ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.65

# О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ

**© 2021 г. В. Г. Магомедова[1,*], А.-Р. К. Рамазанов[1,2,**]**

[1] *367000 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а, Дагестанский государственный университет, Россия*

[2] *367032 Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45, Дагестанский научный центр РАН, Россия*

**e-mail: vazipat@rambler.ru*

***e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 07.08.2020 г.
Переработанный вариант 08.11.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Предложен способ построения приближенного решения в виде рациональной сплайн-функции для начальной задачи в случае дифференциальных уравнений первого и второго порядков, разрешенных относительно старшей производной. Такая сплайн-функция строится путем перехода к системе скалярных уравнений, решение которой сводится к решению не более одного нелинейного уравнения с одним неизвестным и последовательным подстановкам уже известных значений. Библ. 8.

**Ключевые слова:** рациональные сплайн-функции, интерполяционные сплайн-функции, приближенное решение дифференциальных уравнений.

**DOI:** 10.31857/S0044466921080044

## ВВЕДЕНИЕ

Численным методам решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием, в основном, полиномиальных сплайнов посвящен ряд работ (см., например, [1]–[4] и цитированную в них литературу).

В настоящей работе речь идет об одном новом способе построения приближенного решения в виде рациональной сплайн-функции специальной формы для начальной задачи

$$y' = F(x, y), \quad a \le x < b, \tag{0.1}$$

$$y(a) = A. \tag{0.2}$$

Будем предполагать, что существует единственное решение $y = y(x)$ этой задачи в некоторой области $D$, содержащей промежуток $[a, b)$, плоскости $Oxy$.

Разумеется, правая часть уравнения (0.1) может быть нелинейной функцией, но будем считать, что она удовлетворяет в области $D$ условиям теоремы Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши, а именно, $F(x, y)$ непрерывна в $D$ и для $F(x, y)$ в $D$ выполняется условие Липшица по переменной $y$.

Как показано ниже, при этих условиях на любом внутреннем отрезке $[a, c] \subset [a, b)$ можно построить приближенное решение задачи (0.1), (0.2) в виде рациональной сплайн-функции класса $C^1_{[a,c]}$. Более того, такое решение строится путем перехода к системе скалярных уравнений, среди уравнений которой не более одного нелинейного уравнения с одним неизвестным. При этом решение самого нелинейного уравнения можно найти простыми итерациями, а значения остальных неизвестных можно найти из других уравнений системы последовательной подстановкой уже известных значений.

Доказывается также равномерная сходимость приближенных решений в виде рациональных сплайн-функций на отрезке $[a, c]$ к точному решению $y = y(x)$ задачи (0.1), (0.2).

Известно, что часто важно знать решение начальной или краевой задачи на “массивных” сетках узлов или даже на целом промежутке. Наряду с полиномиальными слайнами с помощью приводимой ниже простой по структуре формулы (0.5) можно получить гладкое приближенное решение дифференциального уравнения на всем отрезке, а не только в некоторых дискретных точках.

Более того, в [5] для дискретных функций, определенных на произвольных сетках узлов из данного отрезка, найдены сравнительно легко проверяемые условия, при выполнении которых интерполяционная рациональная сплайн-функция по трехточечным рациональным интерполянтам сохраняет ковыпуклость с произвольной переменной направления выпуклости, свойственную исходной дискретной функции.

Это позволяет получить приближенное гладкое решение в виде рациональной сплайн-функции, интерполирующей решение дифференциального уравнения, с вполне определенными геометрическими свойствами, скажем, выпуклое вниз или вверх на данных интервалах решение.

Отметим также, что в конструкцию трехточечных рациональных интерполянтов включен параметр, который может влиять на ускорение сходимости приближенного решения в виде рациональной сплайн-функции.

Рациональные сплайн-функции, которые будут построены в качестве приближенного решения рассматриваемых задач, в общем виде определяются (см. [6]) для дискретной функции $f(x)$, определенной на произвольной сетке узлов $\Delta : x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ $(N \geq 2)$.

