots + (2m - 4, -2)_{m-1} v_l^{(m-1)} = (-2, -2)_{m-1} v_l^{(0)}(x).$$

Поэтому $v_l^{(0)}(x) = 0$. Далее применим оператор $(\Lambda - l - 4, -2)_{m-2}$ к разложению Альманси функции $v(x)$:

$$(\Lambda - l - 4, -2)_{m-2} v(x) = (\Lambda - l - 4, -2)_{m-2} v^{(0)}(x) +$$
$$+ |x|^2 (\Lambda - l - 2, -2)_{m-2} v^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2} (\Lambda + 2m - l - 6, -2)_{m-2} v^{(m-2)}(x),$$

и рассмотрим гармоническую в S функцию

$$h^{(1)}(x) = (\Lambda - l - 4, -2)_{m-2} v^{(0)}(x) + (\Lambda - l - 2, -2)_{m-2} v^{(1)}(x) + \ldots + (\Lambda + 2m - l - 6, -2)_{m-2} v^{(m-1)}(x),$$

которая в силу гладкости $v^{(i)} \in C^{m-1}(\overline{S})$ и предпоследнего равенства из (14) удовлетворяет условию

$$0 = \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - l - 4, 2)_{m-2} v\, ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) h^{(1)}(x)\, ds_x$$

для произвольного однородного гармонического полинома $H_l(x)$. Тогда из теоремы 2 следует, что с учетом равенства $v_l^{(0)}(x) = 0$

$$0 = h_l^{(1)}(x) = (\Lambda - l - 4, -2)_{m-2} v_l^{(0)} + (\Lambda - l - 2, -2)_{m-2} v_l^{(1)} + \ldots + (\Lambda + 2m - l - 6, -2)_{m-2} v_l^{(m-1)} =$$
$$= (-2, -2)_{m-2} v_l^{(1)} + \ldots + (2m - 6, -2)_{m-2} v_l^{(m-1)} = (-2, -2)_{m-2} v_l^{(1)}(x).$$

Поэтому $v_l^{(1)}(x) = 0$. Продолжая этот процесс, будем иметь равенства $v_l^{(i)}(x) = 0$ при $i = 0, 1, \ldots, (k - l)/2 - 2$. Наконец, применим оператор $(\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2}$ к разложению Альманси функции $v(x)$:

$$(\Lambda - k, -2)_{m-(k-l)/2} v(x) = \sum_{i=0}^{m-1} |x|^{2i} (\Lambda - k + 2i, -2)_{m-(k-l)/2} v^{(i)}(x),$$

и рассмотрим гармоническую в S функцию

$$h^{((k-l)/2-1)}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} (\Lambda - k + 2i, -2)_{m-(k-l)/2} v^{(i)}(x),$$

которая в силу гладкости $v^{(i)} \in C^{m-1}(\overline{S})$ и первого равенства из (14) удовлетворяет равенству

$$0 = \int_{\partial S} H_l(x)(\Lambda - k, 2)_{m-(k-l)/2} v\, ds_x = \int_{\partial S} H_l(x) h^{((k-l)/2-1)}(x)\, ds_x.$$

Тогда по теореме 2, аналогично предыдущим случаям, с учетом равенств $v_l^{(i)}(x) = 0$, где $i = 0,1,\ldots,(k-l)/2-2$, имеем

$$0 = h_l^{((k-l)/2-1)} = \sum_{i=0}^{m-1}(l-k+2i,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{(i)} = \sum_{i=(k-l)/2-1}^{m-1}(2i+l-k,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{(i)} =$$
$$= (-2,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{((k-l)/2-1)} + (0,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{((k-l)/2)} + \ldots + (2m-2+l-k,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{(m-1)} =$$
$$= (-2,-2)_{m-(k-l)/2}v_l^{((k-l)/2-1)}(x).$$

Поэтому $v_l^{((k-l)/2-1)}(x) = 0$. Таким образом, при четных $k-l$ из равенств (14) вытекает, что $v_l^{(0)}(x) = v_l^{(1)}(x) = \ldots = v_l^{((k-l)/2-1)}(x) = 0$. Теорема доказана.

Случай нечетной разности $k-l$ при $l \in \mathbb{N}_0$ и $l < k$ доказывается аналогично. Поэтому, опуская соответствующие выкладки, сформулируем результат.

