ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 8, с. 1309–1335

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.957

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА И ОЦЕНКА ШАУДЕРА В ГЁЛЬДЕРОВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ 3 + 1-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БЕНДЖАМЕНА–БОНА–МАХОНИ–БЮРГЕРСА[1)]

© 2021 г. М. О. Корпусов[1,*], Д. К. Яблочкин[2,**]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: fhrapple@gmail.com

Поступила в редакцию 05.06.2020 г.
Переработанный вариант 05.06.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

В работе рассматривается задача Коши для широко известного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса в классе гёльдеровских начальных функций из $\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)$ при $\lambda \in (0, \alpha]$. В работе доказано, что для таких начальных функций существует единственное непродолжаемое во времени классическое решение задачи Коши в классе $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$ для любого $T \in (0,T_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае время T_0 – время разрушения решения. Для доказательства разрешимости задачи Коши проведено исследование объемного и поверхностного потенциалов, связанных с задачей Коши, в гёльдеровских пространствах. Наконец, в работе получена оценка Шаудера. Библ. 23.

Ключевые слова: теория потенциала, нелинейные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466921060053

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию в пространствах Гёльдера классических решений задачи Коши для многомерного уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса:

$$\begin{gathered}\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u = \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \quad u = u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Данная работа является непосредственным продолжение нашей работы [1], в которой была исследована задача Коши для уравнения, родственного уравнению ББМБ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u = \frac{\partial u^2}{\partial t}, \quad u = u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]. \tag{1.2}$$

Отличие уравнений (1.1) и (1.2) в нелинейностях

$$\frac{\partial u^2}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u^2}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Это серьезное отличие, поскольку нелинейность в уравнении (1.1) является “малой” нелинейной поправкой к линейной части уравнения (1.1), а нелинейность в уравнении (1.2) не является “малой” нелинейной поправкой к линейной части уравнения (1.4). В работе [1] была доказана локальная во времени разрешимость, а в настоящей работе мы доказали (см. теорему) существо-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100”.

вание единственного непродолжаемого во времени решения в $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ для любого $T \in (0,T_0)$, где либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в этом случае T_0 – время разрушения.

Мотивацией к проведенному в работе исследованию является (насколько нам известно) отсутствие исследований задачи Коши для уравнения ББМБ в классе глобально не интегрируемых начальных функций $u_0(x)$. В данной работе мы рассмотрели случай, когда $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$.

В результате исследования свойств объемного и поверхностного потенциалов была получена априорная оценка Шаудера следующего вида:

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(x,t)|_{2+\lambda} + \sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le$$
$$\le a(T)\left[\sup_{t\in[0,T]} |\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)|_\alpha + |\Delta u(x,0) - u(x,0)|_\alpha\right] \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1]. \tag{1.4}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) относятся к классу нелинейных уравнений типа С.Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г.А. Свиридюка были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа (см., например, [2]).

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С.Л. Соболева была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [3]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [4], [5], а также в работах их учеников (см. работу Ю.Д. Плетнера [6]).

Отметим, что одномерные и многомерные уравнения ББМБ исследовались в работах [7]–[16], в которых исследовались вопросы физической постановки, локальной и глобальной во времени разрешимости, и асимптотики при больших временах. Отметим также работы [17]–[19], в которых исследовался вопрос о возникновении blow-up для решений начально-краевых задач для одномерного и многомерного уравнения ББМБ.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

В работе мы будем пользоваться обозначениями из [20]. Символом $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем пространство непрерывных и ограниченных функций, норма которого имеет следующий вид:

$$|f|_0 := \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |f(x)|.$$

Символом $\mathbb{C}_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$ при $k \cup \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы обозначаем банахово пространство функций, у которых существуют, непрерывны и ограничены все частные производные по координатам $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и ограничена следующая норма:

$$|f|_k = \sum_{|\beta|\le k} \left|D^\beta f(x)\right|_0, \quad D_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \frac{\partial^{\beta_3}}{\partial x_3^{\beta_3}},$$
$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{Z}_+^3, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$$

Символом $\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$ мы обозначаем линейное подпространство функций из банахова пространства $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма

$$|f|_\alpha := |f|_0 + [f]_\alpha, \quad [f]_\alpha := \sup_{x\ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \alpha \in (0,1].$$

Символом $\mathbb{C}^{k+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мы обозначаем линейное пространство функций из банахова пространства $\mathbb{C}_b^{(k)}(\mathbb{R}^3)$, для которых конечна норма:

$$|f|_{k+\alpha} := |f|_k + \sum_{|\beta|=k} [D_x^\beta f(x)]_\alpha.$$

Кроме того, мы систематически будем использовать банаховы пространства абстрактных функций $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$ и $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — банахово пространство относительно нормы $|\cdot|_{\mathbb{B}}$. Линейное пространство $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}) \ni f(t)$ определяется следующими свойствами:

$$f(t):[0,T]\to\mathbb{B},\quad |f(t_2)-f(t_1)|_{\mathbb{B}}\to+0\quad\text{при}\quad |t_2-t_1|\to+0,\quad t_1,t_2\in[0,T].$$

Линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$ определяется как подпространство линейного пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$, что существует сильная производная

$$\frac{df}{dt}(t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B}),\quad \left|\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}-\frac{df}{dt}(t)\right|_{\mathbb{B}}\to+0\quad\text{при}\quad |\Delta t|\to+0.$$

Линейные пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$ и $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{B})$ являются банаховыми относительно соответствующих норм

$$\|f(t)\|_T:=\sup_{t\in[0,T]}|f(t)|_{\mathbb{B}},\quad \|f(t)\|_{1,T}:=\sup_{t\in[0,T]}|f(t)|_{\mathbb{B}}+\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{df}{dt}(t)\right|_{\mathbb{B}}.$$

Символом $\mathbb{C}^{(2+1)}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы обозначаем такие функции $f(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\beta f(x,t)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$$

для всех $k=0,1$ и $|\beta|\le 2$, причем все смешанные производные коммутируют.

3. ЗАДАЧА КОШИ И СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО И ПОВЕРХНОСТНОГО ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА

В работе мы будем рассматривать следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u-u)+\Delta u=\frac{\partial u^2}{\partial x_1},\quad u=u(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T],\tag{3.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^3.\tag{3.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (3.1), (3.2).

Определение 1. Функция $u(x,t)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$ при $\lambda\in(0,1\alpha]$, удовлетворяющая задаче Коши (3.1), (3.2) поточечно, где $u_0(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, называется *классическим* решением.

В работе [1] было построено фундаментальное решение в смысле (см. [21]) пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\mathcal{D}'_+$ следующего уравнения:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x,t)=\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\mathcal{E}(x,t)-\mathcal{E}(x,t))+\Delta\mathcal{E}(x,t)=\delta(x)\delta(t),\tag{3.3}$$

которое имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(x,t)=-\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\theta(t)e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right)+\\+\frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right)I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\mu|x|}\mu^2}{(\mu^2+1)^2}\exp\left(-\frac{\mu^2}{\mu^2+1}\tau\right)d\mu d\tau,\end{gathered}\tag{3.4}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Для этого фундаментального решения в работе [1] было найдено следующее важное для нас интегральное представление:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}(x,t)=-\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\theta(t)e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right)+\\+\frac{\theta(t)}{4\pi^2|x|}\int_0^t\exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right)I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int_{C_\varepsilon^+(i)}\frac{e^{iz|x|}z^2}{(z^2+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2}{z^2+1}\tau\right)dzd\tau,\end{gathered}\tag{3.5}$$

где $C_\varepsilon(i) := \{z \in \mathbb{C}^1 : |z - i| = \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0,1)$. Сделаем замену переменных в контурном интеграле в (3.5) $z = z(\phi) = i + \varepsilon \exp(i\phi)$ при $\phi \in [0, 2\pi]$ и получим следующее равенство:

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}\theta(t)e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right) +$$
$$+ i\varepsilon\frac{\theta(t)}{4\pi^2}\int\limits_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right)I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int\limits_0^{2\pi}\frac{\exp(-(1+\varepsilon\sin\phi)|x| + i\varepsilon\cos\phi|x|)}{|x|}\times \tag{3.6}$$
$$\times\frac{z^2(\phi)}{(z^2(\phi)+1)^2}\exp\left(-\frac{z^2(\phi)}{z^2(\phi)+1}\tau\right)e^{i\phi}d\phi d\tau := \mathscr{E}_1(x,t) + \mathscr{E}_2(x,t).$$

Из представления (3.4) вытекают следующие равенства:

$$\mathscr{E}(x,0) = -\frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} \quad \text{при} \quad x \neq 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x,0)}{\partial t} = \frac{e^{-|x|}}{8\pi|x|} + \frac{1}{4\pi^2|x|}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}e^{i\mu|x|}d\mu \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{3.8}$$

В силу леммы Жордана справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2}{(\mu^2+1)^2}e^{i\mu|x|}d\mu = 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{z^2}{(z^2+1)^2}e^{iz|x|}\right] = 2\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}e^{iz|x|}\right] = \frac{\pi}{2}e^{-|x|} - \frac{\pi}{2}|x|e^{-|x|}. \tag{3.9}$$

Из равенств (3.8) и (3.9) вытекает следующее равенство:

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x,0)}{\partial t} = \frac{e^{-|x|}}{4\pi|x|} - \frac{1}{8\pi}e^{-|x|} \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{3.10}$$

Кроме того, из интегрального представления (3.6) вытекает, что

$$\mathscr{E}(x,t) \in \mathbb{C}^{m+n}(\mathbb{R}^3\backslash\{0\} \otimes [0,T]) \quad \text{для любых} \quad m,n \in \mathbb{N}, \quad T > 0. \tag{3.11}$$

Кроме того, из (3.6) при $|x| \le \mu_0$ при $\mu_0 \in (0,1)$ вытекают следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^k\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k}\right| \le \frac{A_1(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|}, \tag{3.12}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+1}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_i}\right| \le \frac{A_2(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|^2}, \quad \left|\frac{\partial^{k+2}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_j\partial x_i}\right| \le \frac{A_3(T,\varepsilon,\mu_0)}{|x|^3}, \tag{3.13}$$

где $k = 0,1,2,\ i,j = 1,2,3$, равномерно по $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,1)$. С другой стороны, при $|x| \ge R_0$ при достаточно большом фиксированном $R_0 > 1$ из интегрального представления (3.5) получим следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^k\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k}\right| \le B_1(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|},$$
$$\left|\frac{\partial^{k+1}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_i}\right| \le B_2(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|}, \tag{3.14}$$
$$\left|\frac{\partial^{k+2}\mathscr{E}(x,t)}{\partial t^k\partial x_j\partial x_i}\right| \le B_3(T,\varepsilon,R_0)\frac{e^{-(1-\varepsilon)|x|}}{|x|},$$

где $k = 0,1,2,\ i,j = 1,2,3$, равномерно по $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Введем следующие поверхностный и объемный потенциалы, связанные с построенным фундаментальным решением:

$$V[\mu](x,t) := V(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\mu(y)dy, \tag{3.15}$$

$$U[\rho](x,t) := U(x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau. \tag{3.16}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Поверхностный потенциал* $V[\mu](x,t)$, *определенный равенством* (3.15), *действует следующим образом*:

$$V[\mu](x,t)\colon \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)) \quad \textit{при} \quad \lambda \in (0,\alpha), \quad \alpha \in (0,1]$$

для любых $T > 0$.

