ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.642

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ I РОДА С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОЧЛЕНОВ ЧЕБЫШЁВА, ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ НА ОБОИХ КОНЦАХ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Ш. С. Хубежты[1,2]

[1] 362030 Владикавказ, ул. Ватутина, 46, Северо-Осетинский государственный университет, Россия

[2] 362027 Владикавказ, ул. Маркуса, 22, Институт ВНЦ РАН, Россия

e-mal: shalva57@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.09.2020 г.
Переработанный вариант 18.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение I рода на отрезке интегрирования $[-1,1]$. Ищется решение, обращающееся в нуль на концах отрезка. С применением многочленов Чебышёва II рода происходит дискретизация уравнений. Коэффициенты разложения неизвестной функции в ряд по многочленам Чебышёва II рода находятся с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Учитывается тот факт, что единственное решение указанного уравнения, обращающееся в нуль на концах отрезка интегрирования, существует при дополнительных условиях на ядра и на правой части. Это дополнительное условие также дискретизируется. Построенная вычислительная схема обосновывается методом функционального анализа – по общей теории приближенных методов. Вводится пространство гёльдеровых функций с соответствующими нормами. Оцениваются разности норм сингулярного и приближенного операторов. При некоторых условиях доказываются существование и единственность решения приближенного сингулярного интегрального уравнения и оценивается погрешность вычисления. Дается порядок стремления к нулю остаточного члена. Изложенная теория проверяется на тестовых примерах, показывающих эффективность метода. Библ. 13. Табл. 1.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, ортогональный многочлен, дискретизация уравнения, квадратурные формулы, гауссовская точность.

DOI: 10.31857/S0044466921080032

1. ВВЕДЕНИЕ

Сингулярные интегральные уравнения находят широкое применение в различных областях математики. Хорошо известен спектр применения в механике и технике: теории упругости, термоупругости, гидро- и аэродинамике. В последние годы сингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Однако вычисление сингулярных интегралов, а также решение сингулярных интегральных уравнений возможны лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении хорошо известны работы И.К. Лифанова, Г.Х. Габдулхаева, И.В. Бойкова, Д.Г. Саникидзе и др. (см. [1]–[4]). Указанные авторы в основном строят дискретные решения в виде таблицы значений неизвестной функции. Но часто требуется найти решения в любой точке отрезка интегрирования. Первые такие решения построил С. Пашковский (см. [5, с. 332–349]) с применением многочленов Чебышёва для интегральных уравнений.

В данной работе предложена вычислительная схема приближенного решения сингулярного интегрального уравнения, обращающегося в нуль на концах отрезка, с применением многочленов Чебышёва II рода. Отметим, что разложение функции в ряды по многочленам Чебышёва сходится гораздо быстрее, чем другие разложения. Это подтверждается на многочисленных примерах, некоторые из них представлены в данной работе.

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение вида

$$\mathbb{K}_0\varphi_0 \equiv \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}K(x,t)\varphi_0(t)dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

где $K(x,t)$, $f(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[-1,1]$, $\varphi_0(t)$ – неизвестная функция.

Решение ищется на классе функций, обращающихся в нуль на концах отрезка интегрирования $[-1,1]$ (см. [6, с. 340], [7, с. 446]). Это означает, что $\varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, т.е. рассматривается уравнение

$$\mathbb{K}\varphi \equiv \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{2}$$

Как известно (см. [1, с. 168], [7, с. 447]), уравнение (2) имеет единственное решение при условии

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(f(t) - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)dt = 0. \tag{3}$$

Также известно (см. [8, с. 332–347]), что многочлены Чебышёва II рода

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$
$$U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t, \quad U_2(t) = 4t^2 - 1, \quad U_3(t) = 8t^3 - 4t, \ldots,$$

суть ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией $p(t) = \sqrt{1-t^2}$ и справедливо равенство

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_n(t)U_m(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ 1, & \text{если } n = m. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда с использованием теории рядов Чебышёва (см. [5, с. 104–173]) справедливы представления

$$\begin{gathered}
\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty}a_kU_k(t), \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\varphi(t)U_k(t)dt, \quad k = 0,1,\ldots, \\
f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}d_iU_i(x), \quad d_i = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)U_i(x)dx, \quad i = 0,1,\ldots, \\
K(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty}U_i(x)\sum_{j=0}^{\infty}c_{ij}U_j(t), \\
c_{ij} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_j(t)\left(\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}K(x,t)U_i(x)dx\right)dt, \quad i,j = 0,1,\ldots .
\end{gathered} \tag{5}$$

Коэффициенты d_i $(i = 0,1,\ldots)$, c_{ij} $(i,j = 0,1,\ldots)$ вычисляются по указанным формулам (5) или приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса наивысшей алгебраической степени точности (см. [9, с. 132]). Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots$ – неизвестны, так как функция $\varphi(t)$ – неизвестная.

