ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 8, с. 1235–1244

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.98

О ПЕРЕХОДАХ МЕЖДУ БАЗИСАМИ ПРОСТРАНСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SO(2,2)$

© 2021 г. И. А. Шилин[1,2,*], Дж. Чой[3]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ МЭИ, Россия

[2] 119991 Москва, ул. Малая Пироговская 1, МПГУ, Россия

[3] 38066 Gyeongju, Dongguk University, Republic of Korea

*e-mail: ilyashilin@li.ru

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.
Переработанный вариант 08.12.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2021 г.

Рассматриваются три базиса пространства представления. Для каждой пары этих базисов вычислены матричные элементы операторов перехода: для одной из них они выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса, для другой – через произведение функций Уиттекера, для третьей – через функции Бесселя, Бесселя–Клиффорда или G-функции Мейера. С помощью различных подходов (прямое разложение, сплетающий оператор или подпредставление) из матричных элементов получены формулы для специальных функций. Библ. 16.

Ключевые слова: группа $SO(2,2)$, матричный элемент представления, ${}_2F_1$, функция Уиттекера II рода, функция Бесселя II рода, функции Бесселя–Клиффорда.

DOI: 10.31857/S0044466921080068

1. ВВЕДЕНИЕ

Обычно новые формулы для специальных функций математической физики, используя теоретико-групповые методы, получают из соотношений между матричными элементами неприводимых представлений соответствующих групп Ли, записанными в счетных или континуальных базисах пространств представлений. В [1]–[3] для этих же целей были использованы матричные элементы линейных операторов перехода между базисами: в первой работе они были выражены через функции Уиттекера, во второй – через G-функции Мейера, в третьей – через функции Бесселя–Клиффорда или их мультииндексные аналоги (гиперфункции). В работе [4] мы фактически определили (с точностью до множителя) регулярную кулоновскую функцию $F_\sigma(\mu,\nu)$ как матричный элемент оператора перехода между двумя континуальными базисами и показали, что формулы различных интегральных преобразований этой функции являются следствием связи между матричными элементами сужений операторов представлений на однопараметрические подгруппы, записанными в этих базисах. Можно даже сказать, что матричные элементы перехода между базисами суть матричные элементы оператора $T(e) \equiv E$ (где e и E – нейтральные элементы групп и T – представление), записанные в "смешанном" базисе. В этой работе рассмотренный в [1] подход мы переносим на группу $SO(2,2)$.

Напомним, что специальная псевдоортогональная группа $SO(2,2)$ состоит из унимодулярных матриц g размера 4×4, удовлетворяющих условию $ge_{2,2}g^{\mathrm{T}} = e_{2,2}$, где $e_{2,2} = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, а ее неприводимое представление можно реализовать в линейном пространстве $\mathfrak{D}^{(\sigma)}$ бесконечно дифференцируемых σ-однородных функций f, заданных на конусе $C: x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, где σ – комплексное число, не являющееся целым, а σ-однородность означает, что для всякого $\lambda > 0$ выполняется равенство $f(\lambda x) = \lambda^\sigma f(x)$. Указанное представление является квазирегулярным, т.е. определяется формулой $T^{(\sigma)}(g)[f(x)] = f(g^{-1}x)$. В этой работе выделим некоторые базисы в пространстве $\mathfrak{D}^{(\sigma)}$ и вычислим (бесконечные) матрицы операторов перехода между ними, а также получим новые формулы, связывающие различные специальные функции и вытекающие из связи между базисами.

Пусть γ_1 – сечение конуса C сферой радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, являющееся прямым произведением двух сфер единичного радиуса. Пусть γ_2 – двуполостный гиперболоид, являющийся пересечением конуса C плоскостями $x_4 = \pm 1$. Пусть, наконец, γ_3 – гиперболический параболоид, получающийся при пересечении конуса C “плоскостью” $x_2 + x_4 = 0$. Иначе говоря,

$$\gamma_1 = \{(\sin\alpha_1, \cos\alpha_1, \sin\beta_1, \cos\beta_1) | \alpha_1, \beta_1 \in [-\pi, \pi]\},$$
$$\gamma_2 = \{(\cosh\alpha_2 \sin\beta 2, \cosh\alpha_2 \cos\beta_2, \sinh\alpha_2, \pm 1) | \alpha_2 \in \mathbb{R}, \beta_2 \in [-\pi, \pi)\},$$