Доказательство. Пусть $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$.

Шаг 1. Представим потенциал $V(x,t)$ в виде следующей суммы:

$$V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t),$$

$$V_j(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}_j(x-y,t)\mu(y)dy \quad \text{при} \quad j = 1,2,$$

где функции $\mathscr{E}_j(x,t)$ определены равенствами (3.6). Докажем сначала, что $V(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$. Заметим, что для любой функции $\mu(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3) \supset \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ при $\alpha \in (0,1]$ имеем

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}_1(x-y,t)}{\partial t}\mu(y)dy$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ при любом $T > 0$. Кроме того,

$$\frac{\partial \mathscr{E}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{e^{-|x|}}{|x|}\phi'(t), \quad \phi(t) := -\frac{1}{4\pi}e^{-t/2}I_0\left(\frac{t}{2}\right) \in \mathbb{C}^{\infty}[0,+\infty).$$

Теперь нужно воспользоваться оценкой Шаудера (6.57) для потенциала (6.2) при $\gamma = 1$ и получить следующую оценку:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le B_1 \sup_{t\in[0,T]} |\phi'(t)||\mu|_{\alpha}. \tag{3.17}$$

Заметим, что для любой точки $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ справедливо равенство

$$V_1(x,t_2) - V_1(x,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t}dt \quad \text{при} \quad 0 \le t_1 \le t_2 \le T. \tag{3.18}$$

Из (3.18) с учетом (3.17) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$|V_1(x,t_2) - V_1(x,t_1)|_{2+\lambda} \le \int\limits_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} dt \le B_1 \sup_{t\in[0,T]} |\phi'(t)||\mu|_{\alpha}|t_2 - t_1|. \tag{3.19}$$

Нетрудно заметить, что в силу (6.57) справедлива оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} |V_1(x,t)|_{2+\lambda} \le B_1 \sup_{t\in[0,T]} |\phi(t)||\mu|_{\alpha}.$$

Стало быть, приходим к выводу о том, что $V_1(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Теперь докажем, что $V_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$. Заметим, что с учетом определения (3.6) функции $\mathscr{E}_2(x,t)$ потенциал $V_2(x,t)$ можно представить в следующем виде:

$$V_2(x,t) = \int_0^t \int_0^{2\pi} \psi(t,\tau,\phi) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma(\phi)|x-y|)}{|x-y|} \mu(y) dy d\phi d\tau, \tag{3.20}$$
$$\gamma(\phi) = \gamma_0(\phi) + i\gamma_1(\phi), \quad \gamma_0(\phi) = 1 + \varepsilon \sin\phi, \quad \gamma_1(\phi) = \varepsilon\cos\phi, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

$$\psi(t,\tau,\phi) = \frac{i\varepsilon}{4\pi^2} e^{i\phi} \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right) I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right) \times$$
$$\times \frac{z^2(\phi)}{(z^2(\phi)+1)^2} \exp\left(-\frac{z^2(\phi)}{z^2(\phi)+1}\tau\right) \in \mathbb{C}^\infty[0,T] \quad \text{для любого} \quad T > 0, \quad \phi \in [0,2\pi], \tag{3.21}$$

где $z(\phi) = i + \varepsilon e^{i\phi}$. Заметим, что

$$\gamma_0(\phi) = 1 + \varepsilon\sin\phi \geq 1 - \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad \phi \in [0,2\pi], \tag{3.22}$$

причем

$$|\gamma(\phi)| \leq 1 + \varepsilon < 2. \tag{3.23}$$

При этом для каждой точки $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ для любого $T > 0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t} = \int_0^{2\pi} \psi(t,t,\phi) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma(\phi)|x-y|)}{|x-y|} \mu(y) dy d\phi d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi(t,\tau,\phi)}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma(\phi)|x-y|)}{|x-y|} \mu(y) dy d\phi d\tau. \tag{3.24}$$

В силу оценки (3.22) и неравенства (3.23) приходим к выводу о том, что для потенциала

$$u(\mu)(x,\phi) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\exp(-\gamma(\phi)|x-y|)}{|x-y|} \mu(y) dy$$

справедлива оценка Шаудера (6.57). С учетом явного вида функции $\psi(t,\tau,\phi)$ для каждой точки $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 V_2(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \int_0^{2\pi} \psi(t,t,\phi) \frac{\partial u(\mu)(x,\phi)}{\partial x_j} d\phi d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi(t,\tau,\phi)}{\partial t} \frac{\partial u(\mu)(x,\phi)}{\partial x_j} d\phi d\tau,$$
$$\frac{\partial^3 V_2(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} = \int_0^{2\pi} \psi(t,t,\phi) \frac{\partial^2 u(\mu)(x,\phi)}{\partial x_i \partial x_j} d\phi d\tau + \int_0^t \int_0^{2\pi} \frac{\partial\psi(t,\tau,\phi)}{\partial t} \frac{\partial^2 u(\mu)(x,\phi)}{\partial x_i \partial x_j} d\phi d\tau. \tag{3.25}$$

Поэтому из (3.24), (3.25) и оценки Шаудера (6.57) мы получаем оценку следующего вида:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial V_2(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \leq B_2(T,\varepsilon)|\mu|_\alpha, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

где $B_2(T,\varepsilon) > 0$ – некоторая постоянная. Наконец, точно также, как при выводе оценки (3.19), приходим к следующим неравенствам:

$$|V_2(x,t_2) - V_2(x,t_1)|_{2+\lambda} \leq B_2(T,\varepsilon)|\mu|_\alpha |t_2 - t_1| \quad \text{для всех} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T,$$
$$\sup_{t\in[0,T]} |V_2(x,t)|_{2+\lambda} \leq B_2(T,\varepsilon)|\mu|_\alpha.$$

Следовательно, $V_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Таким образом, $V(x,t) = V_1(x,t) + V_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Докажем теперь, что

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{при} \quad k \geq 1.$$

С этой целью можно точно также, как на первом шаге, доказать, что

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2}\right|_{2+\lambda} \le B_2(T,\varepsilon,k)|\mu|_\alpha,$$

которое имеет место в силу явного вида функции $\psi(t,\tau,\phi)$, определенной формулой (3.21). Далее нужно воспользоваться рассуждениями на первом шаге при выводе оценки (3.19), а также интегральным представлением (3.20) и оценками Шаудера (6.57) и получить следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial V(x,t_2)}{\partial t} - \frac{\partial V(x,t_1)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le B_2(T,\varepsilon)|\mu|_\alpha |t_2 - t_1|, \tag{3.26}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le B_2(T,\varepsilon)|\mu|_\alpha. \tag{3.27}$$

В частности, имеет место следующая оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]}|V(x,t)|_{2+\lambda} \le d(T)|\mu|_\alpha, \tag{3.28}$$

где $d = d(T) > 0$ и является монотонно неубывающей, ограниченной на компактах функцией.

Шаг 3. Докажем, что для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]$ справедливы следующие формулы:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial x_i\partial t} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_i} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_i}, \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial x_i}. \tag{3.30}$$

Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial\partial x_j}\right||\mu(y)|dy + \int\limits_{O(x,\delta)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t}\right||\mu(y)|dy + \\ + \int\limits_{O(x,\delta)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_j}\right||\mu(y)|dy = \int\limits_{O(x,\delta)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial x_j\partial t}\right||\mu(y)|dy + \int\limits_{O(x,\delta)}\left|\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial x_j}\right||\mu(y)|dy,\end{gathered} \tag{3.31}$$

где мы воспользовались свойством (3.11). Осталось воспользоваться оценкой (3.13) и получить из (3.31) следующую оценку:

$$\left|\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right| \le 2|\mu|_0 A_2(T,\varepsilon,\mu_0)\int\limits_{O(x,\delta)}\frac{1}{|x-y|^2}dy = 2|\mu|_0 A_2(T,\varepsilon,\mu_0)4\pi\delta \to +0 \quad \text{при} \quad \delta\to+0.$$

Таким образом, первая группа равенств в (3.29) доказана. Отсюда сразу же вытекает, что

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial x_i\partial t} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_i} \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T].$$

Докажем следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_i} = \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_i} \quad \text{для всех} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T].$$

С учетом вывода формулы (6.42) можно доказать следующее равенство:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)}\frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t\partial y_i}\mu(y)dy + \\ + \int\limits_{O(x,\delta)}[\mu(y)-\mu(x)]\frac{\partial^3\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t\partial y_i}dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\delta)}\cos(n_y,e_i)\frac{\partial^2\mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t}dS_y,\end{gathered} \tag{3.32}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)} \frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial y_j\partial y_i}\mu(y)dy + \\ + \int\limits_{O(x,\delta)} [\mu(y)-\mu(x)]\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial y_j\partial y_i}dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\delta)} \cos(n_y,e_i)\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial y_j}dS_y.\end{gathered} \tag{3.33}$$

С учетом свойства (3.11) из (3.32), (3.33) справедливо следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_j\partial t\partial x_i} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial t\partial x_j\partial x_i}\right| \le \int\limits_{O(x,\delta)} |\mu(y)-\mu(x)|\left|\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial t\partial y_i}\right|dy +$$

$$+ \int\limits_{O(x,\delta)} |\mu(y)-\mu(x)|\left|\frac{\partial^3 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t\partial y_j\partial y_i}\right|dy \le 2A_3(T,\varepsilon,\mu_0)2[\mu]_\alpha \int\limits_{O(x,\delta)} \frac{1}{|y-x|^{3-\alpha}}dy =$$

$$= 2A_3(T,\varepsilon,\mu_0)2[\mu]_\alpha 4\pi\frac{\delta^\alpha}{\alpha} \to +0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Таким образом, все равенства (3.29) доказаны. Для доказательства (3.30) нужно воспользоваться следующими равенствами:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial x_i} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial y_i}\mu(y)dy + \\ + \int\limits_{O(x,\delta)} [\mu(y)-\mu(x)]\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j\partial y_i}dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\delta)} \cos(n_y,e_i)\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_j}dS_y,\end{gathered} \tag{3.34}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,\delta)} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}\mu(y)dy + \\ + \int\limits_{O(x,\delta)} [\mu(y)-\mu(x)]\frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i\partial y_j}dy + \mu(x)\int\limits_{\partial O(x,\delta)} \cos(n_y,e_j)\frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial y_i}dS_y\end{gathered} \tag{3.35}$$

и доказать непрерывность в каждой точке правых частей равенств (3.34) и (3.35). Тогда согласно известной теореме будет иметь место равенство (3.30).