Для краткости обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и для произвольного $\lambda > 0$ при $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ определим рациональные интерполянты

$$R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i} \tag{0.3}$$

по набору полюсов $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$, где

$$g_i = \begin{cases} x_{i+1} + \lambda h_{i+1}, & \text{если} \quad h_{i+1} \leq h_i, \\ x_{i-1} - \lambda h_i, & \text{если} \quad h_{i+1} > h_i. \end{cases}$$

Коэффициенты $\alpha_i, \beta_i$ и $\gamma_i$ однозначно определяются с помощью интерполяционных условий $R_i(x_j, f) = f(x_j)$ $(j = i-1, i, i+1)$, из которых с использованием разделенных разностей получим

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \tag{0.4}$$

Положим также $R_0(x, f) \equiv R_1(x, f)$, $R_N(x, f) \equiv R_{N-1}(x, f)$ и рассмотрим на промежутке $[x_0, x_N]$ сплайн-функцию $R_{N,1}(x, f) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство

$$R_{N,1}(x, f) = \frac{1}{h_i}\left[R_i(x, f)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x, f)(x_i - x)\right]. \tag{0.5}$$

Аппроксимационные свойства построенных приближенных решений основаны на следующем утверждении, в котором использованы также обозначения $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ $(i = 2, 3, \ldots, N - 1)$; $\omega(\delta, \varphi) = \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| : x, y \in [x_0, x_N], |x - y| \leq \delta\}$.

**Лемма.** *Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[x_0, x_N]$, то при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняются неравенства*

$$\left|R_{N,1}(x, f) - f(x)\right| \leq \left(4 + \frac{2}{\lambda}\right)\Delta_i \omega(\Delta_i, f'), \tag{0.6}$$

$$\left|R'_{N,1}(x, f) - f'(x)\right| \leq \left(12 + \frac{2}{\lambda}\right)\omega(\Delta_i, f'). \tag{0.7}$$

Непрерывная дифференцируемость $R_{N,1}(x, f)$ доказана в [7], неравенство (0.7) получено в [6].

Для доказательства (0.6) заметим, что при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ найдется точка $c$ между точками $x$ и $x_i$, для которой имеем

$$f(x) - R_i(x, f) = [f(x) - R_i(x, f)] - [f(x_i) - R_i(x_i, f)] = [f'(c) - R_i'(c, f)](x - x_i).$$

Отсюда и из (0.5), (0.7) легко получить (0.6).

Далее при установлении сходимости приближенных решений к точному решению задачи (0.1), (0.2) используется также следующее представление рационального интерполянта $R_i(x, f)$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ для функции $f(x)$, полученное в [6]:

$$\begin{gathered} R_i(x, f) = f(x_i) + [f(x_i) - f(x_{i-1})]\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\left[1 - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})}{(x - g_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}\right] + \\ + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x - g_i)}. \end{gathered} \tag{0.8}$$

Возможное влияние выбора параметра $\lambda$ на ускорение сходимости приближенного решения показано на одном примере начальной задачи.

Представлена также схема приближенного решения, вообще говоря, нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с помощью рациональных сплайн-функций. При этом промежуточная система скалярных уравнений относительно дискретного решения дифференциального уравнения снова содержит не более одного нелинейного уравнения относительно значения, соответствующего узлу $x_1$, а остальные значения дискретного решения в узлах $x_2, x_3, \ldots, x_N$ можно найти последовательной подстановкой двух предыдущих значений в соответствующее данному узлу скалярное уравнение системы.

Приближенное решение в виде рациональных сплайн-функций в случае линейных дифференциальных уравнений рассмотрено в [8].

## 1. ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть, как и выше, задача (0.1), (0.2) имеет единственное решение $y = y(x)$ класса $C^1_{[a,b)}$ в некоторой плоской области $D$, содержащей промежуток $[a, b)$, функция $F(x, y)$ непрерывна в $D$, и существует постоянная $L > 0$ такая, что для любых двух точек $(x, y)$ и $(x, z)$ из $D$ выполняется неравенство

$$|F(x, y) - F(x, z)| \le L|y - z|. \tag{1.1}$$

Для данного $c \in (a, b)$ и натурального $N > (b - a)/(b - c)$ положим $h = (c - a)/(N - 1)$ и для краткости вычислений рассмотрим равноотстоящие точки $\Delta : x_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, N$, которым соответствуют полюсы $g_i = x_{i+1} + \lambda h,\ i = 1, 2, \ldots, N - 1$.

Заметим, что $x_{N-1} = c$, а точка $x_N = c + h < b$, как увидим ниже, играет роль вспомогательного узла.