и

$$\gamma_3 = \left\{\left(\alpha_3, \frac{1-\alpha_3^2+\beta_3^2}{2}, \beta_3, \frac{1+\alpha_3^2-\beta_3^2}{2}\right) \middle| \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Обозначим через H_i подгруппу в $SO(2,2)$, действующую транзитивно на контуре γ_i, и $d\gamma_i$ – меру на контуре γ_i, инвариантную относительно линейных операторов $T^{(\sigma)}(g)$ при $g \in H_i$. Так как

$$(dx)_{\gamma_1} = \frac{dx_{\zeta(1)}dx_{2+\xi(1)}}{|x_{\zeta(2)}x_{\xi(2)}|} \quad (\zeta, \xi \in \mathbf{S}_2),$$
$$(dx)_{\gamma_2} = \frac{dx_{\tau(1)}dx_{\tau(2)}}{|x_{\tau(3)}|} \quad (\tau \in \mathbf{S}_3),$$
$$(dx)_{\gamma_3} = dx_{\zeta(1)}dx_{2+\xi(1)} \quad (\zeta, \xi \in \mathbf{S}_2),$$

$H_1 \simeq SO(2)\times SO(2)$, $H_2 \simeq SO(2,1)$ и с помощью матриц-строк $m_i(t) = (\delta_{i,1}t, \delta_{i,2}t)$ (где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера) группу H_3 можно представить как прямое произведение подгрупп $H_{3,i}$, состоящих соответственно из матриц

$$g_i(t) = \begin{pmatrix} 1+\frac{(-1)^i t^2}{2} & (-1)^{i+1}m_i(t) & \frac{(-1)^{i+1}t^2}{2} \\ -m_i^{\mathrm{T}}(t) & \operatorname{diag}(1,1) & m_i^{\mathrm{T}}(t) \\ \frac{t^2}{2} & (-1)^{i+1}m_i(t) & 1-\frac{(-1)^i t^2}{2} \end{pmatrix},$$

то в введенных выше координатах (α_i, β_i) получаем $d\gamma_1 = d\alpha_1$, $d\gamma_2 = \cosh\alpha_2 d\alpha_2 d\beta_2$ и $d\gamma_3 = d\alpha_3 d\beta_3$.

Определим билинейные функционалы

$$\mathrm{F}_j : \mathfrak{D}^{(\sigma)} \times \mathfrak{D}^{(\hat{\sigma})} \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_{\gamma_j} u(x)v(x)d\gamma_j, \quad j = 1,2,3,$$

и будем говорить, что пара пространств представления, на которых они заданы, согласована, если $\mathrm{F}_i = \mathrm{F}_j$ для любых $i, j \in \{1,2,3\}$.

Лемма. *При* $\hat{\sigma} = -\sigma - 2$ *пара* $(\mathfrak{D}^{(\sigma)}, \mathfrak{D}^{(\hat{\sigma})})$ *согласована.*

Доказательство этой леммы проводится так же, как и для группы $SO(3,1)$ [5], и основывается на однородности и непрерывности входящих в эти пространства функций, а также на том факте, что каждый из контуров γ_1, γ_2 и γ_3 по одному разу пересекает все образующие конуса C за исключением не более двух из них. Например, очевидно, что $K = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \neq 0$ на контуре γ_3, поэтому

$$\mathrm{F}_3(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_3 \int_{-\infty}^{+\infty} K^\sigma u\left(\frac{\alpha_3}{K}, \frac{1-\alpha_3^2+\beta_3^2}{2K}, \frac{\beta_3}{K}, \frac{1+\alpha_3^2-\beta_3^2}{2K}\right) \times$$
$$\times K^{-\sigma-2} v\left(\frac{\alpha_3}{K}, \frac{1-\alpha_3^2+\beta_3^2}{2K}, \frac{\beta_3}{K}, \frac{1+\alpha_3^2-\beta_3^2}{2K}\right) d\beta_3.$$

Переходя к переменным

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{1-\alpha_3^2+\beta_3^2}{2\alpha_3^2} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{1+\alpha_3^2-\beta_3^2}{2\beta_3^2}$$

и учитывая, что $\dfrac{\partial(\alpha_2,\beta_2)}{\partial(\alpha_1,\beta_1)} = K^2$, получаем равенство $\mathrm{F}_3(u,v) = \mathrm{F}_1(u,v)$.

Обычно базисы функционального пространства представления строятся с помощью полного набора коммутирующих самосопряженных операторов: они состоят из всех общих собственных функций операторов этого набора и отвечают цепочке вложенных друг в друга подгрупп. Однако для группы $SO(2,2)$ можно заметить, что представление $T^{(\sigma)}$ можно реализовать в пространстве $\mathfrak{D}_1$ сужений функций из $\mathfrak{D}^{(\sigma)}$ на контур γ_1. В самом деле, значение функции $f \in \mathfrak{D}^{(\sigma)}$ в ненулевой точке $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ конуса C можно представить в виде