Шаг 4. Теперь докажем, что сильная производная по времени функции $V(x,t)$ в смысле банахова пространства $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ существует и совпадает с частной производной по времени этой функции. Прежде всего заметим, что

$$\left|\frac{V(x,t+\Delta t)-V(x,t)}{\Delta t} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_0 = \left|\frac{\partial V(x,t_1^*)}{\partial t} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_0 \le$$

$$\le \sup_{s\in[t,t+\Delta t]}\left|\frac{\partial V(x,s)}{\partial s} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right|_0 \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0, \quad t_1^* = t_1^*(x) \in [t,t+\Delta t],$$

что справедливо в силу предельного свойства (3.26). Аналогичным образом из (3.26) и первого равенства из (3.29) вытекает следующее предельное свойство:

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\partial V(x,t+\Delta t)}{\partial x_j} - \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_j\partial t}\right|_0 = \left|\frac{\partial^2 V(x,t_2^*)}{\partial t\partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right|_0 \le$$

$$\le \sup_{s\in[t,t+\Delta t]}\left|\frac{\partial^2 V(x,s)}{\partial s\partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t\partial x_j}\right|_0 \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0, \quad t_2^* = t_2^*(x) \in [t,t+\Delta t].$$

Наконец, из (3.26) и второго набора равенств из (3.29) вытекает следующее предельное свойство:

$$\left|\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{\partial^2 V(x,t+\Delta t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right] - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t}\right|_\lambda = \left|\frac{\partial^3 V(x,t_3^*)}{\partial x_i \partial x_j \partial t} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t}\right|_\lambda \le$$

$$\le \sup_{s\in[t,t+\Delta t]}\left|\frac{\partial^3 V(x,s)}{\partial x_i \partial x_j \partial s} - \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x_i \partial x_j \partial t}\right|_\lambda \to +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \to +0, \quad t_3^* = t_3^*(x) \in [t, t+\Delta t].$$

Таким образом, утверждение доказано.

Следовательно,

$$V[\mu](x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{для всех} \quad T > 0.$$

Лемма доказана полностью.

Лемма доказана.

Объемный потенциал $U(x,t)$, определенный равенством (3.16), можно при помощи интегрального представления (3.6) для фундаментального решения $\mathscr{E}(x,t)$ представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(x,t) = &-\frac{1}{4\pi}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{2}\right) I_0\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp(-|x-y|)}{|x-y|}\rho(y,\tau)dyd\tau + \\ &+\frac{i\varepsilon}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^t \exp\left(-\frac{t-\sigma}{2}\right) I_0\left(\frac{t-\sigma}{2}\right)\int_0^\sigma \exp\left(-\frac{z^2(\phi)}{z^2(\phi)+1}(\sigma-\tau)\right)\times \\ &\times\frac{z^2(\phi)}{(z^2(\phi)+1)^2}e^{i\phi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp(-\gamma(\phi)|x-y|)}{|x-y|}\rho(y,\tau)dyd\tau d\sigma d\phi. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Наконец, справедлива

Лемма 2. *Объемный потенциал* $U[\rho](x,t)$, *определенный равенством* (3.16), *действует следующим образом*:

$$U[\rho](x,t)\colon \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)) \to \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)) \quad \textit{при} \quad \lambda \in (0,\alpha).$$

Доказательство. Пусть $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что для каждого $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,0)\rho(y,t)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\exp(-|x-y|)}{4\pi|x-y|}\rho(y,t)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau := U_1(x,t) + U_2(x,t), \end{aligned} \tag{3.37}$$

где мы воспользовались равенством (3.7). Поэтому в силу представления (3.36) и оценок Шаудера (6.57) мы приходим к следующей оценке:

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le \left(B_0 + B_1(T,\varepsilon)\right)\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_\alpha. \tag{3.38}$$

Отсюда мы приходим к неравенству

$$|U(x,t_2) - U(x,t_1)|_{2+\lambda} \le (B_0 + B_1(T,\varepsilon))\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_\alpha |t_2 - t_1| \tag{3.39}$$

для всех $0 \le t_1 \le t_2 \le T$. Несложно доказать следующую оценку:

$$\sup_{t\in[0,T]}|U(x,t)|_{2+\lambda} \le (B_0 + B_1(T,\varepsilon))\sup_{t\in[0,T]}|\rho(x,t)|_\alpha. \tag{3.40}$$

Из оценок (3.39) и (3.40) вытекает, что $U(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Теперь докажем, что $U(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$. Прежде всего заметим, что в силу оценки Шаудера (6.57) при $\gamma = 1$ и того, что $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$, вытекают оценки

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_1(x,t)|_{2+\lambda} \le B_1 \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha},$$

$$|U_1(x,t_2) - U_1(x,t_1)|_{2+\lambda} \le B_1 |\rho(x,t_2) - \rho(x,t_1)|_{\alpha},$$

из которых получаем, что функция $U_1(x,t)$, определенная равенством (3.37), принадлежит классу $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Теперь заметим, что в силу (3.10) получаем

$$\frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,0)}{\partial t} \rho(y,t)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y,\tau)dyd\tau = \tag{3.41}$$
$$= U_{21}(x,t) + U_{22}(x,t) + U_{23}(x,t),$$

$$U_{21}(x,t) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|} \rho(y,t)dy, \tag{3.42}$$

$$U_{22}(x,t) := -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|x-y|} \rho(y,t)dy, \tag{3.43}$$

$$U_{23}(x,t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial t^2} \rho(y,\tau)dyd\tau. \tag{3.44}$$

Поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то в силу оценки Шаудера (6.57) приходим к оценке для потенциала $U_{21}(x,t)$, определенного равенством (3.42):

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_{21}(x,t)|_{2+\lambda} \le \frac{1}{4\pi} B_1 \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}. \tag{3.45}$$

Для потенциала $U_{22}(x,t)$, определенного равенством (3.43), справедлива следующая оценка (см. Приложение):

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_{22}(x,t)|_{2+\lambda} \le B_3 \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_0 \le B_3 \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}.$$

Наконец, для потенциала $U_{23}(x,t)$, определенного равенством (3.44), справедлива следующая оценка:

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_{23}(x,t)|_{2+\lambda} \le B_4(T,\varepsilon) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}. \tag{3.46}$$

Таким образом, из (3.41) с учетом (3.45), (3.46) приходим к следующей оценке:

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \frac{\partial U_2(x,t)}{\partial t} \right|_{2+\lambda} \le B_5(T,\varepsilon) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}.$$

Отсюда, уже стандартным образом, приходим к следующей оценке:

$$|U_2(x,t_2) - U_2(x,t_1)|_{2+\lambda} \le B_5(T,\varepsilon) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha} |t_2 - t_1|$$

для всех $0 \le t_1 \le t_2 \le T$. Нетрудно доказать оценку

$$\sup_{t\in[0,T]} |U_2(x,t)|_{2+\lambda} \le B_1(T,\varepsilon) \sup_{t\in[0,T]} |\rho(x,t)|_{\alpha}.$$

Итак, $U_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$.

Таким образом, в силу (3.37) имеем

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 3. Осталось доказать коммутационные соотношения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x_j}, \quad \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_i \partial t} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_i} \tag{3.47}$$

для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$. С этой целью представим объемный потенциал в следующем виде:

$$U(x,t) = \int_0^t V(x,t,\tau)d\tau, \quad V(x,t,\tau) := \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy.$$

Пусть

$$V(x,t,t) := -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\rho(y,t)dy.$$

Прежде всего нам нужно доказать, что

$$\left|V(x,t,\tau) - V(x,t,t)\right|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad \tau \uparrow t \tag{3.48}$$

для любых $0 \le \tau \le t \le T$. Действительно, пусть $0 < \mu_0 < 1 < R_0 < +\infty$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{gathered} D_x V(x,t,\tau) - D_x V(x,t,t) = \\ = \int_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy - \int_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_x\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \\ + \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} D_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy - \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x,R_0)} D_x\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \\ + \int_{O(x,\mu_0)} D_x \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy - \int_{O(x,\mu_0)} D_x\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy := I_1 - I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \\ \text{при} \quad k = 0,1, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1,2,3. \end{gathered} \tag{3.49}$$

Справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered} \left|I_1 - I_2\right|_0 \le \left|\int_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy - \int_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy\right|_0 = \\ = \left|\int_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0)} D_y \mathscr{E}(y,t-\tau)\rho(x+y,\tau)dy - \int_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0)} D_y\left(-\frac{e^{-|y|}}{4\pi|y|}\right)\rho(x+y,t)dy\right|_0 \le \\ \le \left|\rho(x,\tau) - \rho(x,t)\right|_0 \int_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0)} \left|D_y \mathscr{E}(y,t-\tau)\right| dy + \left|\rho(z,t)\right|_0 \times \\ \times \int_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0)} \left|D_y \mathscr{E}(y,t-\tau) - D_y\left(-\frac{e^{-|y|}}{4\pi|y|}\right)\right| dy \to +0 \quad \text{при} \quad |t-\tau| \to +0, \end{gathered}$$

поскольку в силу (3.11) имеем

$$\left|\mathscr{E}(y,t) - \mathscr{E}(y,0)\right|_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0);m} \to +0 \quad \text{при} \quad t \to +0 \quad \text{для любого} \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\left|\rho(x,t) - \rho(x,\tau)\right|_\alpha \to +0 \quad \text{при} \quad |t-\tau| \to +0.$$