Подставляя разложения (5) функции $\varphi(t)$, $f(x)$, $K(x,t)$ в (2), получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{1}{t-x}\sum_{k=0}^{\infty}a_kU_k(t)dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}U_i(x)\sum_{j=0}^{\infty}c_{ij}U_j(t)\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_kU_k(t)dt = \sum_{i=0}^{\infty}d_iU_i(x). \tag{6}$$

Суммы $\sum_{i=0}^{\infty} U_i(x) \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} U_j(t)$ равномерно сходятся (см. [5, с. 111–112]), т.е. законно менять порядок суммирования.

Справедливо равенство (см. [10, с. 85])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{U_k(t)}{t-x}\,dt = -T_{k+1}(x),$$

где $T_{k+1}(t) = \cos(k+1)\arccos t$ $(k = 0,1,\ldots)$ – многочлены Чебышёва I рода.

Используя (4), равенство (6) можно переписать следующим образом:

$$-2\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_{k+1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} U_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i U_i(x). \tag{7}$$

Разложим еще $-2T_{k+1}(x)$ в ряд по многочленам Чебышёва II рода. Имеем

$$-2T_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ik} U_i(x),$$

где

$$b_{ik} = -2\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,T_{k+1}(x)U_i(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i = 0,1,\ldots,k-2,k,k+2,\ldots, \\ 1, & \text{если} \quad i = k-1, \\ -1, & \text{если} \quad i = k+1. \end{cases}$$

После этого уравнение (7) принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} b_{ik} U_i(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} U_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i U_i(x)$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (b_{ik} + c_{ik})\right) U_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i U_i(x).$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0,1,\ldots\,. \tag{8}$$

Это есть система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_0, a_1, … .

Теперь рассмотрим условие (3). Аналогичным образом его можно представить в виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i U_i(t) - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}\sum_{i=0}^{\infty} U_i(t)\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij} U_j(\tau)\sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(\tau)\,d\tau\right) dt = 0.$$

Учитывая ортонормированность многочленов Чебышёва II рода, т.е. формулу (4), получаем

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} d_i U_i(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} U_i(t)\right) dt = 0.$$

Объединяя полученное равенство и (8), получается система линейных алгебраических уравнений бесконечного порядка с бесконечным количеством неизвестных:

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0,1,\ldots, \\ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(d_j - \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{jk}\right) U_j(t)\,dt\right) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Приближенная система будет следующая:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1,\\
&\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\left(d_j - \sum_{k=0}^{n} a_k c_{jk}\right)U_j(t)dt\right) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

После вычисления интеграла

$$g_j = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}U_j(t)dt = \begin{cases}0, & \text{при} \quad j = 2m-1,\\ 2, & \text{при} \quad j = 2m,\end{cases}$$

система (10) упрощается, и получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1,\\
&\sum_{k=0}^{n} a_k G_k = H,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$G_k = \sum_{j=0}^{n} g_j c_{jk}, \quad H = \sum_{j=0}^{n} g_j d_j.$$

Если функции $f(x)$ и $K(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0, \quad \int_{-1}^{1}\frac{K(x,t)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0,$$

тогда автоматически условие (3) переходит в тождество (см. [4]) и для приближенного решения уравнения (2) достаточно решить только систему

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{ik} + c_{ik}) = d_i, \quad i = 0,1,\dots,n. \tag{12}$$

После решения этой системы относительно неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n$ приближенным решением будет выражение

$$\varphi(t) \approx \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k U_k(t). \tag{13}$$

3. ОБОСНОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЫ

В начале заметим, что обоснование вычислительной схемы проводится аналогично статье [11].

Обозначим через X пространство функций вида $\varphi_0(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[-1;1]$, производная которой удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$, $0 < \alpha \le 1$. Норма пространства X определяется формулой

$$\|\varphi_0(t)\| = \|\varphi(t)\|_{C[-1,1]} + \sup_{t_1 \ne t_2}\frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^{\beta}}, \quad 0 < \beta < \alpha. \tag{14}$$

Через X_n обозначим подпространство пространства X, состоящее из функций $\varphi_{0n}(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k U_k(t)$ – множество полиномов степени n. Норма в пространстве X_n определяется формулой (14).