В выражении каждого рационального интерполянта $R_i(x, f)$ $(i = 1, 2, \ldots, N - 1)$ из (0.3) вместо значений $f(x_j)$ возьмем соответственно неизвестные $y_j$ при $j = i - 1, i, i + 1$ и полученную рациональную функцию относительно $x$ обозначим через $R_i(x)$.

Полагая также $R_0(x) \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$, построим сплайн-функцию $R_{N,1}(x)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ имеет место равенство

$$R_{N,1}(x) = \frac{1}{h}[R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x)]. \tag{1.2}$$

Найдем значения неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_N$ такие, что в соответствии с задачей (0.1), (0.2) выполняются равенства

$$\begin{gathered} R'_{N,1}(x_i) = F(x_i, R_{N,1}(x_i)), \quad i = 0, 1, \ldots, N - 1, \\ R_{N,1}(a) = A. \end{gathered} \tag{1.3}$$

При этом учтем следующие равенства:

$$R_{N,1}(x_i) = R_i(x_i) = y_i, \quad R'_{N,1}(x_i) = R'_i(x_i), \quad i = 0,1,\dots,N,$$

$$R'_i(x_i) = \beta_i - \gamma_i(x_i - g_i)^{-2}, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$R'_0(x_0) = R'_1(x_0) = \beta_1 - \gamma_1(x_0 - g_1)^{-2},$$

$$R'_N(x_N) = R'_{N-1}(x_N) = \beta_{N-1} - \gamma_{N-1}(x_N - g_{N-1})^{-2}.$$

Здесь значения $\beta_j$ и $\gamma_j$ берутся из равенств (0.4) с соответствующей заменой $f(x_i)$ на $y_i$.

Всюду ниже для краткости будем придерживаться следующих обозначений:

$$\begin{gathered} p_0 = p_0(\lambda,h) = -\frac{3\lambda+4}{2(\lambda+2)h}, \quad q_0 = q_0(\lambda,h) = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+2)h}, \quad r_0 = r_0(\lambda,h) = -\frac{\lambda}{2(\lambda+2)h}, \\ p = p(\lambda,h) = -\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)h}, \quad q = q(\lambda,h) = \frac{1}{(\lambda+1)h}, \quad r = r(\lambda,h) = \frac{\lambda}{2(\lambda+1)h}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Тогда получим

$$R'_0(x_0) = R'_1(x_0) = p_0y_0 + q_0y_1 + r_0y_2, \tag{1.5}$$

$$R'_i(x_i) = py_{i-1} + qy_i + ry_{i+1}, \quad i = 1,2,\dots,N-1. \tag{1.6}$$

Так как систему (1.3) можно записать в виде

$$R_0(x_0) = A,$$

$$R'_i(x_i) = F(x_i, R_i(x_i)), \quad i = 0,1,\dots,N-1,$$

отсюда и из равенств (1.5) и (1.6) имеем

$$p_0y_0 + q_0y_1 + r_0y_2 = F(x_0,y_0), \quad y_0 = A, \tag{1.7}$$

$$py_{i-1} + qy_i + ry_{i+1} = F(x_i,y_i), \quad i = 1,2,\dots,N-1. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и при $i = 1$ из (1.8) с учетом (1.4) получим уравнение

$$y_1 = \frac{(\lambda+1)h}{2\lambda+3}F(x_1,y_1) + A + \frac{(\lambda+2)h}{2\lambda+3}F(a,A), \tag{1.9}$$

из которого можно найти значение $y_1$.

Действительно, если правую часть равенства (1.9) обозначить через $\varphi(y_1)$, $y_1$ — через $z$, то получим уравнение вида $z = \varphi(z)$. При этом ввиду условия (1.1) для правой части уравнения (0.1) для любых двух точек $z_1, z_2 \in [a,b)$ имеем

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| = \frac{(\lambda+1)h}{2\lambda+3}|F(x_1,z_1) - F(x_1,z_2)| \le \frac{(\lambda+1)h}{2\lambda+3}L|z_1 - z_2|.$$

Значит, если выбрать значения параметра $\lambda > 0$ и шага $h > 0$ так, чтобы выполнялось, скажем, неравенство

$$\frac{(\lambda+1)h}{2\lambda+3}L \le \frac{1}{2}, \tag{1.10}$$

то отображение $\varphi(z)$ становится сжимающим и для нахождения значения $y_1$ можно применить итерации (пример на выбор параметра $\lambda$ для ускорения сходимости приводится ниже).