Теорема 4. *Пусть данные задачи* $\mathcal{N}_k$ *удовлетворяют условиям* (12) *при нечетном* $k-l$, *имеют гладкость* $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1,2,\ldots,m$, *а* m*-гармоническая функция* $v(x)$, *являющаяся решением задачи* (6), *имеет следующее разложение Альманси в* S:

$$v(x) = v^{(0)}(x) + |x|^2v^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2}v^{(m-1)}(x), \quad x \in S.$$

Тогда при нечетном $k-l$ *выполнены равенства*

$$v_l^{(0)} = v_l^{(1)} = \ldots = v_l^{[(k-l)/2]} = 0. \tag{18}$$

6. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Докажем, что необходимые условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$, полученные в теореме 1 при $k \le m$, являются также и достаточными условиями, если данные задачи обладают необходимой гладкостью. Таким образом, предположение 1 из [11] при $k \le m$ будет доказано.

Теорема 5. *Пусть* $k \le m$ *и* $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1,2,\ldots,m$, *тогда необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи* $\mathcal{N}_k$ *являются* $N_k = [(k+1)/2][(k+2)/2]$ *условий*

$$\int_{\partial S} H_l(x)(p_1^{(m-\lambda)}\varphi_{\delta_\lambda+1}(x) + \ldots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)}\varphi_{m-\sigma_\lambda}(x))ds_x = 0 \tag{19}$$

при $l = 0,1,\ldots,k-1$, $\lambda = [(k-l)/2],\ldots,k-l-1$, $\delta_\lambda = 2\lambda-k+l+1$, $\sigma_\lambda = k-l-\lambda-1$, *где* $H_l(x)$ — *произвольный однородный гармонический полином степени* l. *Решение задачи* $\mathcal{N}_k$ *существует и единственно с точностью до* m*-гармонических полиномов степени* $k-1$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $v(x)$ — решение задачи (6)

$$\Delta^m v = 0, \quad x \in S,$$
$$v\big|_{\partial S} = \varphi_1(x), \quad (\Lambda-k)v\big|_{\partial S} = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad (\Lambda-k)^{[m-1]}v\big|_{\partial S} = \varphi_m(x), \quad x \in \partial S.$$

По лемме 2 эта задача безусловно разрешима. По лемме 3 решение $u(x)$ задачи $\mathcal{N}_k$ может быть получено из уравнения $v(x) = \Lambda^{[k]}u(x)$, которое решается в m-гармонических в S функциях. Функцию $u(x)$ можно определить тогда и только тогда, когда m-гармоническая в S функция $v(x)$ не имеет членов до $(k-1)$-го порядка малости включительно в своем разложении в окрестности нуля. Функцию $v(x)$ представим в виде

$$v(x) = v^{(0)}(x) + |x|^2v^{(1)}(x) + \ldots + |x|^{2m-2}v^{(m-1)}(x), \quad x \in S,$$

и пусть гармонические компоненты $v(x)$ имеют следующее разложение в окрестности нуля:

$$v^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^{(i)}(x), \quad i = 0,1,\ldots,m-1.$$

Поскольку функции $\varphi_i(s)$ при $i = 1,2,\dots,m$ удовлетворяют условиям (12) при $k \le m$, то из теорем 3 и 4 вытекает, что для функции $v(x)$ верны равенства (17) и (18). Из них следует, что

$$v_l^{(0)} = \dots = v_l^{(k-l)/2-1} = 0, \quad k - l \in 2\mathbb{N}; \quad v_l^{(0)} = \dots = v_l^{[(k-l)/2]} = 0, \quad k - l \in 2\mathbb{N} - 1,$$

а значит, $v_l^{(i)} = 0$, если $i < (k-l)/2$, где $0 \le l \le k-1$. Отсюда $v_j^{(i)}(x) = 0$, если $2i + j < k$ и, следовательно, в разложении $v(x)$ в окрестности нуля:

$$v(x) = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{\infty}|x|^{2i}v^{(i)}(x),$$

все однородные полиномы $|x|^{2i}v_j^{(i)}(x)$, имеющие степени $\deg|x|^{2i}v_j^{(i)}(x) = 2i + j < k$, обращаются в нуль. Поэтому условия леммы 3 выполнены, а значит, решение задачи $\mathcal{N}_k$ существует и единственно с точностью до m-гармонических полиномов степени $k-1$. Достаточность условий (19) доказана.

Условия теоремы являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи $\mathcal{N}_k$, поскольку по замечанию 1 при $\varphi_i \in C^{2m-i-1+\varepsilon}(\partial S)$, $i = 1,2,\dots,m$, условия (12) являются также и необходимыми условиями для задачи $\mathcal{N}_k$. Теорема доказана.