Кроме того, с учетом оценок (3.12)–(3.14) можно доказать, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие малое $\mu_0 \in (0,1)$ и большое $R_0 > 1$, что

$$\sup_{0\le\tau\le t\le T}\left|I_j\right|_0 < \frac{\delta}{5}, \quad j = 3,4,5,6. \tag{3.50}$$

Таким образом, из (3.49), (3.50) получаем, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что

$$|V(x,t,\tau) - V(x,t,t)|_1 < 5\frac{\delta}{5} \quad \text{при} \quad |t-\tau| < \eta,$$

т.е.

$$|V(x,t,\tau) - V(x,t,t)|_1 \to +0 \quad \text{при} \quad |t-\tau| \to +0. \tag{3.51}$$

В работе [1] было доказано следующее равенство:

$$D_x^2 V(x,t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy + \int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy +$$

$$+ \int\limits_{O(x,\mu_0)} [\rho(y,\tau) - \rho(x,\tau)] D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)dy + \rho(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,\mu_0)} \cos(n_y,e_i) \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j} dS_y, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Для $D_x^2 V(x,t,t)$ справедливо аналогичное равенство

$$D_x^2 V(x,t,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy + \int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy +$$

$$+ \int\limits_{O(x,\mu_0)} [\rho(y,t) - \rho(x,t)] D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dy + \rho(x,t) \int\limits_{\partial O(x,\mu_0)} \cos(n_y,e_i) \frac{\partial}{\partial y_j}\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) dS_y, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\left|D_x^2 V(x,t,\tau) - D_x^2 V(x,t,t)\right|_0 \le J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6,$$

$$J_1 := \left| \int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy - \int\limits_{O(x,R_0)\setminus O(x,\mu_0)} D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy \right|_0,$$

$$J_2 := \left| \rho(x,\tau) \int\limits_{\partial O(x,\mu_0)} \cos(n_y,e_i) \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t-\tau)}{\partial y_j} dS_y - \rho(x,t) \int\limits_{\partial O(x,\mu_0)} \cos(n_y,e_i) \frac{\partial}{\partial y_j}\left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right) dS_y \right|_0,$$

$$J_3 := \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau)dy \right|_0,$$

$$J_4 := \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,R_0)} D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)\rho(y,t)dy \right|_0,$$

$$J_5 := \left| \int\limits_{O(x,\mu_0)} [\rho(y,\tau) - \rho(x,\tau)] D_y^2 \mathscr{E}(x-y,t-\tau)dy \right|_0,$$

$$J_6 := \left| \int\limits_{O(x,\mu_0)} [\rho(y,t) - \rho(x,t)] D_y^2 \left(-\frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)dy \right|_0.$$

Аналогичным образом, как было доказано предельное свойство (3.51), можно доказать следующее предельное свойство:

$$\left|D_x^2 V(x,t,\tau) - D_x^2 V(x,t,t)\right|_0 \to +0 \quad \text{при} \quad |t-\tau| \to +0, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i},$$

поскольку $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3))$.

Докажем сначала первое равенство из формулы (3.47). Справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = V(x,t,t) + \int_0^t \frac{\partial V(x,t,\tau)}{\partial t} d\tau, \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial V(x,t,t)}{\partial x_j} + \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t} d\tau, \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_j} = \int_0^t \frac{\partial V(x,t)}{\partial x_j} d\tau, \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t \partial x_j} = \frac{\partial V(x,t,t)}{\partial x_j} + \int_0^t \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j} d\tau, \tag{3.53}$$

где мы воспользовались предельным свойством (3.48). Точно также, как на шаге 3 леммы 1, можно доказать, что

$$\frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t} = \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j} \quad \text{при} \quad (x,\tau,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes \{0 \le \tau \le t \le T\}.$$

Поэтому из (3.52) и (3.53) получаем первое равенство из (3.47). Отсюда сразу же получаем следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial x_i \partial t} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T].$$

Докажем следующее равенство:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} = \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_i} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]. \tag{3.54}$$

Действительно, в силу предельного свойства (3.48) справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} = \frac{\partial^2 V(x,t,t)}{\partial x_j \partial x_i} + \int_0^t \frac{\partial^3 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} d\tau, \quad \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V(x,t,t)}{\partial x_j \partial x_i} + \int_0^t \frac{\partial^3 V(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_i} d\tau. \tag{3.55}$$

Точно также, как на шаге 3 леммы 1, можно доказать, что

$$\frac{\partial^3 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial t \partial x_i} = \frac{\partial^3 V(x,t,\tau)}{\partial t \partial x_j \partial x_i} \quad \text{при} \quad (x,\tau,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes \{0 \le \tau \le t \le T\}, \tag{3.56}$$

а также точно также, как при доказательстве (3.30), можно доказать равенство

$$\frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 V(x,t,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{при} \quad (x,\tau,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes \{0 \le \tau \le t \le T\}.$$

Таким образом, из (3.55), (3.56) приходим к равенству (3.54).

Точно также, как на шаге 4 леммы 1, с учетом коммутационных соотношений (3.47) можно доказать, что сильная производная по времени функции $U(x,t)$ в смысле пространства Банаха $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3))$ существует и совпадает с частной производной по времени от функции $U(x,t)$. Следовательно,

$$U(x,t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda}(\mathbb{R}^3)).$$

Лемма доказана полностью.

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение относительно свойств поверхностного $V(x,t)$ и объемного потенциалов $U(x,t)$.

Лемма 3. *Пусть* $\mu(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$, $u_0(x) \in \mathbb{C}_b^{(2)}(\mathbb{R}^3)$ *и* $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ *при* $\alpha \in (0,1]$. *Тогда*

$$V(x,0) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} \mu(y) dy, \quad U(x,0) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|} \big(\Delta u_0(y) - u_0(y)\big) dy = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[V](x,t) = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,+\infty),$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[U](x,t) = \rho(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T].$$

Доказательство. Результаты леммы доказаны в работе [1] (см. леммы 1, 4 и 7).

Лемма доказана.

4. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ШАУДЕРА

Дадим определение класса функций.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(x,t) \in S$, если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{(2+1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ и найдется такое $\varepsilon \in (0,1)$, что при $|x| > 1$ справедливы неравенства

$$\left|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)\right| \le a_1(T)\exp(\varepsilon|x|),$$

$$|u(x,t)| \le a_2(T)\exp(\varepsilon|x|),$$

$$\left|\frac{\partial^{k+1}u(x,t)}{\partial x_j \partial t^k}\right| \le a_3(T)\exp(\varepsilon|x|),$$

$$|\Delta u(x,0) - u(x,0)| \le a_4\exp(\varepsilon|x|),$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)), \quad \Delta u(x,0) - u(x,0) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3) \quad \text{при} \quad \alpha \in (0,1].$$

В работе [1] была доказана следующая

Теорема 1. *Если $u(x,t)$ принадлежит классу S, то справедлива следующая третья формула Грина*:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y,\tau)\,dy\,d\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\big(\Delta u(y,0) - u(y,0)\big)\,dy, \tag{4.1}$$

где функция $\mathscr{E}(x,t)$ определена формулой (3.4), *а оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством* (3.3).

Справедлива следующая основная теорема работы.

Теорема 2. *Для произвольной функции $u(x,t)$ класса S справедлива следующая априорная оценка Шаудера*:

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(x,t)|_{2+\lambda} + \sup_{t\in[0,T]} \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{2+\lambda} \le a_1(T)\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)\right|_{\alpha} + |\Delta u(x,0) - u(x,0)|_{\alpha}\right],$$

где $a = a(T) > 0$ — монотонно неубывающая функция, ограниченная на компактах.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из представления (4.1), а также из оценок (3.27), (3.28), (3.38), (3.40) и лемм 1 и 2.

Теорема доказана.

5. РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Лемма 4. *Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, тогда для следующей функции справедливо*

$$\rho(x,t) = \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x_1} \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Доказательство. Представим функцию $\rho(x,t)$ в следующем виде:

$$\rho(x,t) = \frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x_1} = 2u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}. \tag{5.1}$$

Покажем сначала, что каждый сомножитель в (5.1) принадлежит $\mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$ (двойка, очевидно, не рассматривается).

Шаг 1. Справедлива следующая цепочка вложений:

$$\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3),$$

откуда получаем, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ для каждого фиксированного $t \in [0,T]$. Для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ рассмотрим следующее выражение:

$$|u(x,t_1) - u(x,t_2)|_{\alpha} \le 2|u(x,t_1) - u(x,t_2)|_{1+\alpha} \to 0$$

при $|t_1 - t_2| \to 0$, поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$. Таким образом, получаем, что $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Шаг 2. Так как $u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, то

$$|u(x,t)|_{1+\alpha} = |u(x,t)|_1 + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right]_{\alpha} < +\infty,$$

для каждого фиксированного $t \in [0,T]$. Следовательно,

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} = \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}\right|_{0} + \left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}\right]_{\alpha} < +\infty,$$

т.е. $\partial_{x_1} u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ для каждого фиксированного $t \in [0,T]$. Так же, как и на шаге 1, осталось рассмотреть для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ следующее выражение:

$$\left|\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le \left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|_{1\to 2} |u(x,t_1) - u(x,t_2)|_{1+\alpha}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим отдельно норму оператора взятия частной производной $\partial_{x_1} : \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|_{1\to 2} = \sup_{|\varphi|_{1+\alpha}=1}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|_{\alpha}. \tag{5.3}$$

Норма в пространстве $\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ имеет вид

$$|\varphi|_{1+\alpha} = |\varphi|_0 + \sum_{i=1}^{3}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right|_{\alpha}, \tag{5.4}$$

отсюда получаем следующее неравенство:

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le |\varphi|_{1+\alpha}. \tag{5.5}$$

Следовательно, из (5.3), (5.4), (5.5) получаем, что

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|_{1\to 2} \le 1,$$

т.е. оператор $\partial_{x_1} : \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$ ограничен. Тогда правая часть выражения (5.2) стремится к нулю при $|t_1 - t_2| \to 0$. Таким образом, окончательно получаем, что $\partial_{x_1} u(x,t) \in \mathbb{C}([0,T],\mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству утверждения леммы.