$$f(x) = f(Kx^*) = N^\sigma f(x^*), \tag{1.1}$$

где точка $x^* = \left(\dfrac{x_1}{K},\dfrac{x_2}{K},\dfrac{x_3}{K},\dfrac{x_3}{K}\right)$, очевидно, принадлежит контуру γ_1. При этом в силу непрерывности функции f выполняется равенство $f(0,0,0,0) = \lim\limits_{x\to(0,0,0,0)} f(x)$. Поскольку γ_1 пересекает все образующие конуса C и функции $(x_2+\mathbf{i}x_1)^{p_1}(x_4+\mathbf{i}x_3)^{q_1} \equiv \mathrm{e}^{\mathbf{i}p_1\alpha_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}q_1\beta_1}$ $(p_1,q_1\in\mathbb{Z})$ (p_1+q_1)-однородны, для любого

$$h_1(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

являются собственными функциями оператора $T^{(\sigma)}(h_1)$ (отвечающими собственному значению $\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(p_1\varphi+q_1\psi)}$) и образуют полную систему функций, то, снабжая эти функции “компенсирующим” множителем $K^{\sigma-p_1-q_1}$ и поднимая по однородности эти функции на весь конус (по формуле (1.1)), получаем базис

$$B_1^{(\sigma)} = \{f_{p_1,q_1}^{(\sigma)}(x) = (x_1^2+x_2^2)^{(\sigma-p_1-q_1)2}(x_2+\mathbf{i}x_1)^{p_1}(x_4+\mathbf{i}x_3)^{q_1}\}$$

в $\mathfrak{D}^{(\sigma)}$. Так как контуры γ_2 и γ_3 пересекают все, кроме одной или двух, образующие конуса C и функции из $\mathfrak{D}$ непрерывны, то аналогично получаем базис

$$B_2^{(\sigma)} = \left\{f_{p_2,q_2,\pm}^{(\sigma)*}(x) = (x_4)_\pm^{\sigma-\mathbf{i}q_2}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+x_3\right)^{\mathbf{i}q_2}(x_2+\mathbf{i}x_1)^{p_2}(x_1^2+x_2^2)^{-p_2/2}\right\},$$

в котором $p_2\in\mathbb{Z}$, $q_3\in\mathbb{R}$ и однородные обобщенные функции $(x)_\pm^\lambda$ определены формулой [6]

$$(x)_\pm^\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \operatorname{sign} x = \mp 1 \text{ или } x = 0, \\ |x|^\lambda & \text{при} \quad \operatorname{sign} x = \pm 1, \end{cases}$$

и базис

$$B_3^{(\sigma)} = \left\{f_{p_3,q_3}^{(\sigma)**}(x) = |x_2+x_4|^\sigma \exp\frac{\mathbf{i}(p_3x_1+q_3x_3)}{x_2+x_4}\right\},$$

в котором $p_3,q_3\in\mathbb{R}$.

2. О ПЕРЕХОДЕ $B_1^{(-\sigma-2)} \to B_2^{(-\sigma-2)}$

Вычислим матричные элементы линейного оператора пространства $\mathfrak{D}^{(-\sigma-2)}$, переводящего базис $B_1^{(-\sigma-2)}$ в базис $B_2^{(-\sigma-2)}$.

Из разложения

$$f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}(x) = \sum_{p_1\in Z}\sum_{q_1\in Z} c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1} f^{(-\sigma-2)}_{p_1,q_1}(x) \quad (2.1)$$

следует, что

$$\mathrm{F}_i(f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}, f^{(\sigma)}_{\hat{p}_1,\hat{q}_1}) = \sum_{p_1\in\mathbb{Z}}\sum_{q_1\in\mathbb{Z}} c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1}\mathrm{F}_1(f^{(-\sigma-2)}_{p_1,q_1}, f^{(\sigma)}_{\hat{p}_1,\hat{q}_1}) =$$
$$= \sum_{p_1\in\mathbb{Z}}\sum_{q_1\in\mathbb{Z}} c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{i}(p_1+\hat{p}_1)\alpha_1}d\alpha_1\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathbf{i}(q_1+\hat{q}_1)\alpha_1}d\beta_1,$$

откуда

$$c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1} = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_1(f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}, f^{(\sigma)}_{-p_1,-q_1}) = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_i(f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}, f^{(\sigma)}_{-p_1,-q_1}).$$

Теорема 1. *При* $\Re(\sigma) > -1$ *и* $q_1, q_2 \neq 0$ *имеем*

$$c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1} = \frac{\delta_{p_1,p_2}(\pm\mathbf{i})^{q_1}}{2^{\sigma+1}\pi}[\mathbf{i}e^{(-q_2+\mathbf{i}\sigma)\pi/2}B(\mathbf{i}q_2+\sigma+1,-\sigma-q_1)\,{}_2F_1(\mathbf{i}q_2-\sigma,-\sigma-q_1;1+\mathbf{i}q_2-q_1;-1)+$$
$$+(-1)^{q_1+1}\mathbf{i}e^{(-q_2-\mathbf{i}\sigma)\pi/2}B(1+\sigma-\mathbf{i}q_2,-\sigma-q_1)\,{}_2F_1(-\mathbf{i}q_2-\sigma,-\sigma-q_1;1-\mathbf{i}q_2-q_1;-1)].$$