Значения остальных неизвестных $y_{i+1}$ $(i = 1,2,\dots,N-1)$ можно найти из равенства (1.8) последовательной подстановкой уже известных пар значений $y_{i-1}$, $y_i$.

Чтобы получить искомое приближенное решение задачи (0.1), (0.2) на отрезке $[a,c] \subset [a,b)$ при выбранных $\lambda > 0$ и натуральном $N > (b-a)/(b-c)$ в виде рациональной сплайн-функции $R_{N,1}(x)$, остается воспользоваться равенствами (0.4), (0.3) и (1.2) (с соответствующей заменой в них значений $f(x_j)$ на $y_j$).

## 2. СХОДИМОСТЬ СПЛАЙН-РЕШЕНИЯ

Придерживаясь принятых выше обозначений, $y = y(x)$ означает точное решение задачи (0.1), (0.2), а также точка $c \in (a,b)$, натуральное $N > (b-a)/(b-c)$, $h = (c-a)/(N-1)$, узлам $x_i = a + ih$ $(i = 0,1,\ldots,N)$ соответствуют полюсы $g_i = x_{i+1} + \lambda h$ $(i = 1,2,\ldots,N-1)$.

Через $R_i(x,y)$ $(i = 0,1,\ldots,N)$ обозначим рациональные интерполянты вида (0.3), составленные по узлам $x_j$ и полюсам $g_i$ для функции $y = y(x)$, а через $R_{N,1}(x,y)$ — соответствующую сплайн-функцию вида (0.5).

Тогда по лемме в силу непрерывной дифференцируемости $y(x)$ на отрезке $[a,c]$ при $h \to 0$ имеем

$$\max\{|y(x) - R_{N,1}(x,y)| : x \in [a,c]\} \to 0. \tag{2.1}$$

Для рациональной сплайн-функции $R_{N,1}(x)$, соответствующей решению $y_0, y_1, \ldots, y_N$ системы (1.3), при $x \in [a,c]$ получим

$$|y(x) - R_{N,1}(x)| \le |y(x) - R_{N,1}(x,y)| + |R_{N,1}(x,y) - R_{N,1}(x)|. \tag{2.2}$$

Значит, для доказательства равномерной сходимости приближенных решений $R_{N,1}(x)$ к точному решению $y(x)$ на отрезке $[a,c]$ остается оценить на этом отрезке второе слагаемое правой части.

При $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,N-1)$ имеем

$$R_{N,1}(x,y) - R_{N,1}(x) = [R_i(x,y) - R_i(x)]\frac{1}{h}(x - x_{i-1}) + [R_{i-1}(x,y) - R_{i-1}(x)]\frac{1}{h}(x_i - x),$$

поэтому достаточно оценить при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,N-2)$ разность $R_i(x,y) - R_i(x)$ и учесть, что по определению сплайн-функций $R_{N,1}(x,y)$ и $R_{N,1}(x)$ выполняются равенства $R_{N-1}(x,y) \equiv R_{N-2}(x,y)$ и $R_{N-1}(x) \equiv R_{N-2}(x)$.

Для этого воспользуемся представлением рациональных интерполянтов $R_i(x,y)$ и $R_i(x)$ в виде (0.8) и следующими оценками в случае равномерных сеток при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\left|\frac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}}\right| \le 1, \quad 0 \le 1 - \frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})}{(x - g_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \le 1,$$

$$\left|\frac{(x_{i+1} - g_i)(x - x_{i-1})(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)(x - g_i)}\right| \le \max\{\lambda, 1\}.$$

Тогда при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,N-2)$ получим

$$|R_i(x,y) - R_i(x)| \le |y(x_{i-1}) - y_{i-1}| + |y(x_i) - y_i|(2 + \max\{\lambda,1\}) +$$
$$+ |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|\max\{\lambda,1\} \le (2 + \max\{\lambda,1\})\sum_{j=i-1}^{i+1}|y(x_j) - y_j|.$$

Значит, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,N-2)$ выполняется неравенство

$$|R_{N,1}(x,y) - R_{N,1}(x)| \le (2 + \max\{\lambda,1\})\sum_{j=i-1}^{i+1}|y(x_j) - y_j|, \tag{2.3}$$

а при $x \in [x_{N-2}, x_{N-1}]$ имеем

$$|R_{N,1}(x,y) - R_{N,1}(x)| = |R_{N-2}(x,y) - R_{N-2}(x)| \le (2 + \max\{\lambda,1\})\sum_{j=N-3}^{N-1}|y(x_j) - y_j|. \tag{2.4}$$

Наконец, докажем, что для $k = 0,1,\ldots,N-1$ разность $y(x_k) - y_k \to 0$ при $h \to 0$.