Шаг 3. Пусть функции $f(x), g(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3)$, тогда справедливо неравенство:

$$|fg|_{\alpha} \le |f|_{\alpha}|g|_{\alpha}. \tag{5.6}$$

Применим это неравенство к функции $\rho(x,t)$ для каждого фиксированного $t \in [0,T]$:

$$|\rho(x,t)|_{\alpha} = \left|\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} = 2\left|u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le 2|u(x,t)|_{\alpha}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} < +\infty,$$

поскольку, как было показано выше, функции $u(x,t), \partial_{x_1}u(x,t) \in \mathbb{C}\left([0,T], \mathbb{C}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$. Рассмотрим для любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ следующее выражение:

$$\left|\rho(x,t_1) - \rho(x,t_2)\right|_{\alpha} = \left|\frac{\partial u^2(x,t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u^2(x,t_2)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} =$$
$$= 2\left|u(x,t_1)\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial x_1} - u(x,t_2)\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1} + u(x,t_1)\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1} - u(x,t_1)\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le$$
$$\le 2\left\{\left|u(x,t_1)\right|_{\alpha}\left|\frac{\partial u(x,t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} + \left|\frac{\partial u(x,t_2)}{\partial x_1}\right|_{\alpha}\left|u(x,t_1) - u(x,t_2)\right|_{\alpha}\right\} \to 0,$$

где мы воспользовались неравенством (5.6) и результатами шага 1 и шага 2. В итоге получаем, что $\rho(x,t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{C}^{\alpha}(\mathbb{R}^3))$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть функции* $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$. *Тогда для каждого фиксированного* $t \in [0,T]$ *справедлива следующая оценка*:

$$\left|\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)\right|_{\alpha} = \left|\frac{\partial u_1^2(x,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2^2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le 4\max\{\left|u_1(x,t)\right|_{1+\alpha}, \left|u_2(x,t)\right|_{1+\alpha}\}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{1+\alpha}. \tag{5.7}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}\left|\rho_1(x,t) - \rho_2(x,t)\right|_{\alpha} = \left|\frac{\partial u_1^2(x,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2^2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} = \\ = 2\left|u_1(x,t)\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x_1} - u_2(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1} + u_1(x,t)\frac{u_2(\partial x,t)}{\partial x_1} - u_1(x,t)\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le \\ \le 2\left\{\left|u_1(x,t)\right|_{\alpha}\left|\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} + \left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{\alpha}\right\} = 2A_1 + 2A_2.\end{gathered} \tag{5.8}$$

Рассмотрим A_1:

$$\begin{gathered}A_1 = \left|u_1(x,t)\right|_{\alpha}\left|\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x_1} - \frac{u_2(\partial x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha} \le \left|u_1(x,t)\right|_{\alpha}\left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|_{1\to 2}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{1+\alpha} \le \\ \le \left|u_1(x,t)\right|_{\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{1+\alpha} \le 2\left|u_1(x,t)\right|_{1+\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{1+\alpha}.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Рассмотрим A_2:

$$\begin{gathered}A_2 = \left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{\alpha} \le \left\|\frac{\partial}{\partial x_1}\right\|_{1\to 2}\left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{1+\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{\alpha} \le \\ \le \left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{1+\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{\alpha} \le 2\left|\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x_1}\right|_{1+\alpha}\left|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right|_{1+\alpha}.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Таким образом, из (5.8), (5.9), (5.10) получаем искомую оценку. Лемма доказана полностью.

Лемма доказана.

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$u(x,t) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t-\tau)\frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial y_1}dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3}\mathscr{E}(x-y,t)\left(\Delta u_0(y) - u_0(y)\right)dy, \tag{5.11}$$

где $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,T]$ и $u_0(x) = u(x,0)$. Наша задача – доказать однозначную разрешимость уравнения (5.11) в банаховом пространстве $\mathbb{C}([0,T], \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$ относительно следующей нормы:

$$\left\|v\right\|_T = \sup_{t\in[0,T]}\left|v(x,t)\right|_{1+\alpha}.$$

Справедлива

Теорема 3. *Для любой* $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *найдется такое* $T_0 = T_0(u_0) > 0$, *что для любого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (5.11) *в классе* $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$, *причем либо* $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$ *и в этом случае справедливо следующее предельное свойство*:

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty.$$

Доказательство. Шаг 1. Перепишем интегральное уравнение (5.11) в следующем операторном виде:

$$u(x,t) = A[u](x,t), \tag{5.12}$$

где

$$A[u](x,t) = f(x,t) + W[u](x,t),$$

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\left(\Delta u_0(y) - u_0(y)\right) dy,$$

$$W[u](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau, \quad \rho(y,\tau) = \frac{\partial u^2(y,\tau)}{\partial y_1}.$$

Заметим, что в силу результатов лемм 1–5 приходим к выводу о том, что

$$W[u](x,t)\colon \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)) \to \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)),$$

$$f(x,t) \in \mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)).$$

Шаг 2. В выражении для объемного потенциала $W[u](x,t)$ сделаем замену переменных $z = y - x$ и получим следующее равенство:

$$W[u](x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\rho(y,\tau) dy d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(z,t-\tau) \frac{\partial u^2(x+z,\tau)}{\partial z_1} dz d\tau.$$

Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}([0,T], \mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3))$. Введем обозначения:

$$\rho_1(x,t) = \frac{\partial u_1^2(x,t)}{\partial x_1}, \quad \rho_2(x,t) = \frac{\partial u_2^2(x,t)}{\partial x_1}.$$

Рассмотрим следующее выражение, опуская для краткости значения аргументов функций там, где это не приводит к противоречиям:

$$|W[u_1] - W[u_2]|_{1+\alpha} = |W[u_1] - W[u_2]|_0 + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial W[u_1]}{\partial x_i} - \frac{\partial W[u_2]}{\partial x_i} \right|_\alpha = I_0 + \sum_{i=1}^3 I_i. \tag{5.13}$$

Оценим каждое слагаемое в (5.13).

Шаг 3. Начнем со слагаемого I_0:

$$\begin{aligned} I_0 &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(z,t-\tau)\left(\rho_1(x+z,\tau) - \rho_2(x+z,\tau)\right) dz d\tau \right| \leq \\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathscr{E}(z,t-\tau)| |\rho_1(x+z,\tau) - \rho_2(x+z,\tau)| dz d\tau \leq \\ &\leq |\rho_1 - \rho_2|_0 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathscr{E}(z,t-\tau)| dz d\tau \leq |\rho_1 - \rho_2|_\alpha \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\mathscr{E}(z,t-\tau)| dz d\tau. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Рассмотрим отдельно следующий интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\mathscr{E}(z,t-\tau)\right| dz = \int\limits_{O(0,\mu_0)} \left|\mathscr{E}(z,t-\tau)\right| dz + \int\limits_{O(0,R_0)\setminus O(0,\mu_0)} \left|\mathscr{E}(z,t-\tau)\right| dz + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_0)} \left|\mathscr{E}(z,t-\tau)\right| dz := K_1 + K_2 + K_3,$$

где $\mu_0 \in (0,1)$ достаточно мало и $R_0 > 1$ – достаточно велико. Рассмотрим K_1, воспользовавшись оценкой для фундаментального решения при $|z| \le \mu_0$ и $\varepsilon \in (0,1)$:

$$K_1 \le \int\limits_{O(0,\mu_0)} \frac{A_1(T,\varepsilon,\mu_0)}{|z|} dz \le 4\pi A_1(T,\varepsilon,\mu_0) \int\limits_0^{\mu_0} \frac{1}{r} r^2 dr = 2\pi A_1(T,\varepsilon,\mu_0)\mu_0^2 < +\infty. \tag{5.15}$$

Рассмотрим K_3, воспользовавшись оценкой для фундаментального решения при $|z| \ge R_0$ и $\varepsilon \in (0,1)$:

$$K_3 \le \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(0,R_0)} B_1(T,\varepsilon,R_0) \frac{e^{-(1-\varepsilon)|z|}}{|z|} dz \le 4\pi B_1(T,\varepsilon,R_0) \int\limits_{R_0}^{+\infty} \frac{e^{-(1-\varepsilon)r}}{r} r^2 dr = \\ = 4\pi B_1(T,\varepsilon,R_0) \frac{e^{-(1-\varepsilon)R_0}}{1-\varepsilon} \left(R_0 + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) < +\infty. \tag{5.16}$$

В силу свойств фундаментального решения интеграл $K_2 < +\infty$, тогда с учетом (5.15) и (5.16) получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|\mathscr{E}(z,t-\tau)\right| dz \le D_0(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) < +\infty. \tag{5.17}$$

С учетом (5.17) и оценки (5.7) леммы 5 из (5.14) получаем оценки:

$$I_0 \le tD_0(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)|\rho_1 - \rho_2|_\alpha \le tD_0(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) 4 \max\{|u_1|_{1+\alpha}, |u_2|_{1+\alpha}\} |u_1 - u_2|_{1+\alpha}. \tag{5.18}$$

Шаг 4. Рассмотрим теперь слагаемые I_i при $i = 1,2,3$:

$$I_i = \left| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(z,t-\tau)}{\partial x_i} (\rho_1(x+z,\tau) - \rho_2(x+z,\tau)) \, dz d\tau \right|_\alpha \le \\ \le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathscr{E}(z,t-\tau)}{\partial z_i} (\rho_1(x+z,\tau) - \rho_2(x+z,\tau)) \right|_\alpha dz d\tau \le \\ \le \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathscr{E}(z,t-\tau)}{\partial z_i} \right| |\rho_1(x+z,\tau) - \rho_2(x+z,\tau)|_\alpha dz d\tau \le \\ \le 4 \max\{|u_1|_{1+\alpha}, |u_2|_{1+\alpha}\} |u_1 - u_2|_{1+\alpha} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathscr{E}(\partial z, t-\tau)}{z_i} \right| dz d\tau, \tag{5.19}$$

где мы воспользовались оценкой (5.7). Так же, как и на шаге 3, с помощью оценок для производных фундаментального решения можно показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial \mathscr{E}(z,t-\tau)}{\partial z_i} \right| dz \le D_i(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) < +\infty. \tag{5.20}$$

Таким образом, из (5.19), (5.20) вытекает следующая оценка для $I_i, i = 1,2,3$:

$$I_i \le tD_i(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) 4 \max\{|u_1|_{1+\alpha}, |u_2|_{1+\alpha}\} |u_1 - u_2|_{1+\alpha}. \tag{5.21}$$

В итоге из (5.13), (5.18), (5.21) получаем следующую оценку:

$$|W[u_1] - W[u_2]|_{1+\alpha} \le tD_{\max}(T,\varepsilon,\mu_0,R_0) 4 \max\{|u_1|_{1+\alpha}, |u_2|_{1+\alpha}\} |u_1 - u_2|_{1+\alpha}, \tag{5.22}$$