Доказательство. Поскольку

$$f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}(\alpha_1,\beta_1)\Big|_{[-\pi,\pi]\times\left[\mp\frac{\pi}{2},\pi\mp\frac{\pi}{2}\right]} = e^{\mathbf{i}p_2\alpha_1}\left|\cos\beta_1\right|^{\sigma-\mathbf{i}q_2}(1+\sin\beta_1)^{\mathbf{i}q_2},$$
$$f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}(\alpha_1,\beta_1)\Big|_{[-\pi,\pi]\times\left[\pm\frac{\pi}{2},\pi\pm\frac{\pi}{2}\right]} = 0,$$

имеем

$$c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,q_1} = \mathrm{F}_1(f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,\pm}, f^{(\sigma)}_{-p_1,-q_1}) = \frac{2^{\sigma-2}}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathbf{i}(p_1-p_2)\alpha_1}d\alpha_1\times$$
$$\times\int_{\mp\pi/2}^{\pi\mp\pi/2}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}q_1\beta_1}\sin^{\sigma+\mathbf{i}q_2}\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos^{\sigma-\mathbf{i}q_2}\left(\frac{\beta_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)d\beta_1$$

и применяем формулу (см. [7, 2.5.32.6])

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\exp(\mathbf{i}px)\sin\mu x]\cos^{\nu}x dx = 2^{-\mu-\nu-1}\left[\exp\left(\frac{\mathbf{i}\pi(p-\nu-1)}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{p-\mu-\nu}{2},\nu+1\right)\times\right.$$
$$\times\,{}_2F_1\left(-\mu,\frac{p-\mu-\nu}{2};\frac{p-\mu+\nu}{2}+1;-1\right)+\exp\left(\frac{\mathbf{i}\pi(\mu+1)}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{p-\mu-\nu}{2},\mu+1\right)\times$$
$$\left.\times\,{}_2F_1\left(-\nu,\frac{p-\mu-\nu}{2};\frac{p+\mu-\nu}{2}+1;-1\right)\right],$$

где $\Re(\mu) > -1$ и $\Re(\nu) > -1$.

Помимо случая, рассмотренного в теореме 1, можно показать, что $c^{(-\sigma-2)}_{p_2,q_2,\pm,p_1,0} = 2^{-\sigma-2}\pi^{-1}\delta_{p_1,p_2}\mathrm{B}\left(\frac{\sigma+\mathbf{i}q_2}{2},\frac{\sigma-\mathbf{i}q_2}{2}\right)$ и

$$c^{(-\sigma-2)}_{p_2,0,\pm,p_1,q_1} = \frac{\delta_{p_1,p_2}\mathbf{i}\sin(\pi(\sigma+q_1)/2)}{2^{\sigma}\pi^2(\sigma+q_1)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi(\sigma+1)/2}}\,{}_2F_1(-\sigma,-(q_1+\sigma)/2;1-(q_1+\sigma)/2;-1). \quad (2.2)$$

Из разложения (2.1) получаются новые формулы для рядов: например, полагая $q_2 = 0$ и учитывая равенство (2.2), получаем тождество

$$\sum_{q_1\in\mathbb{Z}}\frac{e^{\mathbf{i}q_1\beta_2}}{\sigma+q_1}\,{}_2F_1(-\sigma,-(q_1+\sigma)/2;1-(q_1+\sigma)/2;-1) = -2^{\sigma}\pi^2\mathbf{i}\cos^{\sigma}\beta_2 e^{\mathbf{i}\pi(\sigma+1)/2}$$

при $-\frac{\pi}{2} < \beta_2 < \frac{\pi}{2}$.

3. О ПЕРЕХОДЕ $B_1^{(-\sigma-2)} \to B_3^{(-\sigma-2)}$

Покажем, что матричные элементы перехода от базиса $B_1^{(-\sigma-2)}$ к базису $B_3^{(-\sigma-2)}$ можно выразить через функции Уиттекера II рода.