Замечание 2. Условия (19) при $k = 1$ (в этом случае получается $N_1 = 1$ условий) совпадают с условием для задачи $\mathcal{N}_1$, полученным в [12], а при $k = 2$ (в этом случае получается $N_2 = 2$ условия) совпадают с условиями для задачи $\mathcal{N}_2$ из [13].

Пример. Найдем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи $\mathcal{N}_3$ для однородного 7-гармонического уравнения. В соответствии с теоремой 5 будем иметь $N_3 = 4$ условия вида (19). Если $l = 0$, то получаем $1 \le \lambda \le 2$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda - 1$, $m - \sigma_\lambda = 5 + \lambda$ и, значит,

$$\int_{\partial S}(p_1^{(6)}\varphi_1(x) + \dots + p_6^{(6)}\varphi_6(x))ds_x = 0, \quad \int_{\partial S}(p_1^{(5)}\varphi_3(x) + \dots + p_5^{(5)}\varphi_7(x))ds_x = 0.$$

При $l = 1$ получаем $\lambda = 1$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda$, $m - \sigma_\lambda = 6 + \lambda$, и поэтому

$$\int_{\partial S}H_1(x)(p_1^{(6)}\varphi_2(x) + \dots + p_6^{(6)}\varphi_7(x))ds_x = 0.$$

При $l = 2$ получаем $\lambda = 0$, $\delta_\lambda + 1 = 2\lambda + 1$, $m - \sigma_\lambda = 7 + \lambda$ и, следовательно,

$$\int_{\partial S}H_2(x)(p_1^{(7)}\varphi_1(x) + \dots + p_7^{(7)}\varphi_7(x))ds_x = 0,$$

где $H_l(x)$ – произвольный однородный гармонический полином степени l, а числа $p_i^{(k)}$ – элементы 5-й, 6-й и 7-й строк треугольника Неймана $\mathbb{P}$ из (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. *Бицадзе А.В.* О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
4. *Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G.* Polyharmonic boundary value problems. Positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains. Lecture Notes in Mathematics 1991. Berlin: Springer, 2010.
5. *Бицадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. ур-ния. 1988. Т. 24. № 5. С. 825–831.
6. *Бицадзе А.В.* К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 11–13.
7. *Карачик В.В.* Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 11. С. 1455–1461.
8. *Turmetov B.Kh., Ashurov R.R.* On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous polyharmonic equation in a ball // Boundary value problems. 2013. № 162. P. 1–15.

9. *Карачик В.В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сиб. матем. журнал. 1991. Т. 32. 5. С. 51–58.
10. *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимский матем. журнал. 2010. Т. 2. № 2. С. 41–52.
11. *Карачик В.В.* Класс задач типа Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 1. С. 132–150.
12. *Карачик В.В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 2. С. 228–238.
13. *Turmetov B.Kh., Ashurov R.R.* On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-homogeneous biharmonic equation in a ball // British J. Math. Comput. Sci. 2014. V. 4. P. 557–571.
14. *Карачик В.В.* Обобщенная третья краевая задача для бигармонического уравнения // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 6. С. 761–770.
15. *Karachik V.V., Sadybekov M.A., Torebek B.T.* Uniqueness of solutions to boundary-value problems for the biharmonic equation in a ball // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. V. 244. P. 1–9.
16. *Popivanov P.* Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball // AIP Conf. Proceed. 2019. V. 2159. P. 030028.
17. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Матем. труды. 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
18. *Карачик В.В.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
19. *Кошанов Б.Д., Солдатов А.П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения высокого порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 12. С. 1666–1681.
20. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщенной задачи Неймана // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.
21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
22. *Алимов Ш.А.* Об одной задаче с наклонной производной // Дифференц. ур-ния. 1981. Т. 17. № 10. С. 1738–1751.
23. *Карачик В.В.* Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 8. С. 1038–1047.
24. *Карачик В.В.* Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сиб. электронные матем. известия. 2017. Т. 14. С. 533–551.
25. *Карачик В.В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Матем. труды. 2013. Т. 16. № 2. С. 69–88.
26. *Карачик В.В.* О некоторых специальных полиномах и функциях // Сиб. электронные матем. известия. 2013. Т. 10. С. 205–226.
27. *Karachik V.V.* On some special polynomials // Proc. Am. Math. Soc. 2004. T. 132. № 4. P. 1049–1058.