где $D_{\max}(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)=\max_{i=0,1,2,3}\{D_i(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)\}$. Наконец возьмем supremum по $t\in[0,T]$ от обеих частей неравенства (5.22), тогда получим следующее выражение:

$$\|W[u_1]-W[u_2]\|_T=\|A[u_1]-A[u_2]\|_T\leq TD_{\max}(T,\varepsilon,\mu_0,R_0)4\max\{\|u_1\|_T,\|u_2\|_T\}\|u_1-u_2\|_T. \tag{5.23}$$

Шаг 5. Пусть

$$u(x,t)\in D_{R,T}:=\{u(x,t)\in\mathbb{C}([0,T];\mathbb{C}^{1+\alpha}(\mathbb{R}^3)):\|u\|_T\leq R\},\quad R>0.$$

Выберем $R>0$ настолько большим, чтобы

$$\|f\|_T\leq\frac{R}{2}. \tag{5.24}$$

Тогда из оценки (5.23) при $u_1=u$ и $u_2=0$ мы получим следующие неравенства:

$$\|W\|_T\leq TD_{\max}4\|u\|_T^2\leq TD_{\max}4R^2\leq\frac{R}{2} \tag{5.25}$$

при

$$TD_{\max}R\leq\frac{1}{8}. \tag{5.26}$$

Таким образом, из (5.24), (5.25) и уравнения (5.12) приходим к выводу о том, что

$$A[u](x,t):\ D_{R,T}\to D_{R,T},$$

а из оценки (5.23) вытекает, что при условии (5.26) оператор A является сжимающим на $D_{R,T}$. По теореме о сжимающих отображениях при достаточно малом $T>0$ существует единственное решение интегрального уравнения (5.11). Осталось воспользоваться стандартным алгоритмом продолжения решений интегральных уравнений в банаховых пространствах абстрактных банахово-значных функций из $\mathbb{C}([0,T];\mathbb{B})$ во времени и получить утверждение теоремы (см., например, работу [22]).

Теорема доказана.

Из лемм 1–5, теоремы 3 вытекает основное утверждение работы.

Теорема 4. *Для любой функции* $u_0(x)\in\mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$ *при* $\alpha\in(0,1]$ *найдется такое максимальное* $T_0=T_0(u_0)>0$, *что для любого* $T\in(0,T_0)$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (3.1), (3.2) *в смысле определения в классе* $\mathbb{C}^{(1)}([0,T];\mathbb{C}^{2+\lambda,\ \lambda\in(0,\alpha)}(\mathbb{R}^3))$, *причем либо* $T_0=+\infty$, *либо* $T_0<+\infty$ *и в этом случае справедливо предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0}\|u\|_T=+\infty,\quad \|u\|_T:=\sup_{t\in[0,T]}|u(x,t)|_{1+\alpha}.$$

Доказательство. Единственность классического решения задачи Коши в смысле определения 1 вытекает из полученной в работе [1] третьей формулы Грина.

Теорема доказана.

6. ОЦЕНКИ ШАУДЕРА ОДНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В данном разделе мы используем технику работы [23].

Пусть $x',x''\in\mathbb{R}^3$ – фиксированные точки, $\rho\in(0,1]$, $R>2$ и

$$\rho=|x''-x'|,\quad x_0=\frac{x''+x'}{2}\Rightarrow|x_0-x''|=|x_0-x'|=\frac{\rho}{2}.$$

Введем в рассмотрение следующую срезающую функцию:

$$\psi(x):=\begin{cases}1, & \text{если}\quad |x-x_0|\leq R,\\ 0, & \text{если}\quad |x-x_0|\geq 2R,\end{cases}\qquad \psi(x)\in\mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Заметим, что

$$\operatorname{supp}\left\{\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\right\} \subset \overline{O(x_0, 2R)}\backslash O(x_0, R). \tag{6.1}$$

Пусть $\gamma = \gamma_0 + i\gamma_1$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_1 \in \mathbb{R}^1$,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} f(y)dy, \quad f(x) \in \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \quad \alpha \in (0,1]. \tag{6.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} dy, \quad i = 1, 2, 3.$$

Справедливо следующее равенство при $x \neq y$:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} = e^{-\gamma|x-y|} \left\{ \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} + \gamma \frac{x_j - y_j}{|x-y|^2} \right\}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим следующую разность:

$$\frac{\partial^2 u(x')}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u(x'')}{\partial x_j \partial x_i} := K_1(x', x'') + K_2(x', x''), \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered} K_1(x', x'') := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \left[e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right] dy, \\ K_2(x', x'') := \gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f(y)}{\partial y_i} \left[e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^2} - e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^2} \right] dy. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Сначала рассмотрим функцию $K_2(x', x'')$. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(e^{-\gamma|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^2} \right) = \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} \left[\gamma \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} - \frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + 2 \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} \frac{1}{|x-y|} \right]. \tag{6.5}$$

Тогда интегрируя по частям в выражении (6.4) и делая замены переменных $x' - y = z$, мы получаем следующее равенство:

$$K_2(x', x'') = \int_{\mathbb{R}^3} \left[f(x'' - z) - f(x' - z) \right] h(z) dz, \tag{6.6}$$

где

$$h(z) := \gamma \frac{e^{-\gamma|z|}}{|z|} \left[\gamma \frac{z_i z_j}{|z|^2} - \frac{\delta_{ij}}{|z|} + 2 \frac{z_i z_j}{|z|^3} \right].$$

Функция $h(z)$ имеет интегрируемую особенность в точке $z = 0$. Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$|h(z)| \le |\gamma| \frac{e^{-\gamma_0|z|}}{|z|} \left[|\gamma| + \frac{3}{|z|} \right] \in L^1(\mathbb{R}^3).$$

Отсюда и из (6.6) получаем следующую оценку:

$$|K_2(x', x'')| \le |x'' - x'|^\alpha [f]_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} |h(z)| dz = c_1 \rho^\alpha [f]_\alpha. \tag{6.7}$$

Теперь приступим к анализу функции $K_1(x',x'')$. Представим функцию $K_1(x',x'')$ в виде следующей суммы:

$$K_1(x',x'') = K_{11}(x',x'') + K_{12}(x',x''), \tag{6.8}$$

$$\begin{gathered} K_{11}(x',x'') := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial\left(f(y) - f(x'')\psi(y)\right)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - \frac{\partial\left(f(y) - f(x')\psi(y)\right)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right] dy, \\ K_{12}(x',x'') := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[f(x'') \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - f(x') \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right] dy. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Отметим, что имеет место выражение (6.1). Поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered} \left|K_{12}(x',x'')\right| \le \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)} \left| f(x'') \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - f(x') \frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i} e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right| dy \le \\ \le \left|f(x'') - f(x')\right| \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)} \left|\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i}\right| \frac{e^{-\gamma|x''-y|}}{|x''-y|^2} dy + \\ + \left|f(x')\right| \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)} \left|\frac{\partial\psi(y)}{\partial y_i}\right| \left| e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right| dy, \end{gathered} \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-\gamma|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} \right) = -\gamma \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|^2} \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} - \frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|^3} \left[3 \frac{x_i - y_i}{|x-y|} \frac{x_j - y_j}{|x-y|} - \delta_{ij} \right]. \tag{6.11}$$

Поскольку $x', x'' \in O(x_0,\rho) \subset O(x_0,R)$ и $\rho \le 1 < 2 \le R$, то имеет место следующая оценка при $y \in O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)$:

$$e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} = \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-\gamma|x_s-y|} \frac{x_{sj} - y_j}{|x_s-y|^3} \right) ds = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_{si}}\left(e^{-\gamma|x_s-y|} \frac{x_{sj} - y_j}{|x_s-y|^3} \right) [x''_i - x'_i] ds, \tag{6.12}$$

где $x_s = sx'' + (1-s)x'$. Из (6.11) вытекает следующая оценка:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_{si}}\left(e^{-\gamma|x_s-y|} \frac{x_{sj} - y_j}{|x_s-y|^3} \right) \right| \le |\gamma| \frac{e^{-\gamma_0|x_s-y|}}{|x_s-y|^2} + 4 \frac{e^{-\gamma_0|x_s-y|}}{|x_s-y|^3}. \tag{6.13}$$

При $y \in O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)$ справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|x_s - y| \ge |y - x_0| - |x_s - x_0| \ge |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \ge |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0|. \tag{6.14}$$

Поэтому из (6.13) и (6.14) вытекает искомая оценка

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_{si}}\left(e^{-\gamma|x_s-y|} \frac{x_{sj} - y_j}{|x_s-y|^3} \right) \right| \le 4|\gamma| \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2}|y-x_0|}}{|y-x_0|^2} + 32 \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2}|y-x_0|}}{|y-x_0|^3} \tag{6.15}$$

при $y \in O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)$. Теперь из (6.12) и (6.15) вытекает следующая оценка:

$$\left| e^{-\gamma|x''-y|} \frac{x''_j - y_j}{|x''-y|^3} - e^{-\gamma|x'-y|} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^3} \right| \le \left[4|\gamma| \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2}|y-x_0|}}{|y-x_0|^2} + 32 \frac{e^{-\frac{\gamma_0}{2}|y-x_0|}}{|y-x_0|^3} \right] |x'' - x'|. \tag{6.16}$$

Из (6.16) и (6.10) вытекает следующая оценка:

$$|K_{12}(x',x'')| \le c_3(R)\left([f]_\alpha \rho^\alpha + |f|_0\, \rho \right). \tag{6.17}$$

Теперь рассмотрим функцию $K_{11}(x', x'')$. С этой целью заметим, что справедливо следующее равенство:

$$F(x,y) := \frac{\partial}{\partial y_i}\left(e^{-\gamma|x-y|}\frac{x_j - y_j}{|x-y|^3}\right) = \gamma\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|^2}\frac{x_i - y_i}{|x-y|}\frac{x_j - y_j}{|x-y|} + \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|^3}\left[3\frac{x_i - y_i}{|x-y|}\frac{x_j - y_j}{|x-y|} - \delta_{ij}\right]. \tag{6.18}$$

Тогда, интегрируя по частям в выражении (6.9), мы получим следующее равенство:

$$K_{11}(x', x'') := -\int_{\mathbb{R}^3}\big(f(y) - f(x'')\psi(y)\big)F(x'', y)dy + \int_{\mathbb{R}^3}\big(f(y) - f(x')\psi(y)\big)F(x', y)dy.$$