Из разложения

$$f_{p_3,q_3}^{(-\sigma-2)**}(x) = \sum_{p_1\in\mathbb{Z}}\sum_{q_1\in\mathbb{Z}} d_{p_3,q_3,p_1,q_1}^{(-\sigma-2)} f_{p_1,q_1}^{(-\sigma-2)}(x) \tag{3.1}$$

находим, что

$$d_{p_3,q_3,p_1,q_1}^{(-\sigma-2)} = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_1(f_{p_3,q_3}^{(-\sigma-2)**}, f_{-p_1,-q_1}^{(\sigma)}) = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_i(f_{p_3,q_3}^{(-\sigma-2)**}, f_{-p_1,-q_1}^{(\sigma)}).$$

Пусть $A_\pm = (p_3 \pm q_3)/2$.

Теорема 2. *При* $\Re(\sigma) < -1$ *и* $|p_3| \neq |q_3|$ *имеем*

$$d_{p_3,q_3,p_1,q_1}^{(-\sigma-2)} = \frac{\operatorname{sign}(A_+A_-)W_{-\frac{(p_1+q_1)\operatorname{sign}A_+}{2},\frac{\sigma+1}{2}}(2|A_+|)W_{\frac{(q_1-p_1)\operatorname{sign}A_-}{2},\frac{\sigma+1}{2}}(2|A_-|)}{8|A_+A_-|^{\sigma/2+1}\Gamma(-(\operatorname{sign}A_+(p_1+q_1)+\sigma)/2)\Gamma((\operatorname{sign}A_-(q_1+p_1)-\sigma)/2)}.$$

Доказательство. В самом деле, переходя к новой кооодинатной системе (z_+, z_-), в которой $z_\pm = \alpha_3 \pm \beta_3$, получаем

$$d_{p_3,q_3,p_1,q_1}^{(-\sigma-2)} = (4\pi^2)^{-1}\mathrm{F}_3(f_{p_3,q_3}^{(-\sigma-2)**}, f_{-p_1,-q_1}^{(\sigma)}) = (4\pi^2)^{-1} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} d\alpha_3 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{(p_3\alpha_3+q_3\beta_3)\mathbf{i}}\left(\frac{\alpha_3^4+\beta_3^4+1}{4}+\frac{\alpha_3^2+\beta_3^2-\alpha_3^2\beta_3^2}{2}\right)^{\frac{\sigma-p_1-q_1}{2}}\left(\frac{1-\alpha_3^2+\beta_3^2}{2}+\mathbf{i}\alpha_3\right)^{p_1}\left(\frac{1+\alpha_3^2-\beta_3^2}{2}+\mathbf{i}\beta_3\right)^{q_1} d\beta_3 =$$

$$= \frac{2^{-\sigma-3}}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathbf{i}A_+z_+}(1+\mathbf{i}z_+)^{\frac{\sigma+p_1+q_1}{2}}(1-\mathbf{i}z_+)^{\frac{\sigma-p_1-q_1}{2}} dz_+ \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathbf{i}A_-z_-}(1+\mathbf{i}z_-)^{\frac{\sigma+p_1-q_1}{2}}(1-\mathbf{i}z_-)^{\frac{\sigma-p_1+q_1}{2}} dz_-$$

и используем формулу (см. [8, 3.384.9])

$$\int_{\mathbb{R}} (a+\mathbf{i}x)^{-2\nu_-}(b-\mathbf{i}x)^{-2\nu_+}e^{-\mathbf{i}px}dx = \frac{2\pi\operatorname{sign}p|p|^{\nu_++\nu_--1}W_{(\nu_+-\nu_-)\operatorname{sign}p,1/2-\nu_+-\nu_-}}{(a+b)^{\nu_++\nu_-}e^{(a-b)|p|/2}\Gamma(2\nu_{\operatorname{sign}p})}, \quad p \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

выполняющуюся при $\Re(a), \Re(b) > 0$ и $\Re(\mu_+ + \nu_-) > \frac{1}{2}$.

Рассматривая сужения функций $a_{p_1,q_1}^{(-\sigma-2)}$ и $a_{p_3,q_3}^{(-\sigma-2)**}$ на сечение γ_1 и учитывая теорему 2, из (3.1) выводим равенство

$$|\sin\alpha_1 + \sin\beta_1|^\sigma \mathrm{e}^{\frac{\mathbf{i}(p_3\cos\alpha_1+q_3\cos\beta_1)}{\sin\alpha_1+\sin\beta_1}} = \sum_{p_3,q_3\in\mathbb{Z}} d_{p_3,q_3,p_1,q_1}\mathrm{e}^{\mathbf{i}(p_1\alpha_1+q_1\beta_1)}.$$

Помимо пространств $\mathfrak{D}^{(-\sigma-2)}$, неприводимые представления групп $SO(s,t)$ могут быть реализованы [9] в пространствах $\mathfrak{H}$ однородных $\Delta_{s,t}$-гармонических функций на гиперболоидах

$$\sum_{i=1}^{s} y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} y_i^2 = 1,$$

где

$$\Delta_{s,t} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} - \sum_{i=s+1}^{s+t}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$