Для этого обозначим

$$\rho(x) = R'_{N,1}(x, y(x)) - F(x, R_{N,1}(x, y(x))), \tag{2.5}$$

где $y = y(x)$ — точное решение задачи (0.1), (0.2), значит,

$$\rho(x) = [R'_{N,1}(x, y(x)) - y'\,x)] + [F(x, y(x)) - F(x, R_{N,1}(x, y(x)))].$$

Тогда при $x \in [a, c]$ в силу условия (1.1) получим

$$|\rho(x)| \le \left|R'_{N,1}(x, y(x)) - y'(x)\right| + L \cdot |y(x) - R_{N,1}(x, y(x))|.$$

Отсюда и из леммы вытекает, что при $h \to 0$ имеем

$$\max\{|\rho(x)| : x \in [a, c]\} \to 0. \tag{2.6}$$

По построению сплайна $R_{N,1}(x, y)$ и по условию (0.2) имеем $R_{N,1}(x_0, y) = y(x_0) = A$, из (1.7) имеем $y_0 = A$, значит, $y(x_0) = y_0$.

Ясно, что по приведенной выше схеме построения приближенного решения $R_{N,1}(x)$ вполне аналогично равенствам (1.8) и (1.9) с учетом равенства (2.5), соответственно получим

$$py(x_{i-1}) + qy(x_i) + ry(x_{i+1}) = F(x_i, y(x_i)) + \rho(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \tag{2.7}$$

$$y(x_1) = \frac{(\lambda + 1)h}{2\lambda + 3}[F(x_1, y(x_1)) + \rho(x_1)] + A + \frac{(\lambda + 2)h}{2\lambda + 3}[F(a, A) + \rho(a)]. \tag{2.8}$$

Из равенств (2.8), (1.9) и условия (1.1) имеем

$$|y(x_1) - y_1| \le \frac{(\lambda + 1)h}{2\lambda + 3}|F(x_1, y(x_1)) - F(x_1, y_1)| + \frac{(\lambda + 1)h}{2\lambda + 3}|\rho(x_1)| + \frac{(\lambda + 2)h}{2\lambda + 3}|\rho(a)| \le$$
$$\le \frac{(\lambda + 1)h}{2\lambda + 3}L|y(x_1) - y_1| + \frac{(\lambda + 2)h}{2\lambda + 3}(|\rho(x_1)| + |\rho(a)|).$$

Отсюда и из неравенства (1.10) получим

$$|y(x_1) - y_1| \le \frac{2(\lambda + 2)h}{2\lambda + 3}(|\rho(x_1)| + |\rho(a)|),$$

значит, в силу (2.6) имеем $y(x_1) \to y_1$ при $h \to 0$.

Далее, при $i = 1, 2, \dots, N - 1$ в силу (2.7) и (1.8) выполняется равенство

$$p(y(x_{i-1}) - y_i) + q(y(x_i) - y_i) + r(y(x_{i+1}) - y_{i+1}) = F(x_i, y(x_i)) - F(x_i, y_i) + \rho(x_i),$$

откуда с учетом условия (1.1) и значений коэффициентов $p, q$ и $r$ имеем

$$|y(x_{i+1}) - y_{i+1}| = \left|\frac{2(\lambda + 1)h}{\lambda}(F(x_i, y(x_i)) - F(x_i, y_i)) + \frac{2(\lambda + 1)h}{\lambda}\rho(x_i) + \frac{\lambda + 2}{\lambda}(y(x_{i-1}) - y_{i-1}) -\right.$$
$$\left.- \frac{2}{\lambda}(y(x_i) - y_i)\right| \le \frac{2}{\lambda}((\lambda + 1)hL + 1)|y(x_i) - y_i| + \frac{\lambda + 2}{\lambda}|y(x_{i-1}) - y_{i-1}| + \frac{2(\lambda + 1)h}{\lambda}|\rho(x_i)|.$$

У нас $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) \to y_1$ при $h \to 0$ и выполняется условие (2.6). Поэтому по индукции из последних неравенств вытекает $y(x_k) - y_k \to 0$ при $h \to 0$ для $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Тогда, используя (2.3), (2.4), (2.1) и (2.2), получаем требуемую равномерную сходимость на отрезке $[a, c]$ приближенных решений:

$$\max\{|y(x) - R_{N,1}(x)| : x \in [a, c]\} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