Разобьем функцию на три части следующим образом:

$$K_{11}(x', x'') =: K_{111}(x'') + K_{112}(x') + K_{113}(x', x''), \tag{6.19}$$

$$K_{111}(x'') = -\int_{O(x_0, 2\rho)}\big(f(y) - f(x'')\psi(y)\big)F(x'', y)dy,$$

$$K_{112}(x') = \int_{O(x_0, 2\rho)}\big(f(y) - f(x')\psi(y)\big)F(x', y)dy,$$

$$K_{113}(x', x'') := \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0, 2\rho)}[\big(f(y) - f(x')\psi(y)\big)F(x', y) - \big(f(y) - f(x'')\psi(y)\big)F(x'', y)]dy. \tag{6.20}$$

Для функций $K_{111}(x'')$ и $K_{112}(x')$ единообразным образом могут быть получены необходимые нам оценки. Рассмотрим, например, функцию $K_{112}(x')$. Справедлива следующая оценка:

$$|K_{112}(x')| \le \int_{O(x_0, 2\rho)}\big|f(y) - f(x')\big|\frac{e^{-\gamma_0|x'-y|}}{|x'-y|^3}\big[|\gamma||x' - y| + 4\big]dy. \tag{6.21}$$

Поскольку $x' \in \overline{O(x_0, \rho/2)}$, то при $y \in O(x_0, 2\rho)$ справедливы следующие оценки сверху:

$$|x' - y| \le |x' - x_0| + |y - x_0| < \frac{\rho}{2} + 2\rho = \frac{5}{2}\rho.$$

Отсюда и из (6.21) вытекает следующая оценка:

$$\begin{gathered}|K_{112}(x')| \le \int_{O(x', 5\rho/2)}\big|f(y) - f(x')\big|\frac{e^{-\gamma_0|x'-y|}}{|x'-y|^3}\big[|\gamma||x' - y| + 4\big]dy \le 4[f]_\alpha\int_{O(x', 5\rho/2)}\frac{e^{-\gamma_0|x'-y|}}{|x'-y|^{3-\alpha}}dy + \\ + 2|f|_0|\gamma|\int_{O(x', 5\rho/2)}\frac{e^{-\gamma_0|x'-y|}}{|x'-y|^2}dy \le 4[f]_\alpha\int_{O(x', 5\rho/2)}\frac{1}{|x'-y|^{3-\alpha}}dy + 2|f|_0|\gamma|\int_{O(x', 5\rho/2)}\frac{1}{|x'-y|^2}dy = \\ = 16\pi\frac{(5/2)^\alpha}{\alpha}[f]_\alpha\rho^\alpha + 20\pi|\gamma||f|_0\rho.\end{gathered} \tag{6.22}$$

Также имеет место следующая оценка:

$$|K_{111}(x'')| \le 16\pi\frac{(5/2)^\alpha}{\alpha}[f]_\alpha\rho^\alpha + 20\pi|\gamma||f|_0\rho. \tag{6.23}$$

Теперь рассмотрим функцию $K_{113}(x', x'')$. Введем следующую функцию:

$$G(x', x'', y) := F(x', y) - F(x'', y), \tag{6.24}$$

где функция $F(x, y)$ определена равенством (6.18). С учетом определения (6.24) функции $G(x', x'', y)$ выражение (6.20) для функции $K_{113}(x', x'')$ можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}K_{113}(x', x'') = \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0, 2\rho)}\big[f(y) - f(x')\psi(y)\big]G(x', x'', y)dy + \\ + \int_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0, 2\rho)}\big[f(x') - f(x'')\big]F(x', x'', y)\psi(y)dy := K_{1131}(x', x'') + K_{1132}(x', x'').\end{gathered} \tag{6.25}$$

При $y \in O(x_0, R) \setminus O(x_0, 2\rho)$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$G(x', x'', y) = \int_0^1 \frac{\partial F(sx' + (1-s)x'', y)}{\partial s} ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial F(z, y)}{\partial z_j}[x'_j - x''_j] ds, \quad z_j = sx'_j + (1-s)x''_j. \tag{6.26}$$

Отметим, что из явного вида (6.18) функции $F(x, y)$ вытекает, что справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial F(z, y)}{\partial z_j}\right| \leq \begin{cases} c_4(R, |\gamma|)\dfrac{e^{-\gamma_0|z-y|}}{|z-y|^4}, & \text{если} \quad y \in O(x_0, R) \\ c_5(R, |\gamma|)\dfrac{e^{-\gamma_0|z-y|}}{|z-y|^2}, & \text{если} \quad y \in \mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, R), \end{cases} \tag{6.27}$$

где $z = sx' + (1-s)x''$, $s \in [0,1]$. Отметим, что при $y \in O(x_0, R) \setminus O(x_0, 2\rho)$ имеет место следующая оценка снизу:

$$|x_s - y| \geq |y - x_0| - |x_s - x_0| \geq |y - x_0| - \frac{\rho}{2} \geq |y - x_0| - \frac{1}{4}|y - x_0| = \frac{3}{4}|y - x_0|, \tag{6.28}$$

где $x_s = sx' + (1-s)x''$ при $s \in [0,1]$. Поэтому в силу (6.28) из (6.27) имеет место следующая оценка:

$$\sup_{s\in[0,1]}\left|\frac{\partial F(x_s, y)}{\partial z_j}\right| \leq c_4(R, |\gamma|)\left(\frac{4}{3}\right)^4 \frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^4} \tag{6.29}$$

при $y \in O(x_0, R)$, $y \neq x_0$ и

$$\sup_{s\in[0,1]}\left|\frac{\partial F(x_s, y)}{\partial z_j}\right| \leq c_5(R, |\gamma|)\left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^2}$$

при $y \in \mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, R)$. Таким образом, из (6.26) и (6.29) вытекает следующая оценка:

$$\left|G(x', x'', y)\right| \leq c_6(R, |\gamma|)\frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^4}|x'' - x'| \tag{6.30}$$

при $y \in O(x_0, R)$, $y \neq x_0$ и

$$\left|G(x', x'', y)\right| \leq c_7(R, |\gamma|)\frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^2}|x'' - x'| \tag{6.31}$$

при $y \in \mathbb{R}^3 \setminus O(x_0, R)$. С учетом оценки (6.30) справедлива следующая цепочка оценок для функции $K_{1132}(x', x'')$:

$$\begin{aligned} \left|K_{1132}(x', x'')\right| \leq & \int\limits_{O(x_0,R)\setminus O(x_0,2\rho)} \left|f(x') - f(x'')\right|\left|\psi(y)\right|\left|F(x', x'', y)\right| dy + \\ & + \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)} \left|f(x') - f(x'')\right|\left|\psi(y)\right|\left|F(x', x'', y)\right| dy \leq \\ & \leq c_8(R, |\gamma|)[f]_\alpha \rho^\alpha \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,2\rho)} \frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^3} dy + \\ & + 2|f|_0\, c_7(R, |\gamma|)\rho \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,R)} \frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y - x_0|\right)}{|y - x_0|^2} \leq \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\leq c_8(R,|\gamma|)[f]_\alpha \rho^\alpha \int\limits_{O(x_0,2R)\setminus O(x_0,2\rho)} \frac{1}{|y-x_0|^3}dy + c_9(R,|\gamma|)|f|_0\,\rho =$$
$$= c_8(R,|\gamma|)\rho^\alpha[1+|\ln|x''-x'||].$$

Теперь рассмотрим функцию $K_{1131}(x',x'')$, определенную равенством (6.25). Эту функцию можно записать в следующем виде:

$$K_{1131}(x',x'') = K_{11311}(x',x'') + K_{11312}(x',x''),$$
$$K_{11311}(x',x'') = \int\limits_{O(x_0,R)\setminus O(x_0,2\rho)} [f(y) - f(x')\psi(y)]G(x',x'',y)dy, \tag{6.33}$$
$$K_{11312}(x',x'') = \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,R)} [f(y) - f(x')\psi(y)]G(x',x'',y)dy.$$

Получим оценку сверху для функции $K_{11311}(x',x'')$. Если $|y-x_0|\geq 2\rho$, то справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{gathered}|f(y)-f(x')| \leq [f]_\alpha|y-x'|^\alpha \leq [f]_\alpha\big[|y-x_0|+|x_0-x'|\big]^\alpha = \\ = [f]_\alpha\left[|y-x_0|+\frac{\rho}{2}\right]^\alpha \leq [f]_\alpha\left[|y-x_0|+\frac{1}{4}|y-x_0|\right]^\alpha = \left(\frac{5}{4}\right)^\alpha[f]_\alpha|y-x_0|^\alpha.\end{gathered} \tag{6.34}$$

Из (6.34) приходим к следующей оценке:

$$\begin{gathered}|K_{11311}(x',x'')| \leq \left(\frac{5}{4}\right)^\alpha[f]_\alpha c_6(R,|\gamma|)\rho \int\limits_{O(x_0,R)\setminus O(x_0,2\rho)} \frac{\exp\left(-\frac{3\gamma_0}{4}|y-x_0|\right)}{|y-x_0|^{4-\alpha}}dy \leq \\ \leq c_{11}(R,|\gamma|)[f]_\alpha\rho\int\limits_{2\rho}^{R}\frac{1}{r^{2-\alpha}}dr = c_{11}(R,|\gamma|)[f]_\alpha\rho\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(2\rho)^{1-\alpha}}-\frac{1}{R^{1-\alpha}}\right] \leq c_{12}(R,|\gamma|)[f]_\alpha\rho^\alpha.\end{gathered} \tag{6.35}$$

Теперь получим оценку для функции $K_{11312}(x',x'')$. С учетом (6.31) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|K_{11312}(x',x')| \leq 2|f|_0\,c_7(R,|\gamma|)\rho \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus O(x_0,R)} \frac{\exp\left(-\frac{3}{4}|y-x_0|\right)}{|y-x_0|^2}dy = c_{13}(R,|\gamma|)|f|_0\,\rho. \tag{6.36}$$

Таким образом, с одной стороны, из (6.3), (6.7), (6.8), (6.17), (6.19), (6.22), (6.23), (6.32), (6.33), (6.35) и (6.36) вытекает следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial^2 u(x'')}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 u(x')}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leq A_1(|\gamma|)\left([f]_\alpha\rho^{\alpha[1+|\ln\rho|]} + |f|_0\,\rho\right), \quad \rho = |x''-x'| \leq 1, \tag{6.37}$$

где постоянная $A_1 = A_1(|\gamma|)$ ограничена при ограниченных $|\gamma|$.