(оператор Лапласа—Бельтрами). В случае группы $SO(2,2)$ соответствующим сплетающим оператором (изоморфизмом $\mathfrak{D}^{(-\sigma-2)} \to \mathfrak{H}$, перестановочным со всеми операторами из $\operatorname{Im} T^{(-\sigma-2)}$) является интегральный оператор

$$\mathrm{P}_\sigma(y)(f) = \int\limits_{\gamma_i} f(x)\left|x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4\right|^a d\gamma_i,$$

который в силу леммы 1 не зависит от выбора контура γ_i, поскольку $\left|x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4\right|^\sigma \in \mathfrak{D}^{(\sigma)}$. Выберем $y = (0, \cosh t, 0, \sinh t)$. Интегрируя по γ_3, в силу формулы 8 на странице 202 в [10] и формул [7, 2.5.6.1—2] имеем при $q_3 \neq 0$

$$\mathrm{P}_\sigma(y)(f_{0,q_3}^{(-\sigma-2)**}) = \left(\frac{\cosh t}{2}\right)^\sigma \int\limits_{-1/\cosh t}^{1/\cosh t} d\alpha_3 \int\limits_{\mathbb{R}} \left|(\beta_3 + \tanh t)^2 + 1/\cosh^2 t - \alpha_3^2\right|^\sigma e^{\mathbf{i}q_3\beta_3} d\beta_3 +$$

$$+ \frac{\cosh^\sigma t}{2^{\sigma-1} e^{\mathbf{i}q_3 \tanh t}} \int\limits_{|\alpha_3|>1/\cosh t} d\alpha_3 \int\limits_0^{+\infty} \left|\beta_3^2 - (\alpha_3^2 - 1/j\cosh^2 t)\right|^\sigma \cos|q_3|\beta_3 d\beta_3 = \frac{2^{5/2}\sqrt{\pi}\cosh^\sigma t}{|q_3|^{\sigma+1/2} e^{\mathbf{i}|q_3|\tanh t}\Gamma(-\sigma)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{1/\cosh t} \frac{u^{\sigma+3/2} K_{\sigma+1/2}(|q_3|u)du}{\sqrt{1/\cosh^2 t - u^2}} + \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\sigma+1)}{|q_3|^{\sigma+1/2} e^{\mathbf{i}|q_3|\tanh t}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\sigma+3/2}[J_{\sigma+1/2}(|q_3|u) - Y_{-\sigma-1/2}(|q_3|u)]du}{\sqrt{u^2 + 1/\cosh^2 t}},$$

откуда, применяя формулы [11, 10.2.12, 8.5.15, 9.2.20], а также, учитывая формулу [12, 7.14.1], получаем, что $\mathrm{P}_\sigma(y)(f_{0,q_3}^{(-\sigma-2)**})$ можно представить в виде линейной комбинации бесселевых функций $I_{-\sigma-1}\left(\frac{|q_3|}{\cosh t}\right)$, $K_{\sigma+1}\left(\frac{|q_3|}{\cosh t}\right)$, $\mathbf{L}_{-\sigma-1}\left(\frac{|q_3|}{\cosh t}\right)$ и произведения $I_{\sigma+1}\left(\frac{|q_3|}{\cosh t}\right)K_{\sigma+1}\left(\frac{|q_3|}{\cosh t}\right)$, которая здесь не приводится ввиду ее громоздкости. Точно так же получается формула

$$\mathrm{P}_\sigma(y)(f_{p_1,q_1}^{(-\sigma-2)}) = 2\left|\sinh t\right|^\sigma \int\limits_{|\sin\alpha_1|\tanh t} e^{\mathbf{i}p_1\alpha_1}[B_0 + B_1]d\alpha_1 +$$

$$+ 2\cosh^\sigma t \int\limits_{\tanh t<|\sin\alpha_1|<\pi} e^{\mathbf{i}p_1\alpha_1} d\alpha_1 \int\limits_0^\pi \left|\sin\alpha_1 - \tanh t\cos\beta_1\right|^\sigma \cos|q_1|\beta_1 d\beta_1,$$

где

$$B_k = \int\limits_0^{k\pi+(-1)k\arccos(\coth t\sin\alpha_1)} \left|(-1)^k \coth^2 t\sin^2\alpha_1 - \cos\beta_1\right|^\sigma \cos|q_1|\beta_1 d\beta_1.$$