## 3. ПРИМЕР ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРА НА СХОДИМОСТЬ

В случае задачи $\dfrac{dy}{dx} = y^2$ $(x \in [0, 1))$, $y(0) = 1$ с точным решением $y(x) = 1/(1 - x)$, $x \in [0, 1)$, уравнение (1.9) принимает вид

$$y_1 = \frac{\lambda + 1}{2\lambda + 3}hy_1^2 + 1 + \frac{\lambda + 2}{2\lambda + 3}h,$$

так как $F(x, y) = y^2$, $a = 0$, $b = 1$, $A = 1$.

Считаем, что $c \in (0;1)$, натуральное $N > \dfrac{1}{1-c}$, $h = c/(N-1)$, $x_i = ih$ $(i = 0,1,\dots,N)$, $g_i = x_{i+1} + \lambda h$ $(i = 1,2,\dots,N-1)$.

Покажем, что если для решения последнего (нелинейного) уравнения применим итерации, то путем выбора значения параметра $\lambda$ скорость сходимости итераций можно соответственно улучшить.

Для этого положим $\lambda = 1/h$ и применим итерации

$$z_0 = 1, \quad z_{k+1} = \frac{1+h}{2+3h} h z_k^2 + 1 + \frac{1+2h}{2+3h} h, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Тогда получим

$$z_1 = 1 + h, \quad z_2 = 1 + h + h^2 + h^4/(2+3h),$$

$$z_3 = \sum_{i=0}^{4} h^i + \frac{1}{2} h^5 + \bar{\bar{o}}(h^5) \quad (h \to 0).$$

Значит, третья итерация уже дает приближение $y_1 = \sum_{i=0}^{4} h^i$ к значению точного решения $y(x_1) = y(h) = 1/(1-h)$ достаточно высокого порядка относительно $h$, а именно, $y(x_1) - y_1 = \frac{1}{2}h^5 + \bar{\bar{o}}(h^5)$ $(h \to 0)$.

Остальные значения дискретного решения $y_2, y_3, \dots, y_N$ можно найти из соответствующих уравнений (1.7) и (1.8) при $F(x,y) = y^2$ и $\lambda = 1/h$, $y_0 = 1$.

Например, в случае $c = 0.5$, $h = 0.05$, $N = 11$, сохранив до шести знаков после запятой, имеем

$$y_1 = \sum_{i=0}^{4} h_i = 1.052631\dots.$$

Тогда из (1.7) и (1.8) соответственно получим

$$y_2 = -(3+4h)y_0 + 4(1+h)y_1 - 2(1+2h)h = 1.111050\dots,$$

$$y_{i+1} = (1+2h)y_{i-1} + 2hy_i((1+h)y_i - 1) = 1.1, \quad y_{i-1} + 0.1y_i(1.05y_i - 1), \quad i = 2,3,\dots,9.$$

Из последнего равенства последовательно имеем

$$y_3 = 1.176404\dots, \quad y_4 = 1.249826\dots, \quad y_5 = 1.333078\dots,$$

$$y_6 = 1.427482\dots, \quad y_7 = 1.537596\dots, \quad y_8 = 1.664711\dots,$$

$$y_9 = 1.815867\dots, \quad y_{10} = 1.995819\dots.$$

Легко показать, что для полученного дискретного решения $y_0, y_1, \dots, y_{10}$ и значений точного решения $y(x)$ в узлах $x_i = ih$ $(i = 0,1,\dots,10)$ из отрезка $[a,c] = [0;0.5]$ выполняется неравенство

$$|y(x_i) - y_i| < 0.005 \quad (i = 0,1,\dots,10),$$

причем левая часть уменьшается с приближением узлов $x_i$ к начальной точке 0.

## 4. О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть задача

$$y'' = F(x,y,y'), \quad x \in [a,b), \tag{4.1}$$

$$y(a) = A, \quad y'(a) = B, \tag{4.2}$$

в которой функция $F(x,u,v)$ считается достаточно гладкой, имеет единственное решение $y = y(x)$ класса $C^2_{[a,b)}$.