Через Y обозначим пространство непрерывных функций $y(t)$ класса Гёльдера, определенных на отрезке $[-1,1]$, с нормой

$$\|y(t)\| = \max_{-1\le t\le 1}|y(t)| + \sup_{t_1\ne t_2}\frac{|y(t_1)-y(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}, \quad 0<\beta<\alpha.$$

Через Y_n обозначим пространство полиномов вида $y_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k U_k(t)$ с нормой

$$\|y_n(t)\| = \max_{-1\le t\le 1}|y_n(t)| + \sup_{t_1\ne t_2}\frac{|y_n(t_1)-y_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}, \quad 0<\beta<\alpha.$$

Через P_n обозначим проектор, действующий из Y в Y_n по формуле $y_n(t) = P_n[y(t)]$, а из пространства X в X_n – по формуле $P_n[\varphi_0(t)] = \sqrt{1-t^2}P_n[\varphi(t)]$. Здесь $P_n[y(t)]$ – оператор проектирования на множестве полиномов вида $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k U_k(t)$ степени n. Известно (см. [8, с. 342], [12, с. 540]), что в пространстве $C[-1;1]$ $\|P_n\| \le C\ln n$, где $C = \mathrm{const}$.

Требуется доказать, что оператор $\mathbb{K}$ действует из пространства X в Y.

Это очевидно, так как по свойству сингулярных операторов (см. [6, с. 76]), если $K(x,t)\in H(\alpha)$, $\varphi(t)\in H(\alpha)$, то

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\in H(\alpha) \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}K(x,t)\varphi(t)dt\in H(\alpha),$$

т.е. $\mathbb{K}\varphi\in H(\alpha)$.

Будем считать, что существует обратный оператор $\mathbb{K}^{-1}$, действующий из Y в X.

Приближенное уравнение для уравнения (2) перепишем в виде

$$\mathbb{K}\varphi_n \equiv \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi_n(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}K(x,t)\varphi_n(t)dt = f(x). \tag{15}$$

Тогда систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ можно записать в виде

$$\mathbb{K}_n\varphi_n = P_n\left[\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi_n(t)}{t-x}dt\right] + P_n\left[\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}K(x,t)\varphi_n(t)dt\right] = P_n[f(x)]. \tag{16}$$

Оценим норму разности

$$\left\|\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(K(x,t)-K_n^x(x,t))\varphi_n(t)dt\right\|,$$

где $K_n^x(x,t)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени n функции $K(x,t)$ по переменной x. Очевидно,

$$\left\|\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(K(x,t)-K_n^x(x,t))\varphi_n(t)dt\right\|_{C[-1,1]} \le$$
$$\le \max\left|K(x,t)-K_n^x(x,t)\right|\max|\varphi_n(t)| \le \bar{E}_n^x(K(x,t))\|\varphi_n(t)\|,$$

где $\bar{E}_n^x(K(x,t)) = \sup_{-1\le t\le 1}E_n^x(K(x,t))$, $E_n^x(K(x,t))$ – наилучшее приближение функции $K(x,t)$ по переменной x полиномом Чебышёва II рода.

Повторяя ход доказательства обратной теоремы Бернштейна (см. [12, с. 165]), можно показать, что

$$\left\|\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(K(x,t)-K_n^x(x,t))\varphi_n(t)dt\right\| \le Cn^{\beta}\bar{E}_n^x(K(x,t))\|\varphi_n(t)\|,$$

где $C = \text{const}$, не зависящая от n.

Из общей теории приближенных методов (см. [13, с. 211, 517]) следует, что при n таких, что

$$q = Cn^{\beta}\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|\bar{E}_n^x(K(x,t))\ln n < 1,$$

система (16) однозначно разрешима, оператор $\mathbb{K}_n$ непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\|\varphi-\bar{\varphi}_n\| \le Cn^{\beta}\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|\bar{E}_n^x(K(x,t))\ln n, \tag{17}$$

где $\varphi(t)$ и $\bar{\varphi}_n(t)$ – решения уравнений (2) и (16).

Теперь используем метод механических квадратур для сингулярного интегрального уравнения (2). Оно в операторной форме имеет вид

$$P_n\left[\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{\varphi_n(t)}{t-x}dt\right] + P_n\left[\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P_n^t[K(x,t)]\varphi_n(t)dt\right] = P_n[f(x)]. \tag{18}$$

Аналогично рассуждая, применением метода коллокации, тогда (18) можно переписать следующим образом:

$$\bar{\mathbb{K}}_n\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{\varphi_n(t)}{t-x}dt + P_n\left[\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P_n^t[K(x,t)]\varphi_n(t)dt\right] = P_n[f(x)]. \tag{19}$$

После оценки разности $\left\|\mathbb{K}_n\varphi_n - \bar{\mathbb{K}}_n\varphi_n\right\|_{[C[-1,1]]}$ и, используя обратную теорему Бернштейна (см. [11, с. 165]), получаем

$$\left\|\mathbb{K}_n\varphi_n - \bar{\mathbb{K}}_n\varphi_n\right\| \le Cn^{\beta}\bar{E}_n^t(K(x,t))\ln n\|\varphi_n\|.$$