По формулам [7, 2.5.16.1, 2.5.16.28], учитывая связь между присоединенными функциями Лежандра $P_\sigma^{|q_1|}\left(\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{\sin^2\alpha_1 - \tanh^2 t}}\right)$ и $Q_{-|q_1|-1/2}^{-\sigma-1/2}(\sin\alpha_1)$, находим, что

$$\mathrm{P}_\sigma(y)(f_{p_1,q_1}^{(-\sigma-2)}) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\Gamma(\sigma+1)\sum_{k=0}^1 \left[(-1)^{k|q_1|} \int\limits_{|\sin\alpha_1|\tanh t} (1 - \coth^2 t\sin^2\alpha_1)^{\sigma/2+1/4} e^{\mathbf{i}p_1\alpha_1} P_{|q_1|-1/2}^{-1/2-\sigma}((-1)^k \coth t\sin\alpha_1)d\alpha_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{kp_1+1}2^{3/2}\mathbf{i}\sqrt{\pi}\cosh^\sigma t}{e^{\mathbf{i}\sigma\pi}(\sigma+1)_{|q_1|}\Gamma(-\sigma-|q_1|)} \int\limits_{\operatorname{arcsin}\tanh t}^{\pi-\operatorname{arcsin}\tanh t} (\sin^2\alpha_1 - \tanh^2 t)^{\sigma/2+1/4} Q_{-|q_1|-1/2}^{-\sigma-1/2}(\sin\alpha_1)e^{\mathbf{i}p_1\alpha_1}d\alpha_1\right],$$

где последние два интеграла равны нулю, а первые два с помощью формул косинуса и синуса кратных углов сводятся к суммам

$$\sum_{n=0}^{[|p_1|/2]} (-1)^n \binom{|p_1|}{2n} \int\limits_0^1 u^{2n}(1-u^2)^{\sigma/2+|p_1|-2n+5/4} P_{-|q_1|-1/2}^{-\sigma-1/2}(u)du$$

и

$$\sum_{n=0}^{[(|p_1|-1)/2]}(-1)^n\binom{|p_1|}{2n+1}\int_0^1 u^{2n+1}(1-u^2)^{\sigma/2+|p_1|-2n+1/4}P^{-\sigma-1/2}_{-|q_1|-1/2}(u)du$$

(квадратные скобки обозначают целую часть), которые по формуле [7, 2.17.2] выражаются через обобщенные гипергеометрические функции ${}_3F_2$. Тем самым из разложения (3.1) получается соотношение

$$\mathrm{P}_\sigma(y)(f^{(-\sigma-2)**}_{0,q_3}) = \sum_{p_1,q_1\in\mathbb{Z}} d_{0,q_3,p_1,q_1}\mathrm{P}_\sigma(y)(f^{(-\sigma-2)}_{p_1,q_1}),$$

левая часть которого является линейной комбинацией бесселевых функций и их произведения, а правая – двойным рядом, члены которого содержат произведение функций Уиттекера II рода и ${}_3F_2$-функций.

4. О ПЕРЕХОДЕ $B_2^{(-\sigma-2)} \to B_3^{(-\sigma-2)}$

Представляя функцию $f^{(-\sigma-2)**}_{p_3,q_3}$ в виде интеграла

$$f^{(-\sigma-2)**}_{p_3,q_3} = \sum_{p_2\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,+}f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,+} + e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,-}f^{(-\sigma-2)*}_{p_2,q_2,-}]dq_2, \tag{4.1}$$

получаем равенство

$$e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,\pm} = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_i(f^{(-\sigma-2)**}_{p_3,q_3}, f^{(-\sigma-2)*}_{-p_2,-q_2,\pm}).$$

Покажем, что матричные элементы $e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,\pm}$ в частном случае можно выразить через функцию Бесселя II рода.

Теорема 3. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$ *имеем*

$$e^{(-\sigma-2)}_{0,q_3,0,0,\pm} = -\frac{\Gamma(\sigma+1)}{2^{(1\pm1)/2}\pi|q_3|^{\sigma+1}}Y_{\pm(\sigma+1)}(|q_3|).$$

Доказательство. Используя формулу [7, 2.3.5.3], имеем

$$e^{(-\sigma-2)}_{0,q_3,0,0,+} = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_3(f^{(-\sigma-2)**}_{0,q_3}, f^{(\sigma)*}_{0,0,+}) = \frac{2^{-\sigma-2}}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}}d\alpha_3\int_{-\sqrt{1+\alpha_3^2}}^{\sqrt{1+\alpha_3^2}}(1+\alpha_3^2-\beta_3^2)^\sigma \mathrm{e}^{\mathbf{i}q_3\beta_3}d\beta_3 =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\sigma)}{(2\pi)^{3/2}|q_3|^{1/2+\sigma}}\int_{\mathbb{R}}(1+\alpha_3^2)^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{4}}J_{\sigma+1/2}\left(|q_3|\sqrt{1+\alpha_3^2}\right)d\alpha_3.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой [13, 2.12.4.17] и получим

$$\int_a^{+\infty}x^{1+\nu}(x^2-a^2)^{\mu-1}J_\nu(cx)dx = \frac{2^{\mu-1}a^{\mu+\nu}\Gamma(\mu)}{c^\mu}[\cos(\mu\pi)J_{\nu+\mu}(ac)-\sin(\mu\pi)Y_{\nu+\mu}(ac)],$$

где $a, c, \Re(\mu) > 0$ и $\Re(2\mu+\nu) < \frac{3}{2}$.