С другой стороны, при $\rho = |x''-x'| > 1$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2 u(x'')}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2 u(x')}{\partial x_i\partial x_j}\right| \leq 2\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_0 \leq 2\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_0\rho^\alpha. \tag{6.38}$$

Теперь наша задача получить оценку для

$$\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_0.$$

Справедлива следующая цепочка равенств при $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_i} = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}dy = -\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}dy - \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}dy =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\frac{\partial f(y)}{\partial y_i}dy - \int\limits_{O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\frac{\partial [f(y)-f(x)]}{\partial y_i}dy := J_1(x) + J_2(x). \tag{6.39}$$

Интегрируя по частям в интегралах J_1 и J_2, мы получаем следующие равенства:

$$J_1 = \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} f(y)\cos(n_y, e_i)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y + \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\varepsilon)} f(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y, \tag{6.40}$$

$$J_2 = -\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} [f(y)-f(x)]\cos(n_y, e_i)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y + \int\limits_{O(x,\varepsilon)} [f(y)-f(x)]\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y, \tag{6.41}$$

где во всех формулах n_y — это внешняя нормаль по отношению к шару $O(x,\varepsilon)$. Заметим, что из (6.40) и (6.41) вытекает следующее равенство:

$$J_1 + J_2 = f(x)\int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \cos(n_y, e_i)\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y + \int\limits_{\mathbb{R}^3 \setminus O(x,\varepsilon)} f(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y +$$
$$+ \int\limits_{O(x,\varepsilon)} [f(y)-f(x)]\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)dS_y := J_3(x) + J_4(x) + J_5(x). \tag{6.42}$$

Отметим, что при $x \neq y$ справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|}\right)\right| \le \begin{cases} b_1(\varepsilon, |\gamma|)\dfrac{e^{-\gamma_0|x-y|}}{|x-y|}, & \text{если} \quad |x-y| \ge \varepsilon, \\ b_2(\varepsilon, |\gamma|)\dfrac{1}{|y-x|^3}, & \text{при} \quad |x-y| < \varepsilon. \end{cases} \tag{6.43}$$

Для функции $J_3(x)$ справедлива следующая оценка:

$$|J_3(x)| \le |f|_0\left[\frac{|\gamma|}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\right]4\pi\varepsilon^2 \le b_3(\varepsilon, |\gamma|)|f|_0.$$

С учетом оценки (6.43) для функций $J_4(x)$ и $J_5(x)$ справедливы следующие оценки:

$$|J_4(x)| \le |f|_0\, 4\pi b_1(\varepsilon, |\gamma|)\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} re^{-\gamma_0 r}dr = b_4(\varepsilon, |\gamma|)|f|_0,$$
$$|J_5(x)| \le [f]_\alpha b_2(\varepsilon, |\gamma|)4\pi\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{1}{r^{1-\alpha}}dr = b_5(\varepsilon, \alpha, |\gamma|)[f]_\alpha. \tag{6.44}$$

Таким образом, из (6.39)–(6.44) вытекает существование такой постоянной $A_2 > 0$, что справедлива следующая оценка:

$$\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 \le A_2(|\gamma|)\left([f]_\alpha + |f|_0\right). \tag{6.45}$$

Следовательно, из (6.37), (6.38) и (6.45) вытекает существование такой постоянной $A_3 > 0$, что справедлива следующая оценка:

$$\left[\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{\lambda,\ \lambda \in (0,\alpha)} \le A_3(|\gamma|)\left(|f|_0 + [f]_\alpha\right). \tag{6.46}$$

А из (6.45) и (6.46) получаем искомую оценку

$$\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\lambda,\ \lambda\in(0,\alpha)} \le A_4(|\gamma|)\left|f\right|_\alpha, \quad i,j = 1,2,3. \tag{6.47}$$

Совершенно понятно, что имеют место следующие оценки:

$$|u|_0 \le A_5(|\gamma|)\left|f\right|_0, \quad \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right| \le A_6(|\gamma|)\left|f\right|_0, \quad j = 1,2,3. \tag{6.48}$$

Таким образом, из (6.46) и (6.48) получаем следующую оценку типа Шаудера:

$$|u|_{2+\lambda} \le B_1(|\gamma|)\left|f\right|_\alpha, \tag{6.49}$$

причем постоянная $B_1 = B_1(|\gamma|) > 0$ и ограничена при ограниченных $|\gamma|$, где, напомним, что

$$|u|_{2+\alpha} := |u|_0 + \sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_0 + \sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right|_\alpha,$$

$$\left|v\right|_\alpha = |v|_0 + [v]_\alpha.$$

Оценка (6.49) получена нами при $f(x)\in \mathbb{C}_b^{(1)}(\mathbb{R}^3)\in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$. Теперь наша задача – доказать справедливость оценки Шаудера (6.49) для функций $f(x)\in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$. С этой целью рассмотрим сглаживание произвольной фиксированной функции $f(x)\in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3)$:

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^3}\omega_\varepsilon(|x-y|)f(y)dy,$$

где

$$\omega_\varepsilon(|x|) = \frac{1}{\varepsilon^3}\omega\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$

$\omega(|x|)$ – функция "шапочка". Совершенно понятно, что $f_\varepsilon(x)\in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R}^3)$ для любого фиксированного $\varepsilon > 0$. Нетрудно доказать следующую оценку:

$$\left|f_\varepsilon\right|_\alpha \le \left|f\right|_\alpha. \tag{6.50}$$

Действительно, имеем

$$\left|f_\varepsilon\right|_0 \le \left|f\right|_0\int_{\mathbb{R}^3}\omega_\varepsilon(|y|)dy = \left|f\right|_0, \quad [f_\varepsilon]_\alpha \le [f]_\alpha\int_{\mathbb{R}^3}\omega_\varepsilon(|y|)dy = [f]_\alpha.$$

Пусть

$$u_\varepsilon(x) = u(f_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}f_\varepsilon(y)dy. \tag{6.51}$$

В силу (6.49) и (6.50) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|u_\varepsilon|_{2+\lambda} \le B_1\left|f_\varepsilon\right|_\alpha \le B_1\left|f\right|_\alpha. \tag{6.52}$$

Согласно результату упражнения 3.2.2 работы [20] существует такая подпоследовательность $\{u_\mu\}\subset\{u_\varepsilon\}$ и такая функция $u(x)\in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^3)$, что

$$|u|_\lambda \le \liminf_{\mu\to+0}|u_\mu|_{2+\lambda}, \tag{6.53}$$

причем

$$u_\mu \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu\to+0 \tag{6.54}$$

для любого компакта $\overline{D}\in\mathbb{R}^3$. С другой стороны, в силу (6.51) и того, что $\left|f_\mu - f\right|_0 \to +0$ при $\mu\to+0$ имеем

$$|u(f_\mu)(x) - u(f)(x)|_0 \to +0 \quad \text{при} \quad \mu\to+0.$$

Действительно, справедливо следующее неравенство:

$$|f_\mu - f|_0 \leq [f]_\alpha \mu^\alpha.$$

Но тогда, в частности, имеем

$$|u(f_\mu)(x) - u(f)(x)|_{0;\overline{D}} \to +0 \quad \text{при} \quad \mu \to +0. \tag{6.55}$$

Стало быть, из сравнения (6.54) и (6.55) приходим к выводу о том, что

$$u(x) = u(f)(x) \tag{6.56}$$

и в силу (6.53) и (6.52) из (6.56) получаем искомую априорную оценку

$$|u|_{2+\lambda} \leq B_1 |f|_\alpha \quad \text{для любой функции} \quad f(x) \in \mathbb{C}^\alpha(\mathbb{R}^3), \tag{6.57}$$

где $u(x)$ определена равенством (6.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М.О., Яблочкин Д.К.* Теория потенциала для нелинейного уравнения типа Бенджамена—Бона—Махони—Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1915—1947.
2. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47—74.
3. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(5.9). № 4(8). С. 607—628.
4. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
5. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
6. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885—1899.
7. *Albert J.P.* On the decay of solutions of the generalized Benjamin—Bona—Mahony equation // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 30. № 2. P. 527—537.
8. *Avrin J.D., Goldstein J.A.* Global existence for the Benjamin—Bona—Mahony equation in arbitrary dimensions // Nonlinear Analysis. 1985. V. 9. № 8. P. 861—865.
9. *Bisognin E., Bisognin V., Charao C.R., Pazoto A.F.* Asymptotic expansion for a dissipative Benjamin-Bona-Mahony equation with periodic coefficients // Port. Math. 2003. V. 60. № 4. P. 437—504.
10. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A. 1972. V. 272. № 1. P. 47—78.
11. *Biler P.* Long-time behavior of the generalized Benjamin—Bona—Mahony equation in two space dimensions // Differ. Integral Equations. 1992. V. 19. № 4. P. 891—901.
12. *Camassa R., Holm D.D.* An integrable shallow water equation with peaked solitons // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. № 11. P. 1661—1664.
13. *Chen Yu.* Remark on the global existence for the generalized Benjamin—Bona—Mahony equations in arbitrary dimension // Appl. Analysis. 1988. V. 30. № 1. P. 1—15.
14. *Constantin A., Escher J.* Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations // Acta Math. 1998. V. 181. № 2. P. 229—243.
15. *Hayashi N., Kaikina E.I., Naumkin P.I., Shishmarev I.A.* Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. New York: Springer, 2006.
16. *Hagen T., Turi J.* On a class of nonlinear BBM-like equations // Comput. Appl. Math. 1998. V. 17. № 2. P. 161—172.
17. *Корпусов М.О., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена—Бона—Махони—Бюргерса с нелокальным граничным условием // Теор. и матем. физ. 2013. Т. 175. № 2. С. 159—172.
18. *Korpusov M.O., Yushkov E.V.* Local solvability and blow-up for Benjamin—Bona—Mahony—Burgers, Rosenau—Burgers and Korteweg-de Vries—Benjamin—Bona—Mahony equations условием // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. V. 69. № 69. P. 1—16.
19. *Korpusov M.O.* On the blow-up of solutions of the Benjamin—Bona—Mahony—Burgers and Rosenau—Burgers equations // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 4. P. 1737—1743.
20. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. Новосибирск: Научная Книга, 1998.
21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
22. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884—903.
23. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.