Далее из теоремы Банаха (см. [13, с. 211]) следует, что при n таких, что

$$q_n = Cn^{\beta}\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|\bar{E}_n^t(K(x,t))\ln n < 1,$$

оператор $\bar{\mathbb{K}}_n$ непрерывно обратим и справедлива оценка

$$\|\varphi_n-\bar{\varphi}_n\| \le Cn^{\beta}\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|\bar{E}_n^t(K(x,t))\ln n. \tag{20}$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbb{K}$ *непрерывно обратим. Функции* $K(x,t)$ *и* $f(x)$ *– непрерывно дифференцируемые и принадлежат классу Гёльдера* $H(\alpha)$*,* $0 < \alpha \le 1$*. Тогда при* n *таких, что*

$$C\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|(\bar{E}_n^x(K(x,t)) + \bar{E}_n^t(K(x,t)))n^{\beta}\ln n < 1,$$

система (11) *имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$\|\varphi-\varphi_n\| \le C\left\|\mathbb{K}^{-1}\right\|(\bar{E}_n^x(K(x,t)) + \bar{E}_n^t(K(x,t)))n^{\beta}\ln n. \tag{21}$$

А если $K(x,t)$ *и* $f(x)$ *имеют непрерывные производные до порядка* $r-1$ $(r \ge 1)$ *и производная порядка* r *принадлежит классу Гёльдера* $H(\alpha)$*,* $0 < \alpha \le 1$*, тогда из* (21) *с учетом неравенства* $\bar{E}_n^x(K(x,t)) \le O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ (см. [12, с. 138]) *следует оценка*

$$\|\varphi-\varphi_n\| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right), \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Таблица 1

Коэффициенты разложения решения	Пример 1 решение $\varphi(t) = 1$	Пример 2 решение $\varphi(t) = t$	Пример 3 решение $\varphi(t) = t^2$
a_0	0.9999999	9.685755E−08	0.2499998
a_1	−6.81494E−08	0.5000001	−2.384186E−07
a_2	−3.583727E−08	−1.48749E−08	0.25
a_3	−3.927067E−08	6.214358E−08	−4.396021E−08
a_4	−3.965056E−09	−1.40607E−08	9.742919E−09
a_5	−1.961513E−08	6.712615E−08	−9.037535E−09
a_6	5.037663E−09	−6.926157E−09	2.199927E−08
a_7	−2.116015E−08	5.175345E−08	2.166799E−08
a_8	2.833207E−09	3.793914E−09	−7.175324E−09
a_9	−5.829515E−08	1.990343E−08	9.166978E−09
Приближенное решение уравнения	$\varphi(t) \approx \sum_{k=1}^{10} a_{k-1}U_{k-1}(t) \approx 1$	$\varphi(t) \approx \sum_{k=1}^{10} a_{k-1}U_{k-1}(t) \approx t$	$\varphi(t) \approx \sum_{k=1}^{10} a_{k-1}U_{k-1}(t) \approx t^2$

4. ТЕСТОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Рассмотрим следующие уравнения:

1.

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(x^3+tx)\varphi(t)dt = -2x + x^3.$$

Здесь дополнительное условие (3) автоматически выполняется, поэтому уравнение имеет единственное решение $\varphi(t) = 1$.

2.

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(x^3+4tx)\varphi(t)dt = -2x^2 + 1 + x.$$

Здесь также дополнительное условие (3) выполняется и уравнение имеет единственное решение $\varphi(t) = t$.

3.

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(4x^3+tx)\varphi(t)dt = x - x^3.$$

И здесь выполняется условие (3) и уравнение имеет единственное решение $\varphi(t) = t^2$.

После решения систем линейных алгебраических уравнений (12) для каждого примера при $n = 10$ получены численные результаты, представленные в табл. 1.

Полученные в настоящей работе результаты показывают, что построенная вычислительная схема удобна для реализации и эффективна по точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
2. *Габдулхаев Б.Г., Шарипов Р.Н.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Докл. АН СССР. 1968. Т. 179. № 2. С. 260–263.
3. *Бойков И.В.* Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пензен. гос. ун-та, 2004. 316 с.

4. *Саникидзе Д.Г.* К численному решению граничных задач методом аппроксимации сингулярных интегралов // Дифференц. ур-ния. 1993. Т. 29. № 9. С. 1–13.
5. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
8. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
9. *Крылов В.И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
10. *Хубежты Ш.С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011. 236 с.
11. *Бойков И.В., Бойкова А.И., Сёмов М.А.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Приволжский регион. Физико-матем. науки. Математика. 2015. № 3 (35). С. 11–27.
12. *Натансон И.Н.* Конструктивная теория функций. М.–Л.: ГИФМЛ, 1949. 688 с.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1965. 540 с.