Тогда с использованием известного метода линеаризации $F$ можно построить приближенное решение задачи (4.1), (4.2) в виде рациональной сплайн-функции $R_{N,2}(x)$ из [8]. Однако при этом в случае нелинейной функции $F$ получается система скалярных уравнений относительно дискретного решения, которая содержит $N$, вообще говоря, нелинейных уравнений и приводит к громоздким вычислениям.

Далее показано, что с помощью перехода от задачи (4.1), (4.2) к задаче для нормальной системы уравнений

$$\frac{dy}{dx} = z, \tag{4.3}$$

$$\frac{dz}{dx} = F(x, y, z), \tag{4.4}$$

$$y(a) = A, \quad z(a) = B \tag{4.5}$$

можно получить систему скалярных уравнений относительно дискретного решения, которая содержит не более одного нелинейного уравнения.

Будем считать, что система (4.3)–(4.5) имеет единственное решение $(y(x), z(x))$, определенное в $[a, b)$, и приведем схему нахождения ее приближенного дискретного решения на произвольном отрезке $[a, c] \subset [a, b)$. Вопросы сходимости к точному решению можно рассмотреть по аналогии с предыдущим разделом.

Для данного $c \in (a, b)$ и натурального $N > (b - a)/(b - c)$ положим $h = (c - a)/(N - 1)$ и рассмотрим узлы $\Delta : x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, и полюсы $g_i = x_{i+1} + \lambda h$, $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Соответствующие узлам $\Delta$ приближенные значения функций $y(x)$ и $z(x)$ обозначим через $y_0, y_1, \dots, y_N$ и $z_0, z_1, \dots, z_N$ соответственно.

Для дискретных функций $Y$ и $Z$, определенных на сетке $\Delta$ со значениями $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$ и $\{z_0, z_1, \dots, z_N\}$ соответственно, по аналогии с (0.3) и (0.5) рассмотрим рациональные интерполянты $R_i(x, Y)$, $R_i(x, Z)$ и сплайн-функции $R_{N,1}(x, Y)$, $R_{N,1}(x, Z)$.

Тогда в полной аналогии с равенствами (1.7), (1.8) для нахождения неизвестных $y_j$ и $z_j$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} p_0 y_0 + q_0 y_1 + r_0 y_2 = z_0, \quad y_0 = A, \\ p y_{i-1} + q y_i + r y_{i+1} = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} p_0 z_0 + q_0 z_1 + r_0 z_2 = F(x_0, y_0, z_0), \quad z_0 = B, \\ p z_{i-1} + q z_i + r z_{i+1} = F(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \end{gathered} \tag{4.7}$$

с теми же значениями коэффициентов $p_0$, $q_0$, $r_0$ и $p$, $q$, $r$, что и в (1.4).

Если из первого уравнения этой системы и уравнения (4.6) при $i = 1$ исключить $y_2$, то придем к уравнению

$$(pr_0 - p_0 r) y_0 + (qr_0 - q_0 r) y_1 = r_0 z_1 - r z_0. \tag{4.8}$$

Аналогично из уравнения в третьей строке и уравнения (4.7) при $i = 1$, исключив $z_2$, получим

$$(pr_0 - p_0 r) z_0 + (qr_0 - q_0 r) z_1 = r_0 F(x_1, y_1, z_1) - r F(x_0, y_0, z_0). \tag{4.9}$$

Из (4.8) выразим $y_1$ через $z_1$ и подставим в (4.9). Тогда (4.9) превратится в уравнение относительно $z_1$, так как значения всех других параметров известны. Решив полученное, вообще говоря, нелинейное уравнение, можно найти $z_1$, а затем из (4.8) найдем соответствующее значение $y_1$.

Значения $y_j$ и $z_j$ для $j = 2, 3, \dots, N$ можно найти последовательной подстановкой уже найденных значений по равенствам (4.6) и (4.7).

Заметим также, что после нахождения значений $y_0, y_1, \dots, y_N$ при необходимости легко переходить к приближенному дважды гладкому решению задачи (4.1), (4.2) в виде рациональной сплайн-функции $R_{N,2}(x)$, соответствующие явные формулы которой приведены в [8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
3. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. *де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985. 304 с.
5. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Ковыпуклая интерполяция сплайнами по трехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2018. Т. 24. № 3. С. 1–12.
6. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестан. электрон. матем. известия. 2017. Вып. 7. С. 16–28.
7. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Матем. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 4. С. 592–603.
8. *Магомедова В.Г., Рамазанов А.-Р.К.* О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн-функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 579–586.