Точно так же, используя [7, 2.3.5.5], получаем

$$e^{(-\sigma-2)}_{0,q_3,0,0,-} = \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_3(h^{**}_{0,q_3}, f^{*}_{0,0,+}) = \frac{2^{-\sigma-2}}{\pi^2}\sum_{k\in\{0,1\}}\int_{\mathbb{R}}d\alpha_3\int_{\sqrt{1+\alpha_3^2}}^{+\infty}(1+\alpha_3^2-\beta_3^2)^\sigma \mathrm{e}^{(-1)^k\mathbf{i}q_3\beta_3}d\beta_3 =$$

$$= \frac{\mathbf{i}\Gamma(1+\sigma)}{(2\pi)^{3/2}(q_3)^{1/2+\sigma}}\int_0^{+\infty}(1+\alpha_3^2)^{\frac{\sigma}{2}+\frac{1}{4}}\left[H^{(1)}_{-\sigma-1/2}\left(q_3\sqrt{1+\alpha_3^2}\right)-H^{(2)}_{-\sigma-1/2}\left(q_3\sqrt{1+\alpha_3^2}\right)\right]d\alpha_3,$$

после чего остается применить формулу [13, 2.13.3.11]

$$\int_a^{+\infty} x^{1-\nu}(x^2-a^2)^{\mu-1}Y_\nu(cx)dx = 2^{\mu-1}a^{\mu-\nu}c^{-\mu}\Gamma(\mu)Y_{\nu-\mu}(ac),$$

выполняющуюся при $a, c > 0$, $0 < \Re(\mu) < \dfrac{2\Re(\nu)+3}{4}$.

Покажем, что в более общем случае матричные элементы $e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,\pm}$ выражаются через (обычные) функции Бесселя–Клиффорда I рода или модифицированные функции Бесселя–Клиффорда II рода.

Теорема 4. *При* $-1 < \Re(\sigma) < 0$ *имеем*

• *в случае* $\operatorname{sign} A_+ = \operatorname{sign} A_-$

$$e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,+} = -\frac{\cos(\sigma\pi)\Gamma(\sigma+1)}{2^{\sigma+1}\pi^2}\mathcal{K}_{\sigma+1}(A_+A_-);$$

• *в случае* $\operatorname{sign} A_+ = -\operatorname{sign} A_-$

$$e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,+} = \frac{\mathbf{i}\operatorname{sign} A_+\cos(\sigma\pi)\Gamma(\sigma+1)}{2^{\sigma+3}\pi|A_+A_-|^{\sigma+1}}\mathcal{C}_{-\sigma-1}(A_+A_-).$$

Доказательство. Представим интеграл

$$e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,+} = \frac{2^{-\sigma-3}}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{i}A_-z_-}dz_-\int_{\mathbb{R}} e^{\mathbf{i}A_+z_+}(1+z_-z_+)_+^\sigma dz_+$$

в виде суммы $e_{p_3,q_3,0,0,+} = S_0 + S_1$, в которой

$$S_k = \frac{2^{-\sigma-3}}{\pi^2}\int_0^{(-1)^k\infty} e^{\mathbf{i}A_-z_-}dz_-\int_{-1/z_-}^{(-1)^k\infty} e^{\mathbf{i}A_+z_+}(1+z_-z_+)^\sigma dz_+ = \frac{2^{-\sigma-3}}{\pi^2}\int_0^{(-1)^k\infty} z_-^{-1}e^{\mathbf{i}(A_-z_- - A_+/z_-)}dz_-\int_0^{+\infty} e^{\mathbf{i}A_+t/z_-}t^\sigma dt =$$

$$= \frac{(-1)^k\mathbf{i}\operatorname{sign} A_+\Gamma(\sigma+1)}{2^{\sigma+3}\pi^2|A_+|^{\sigma+1}}e^{(-1)^k\mathbf{i}\operatorname{sign} A_+\sigma\pi/2}\int_0^{+\infty} z_-^\sigma e^{(-1)^k\mathbf{i}(A_-z_- - A_+/z_-)}dz_-.$$

Применяя формулу [7, 2.5.23.7], получаем

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\operatorname{trig}(ax-b/x)dx = 2(ba^{-1})^{\nu/2}\operatorname{trig}(\nu\pi/2)K_\nu(2\sqrt{ab}), \tag{4.2}$$

в которой $a, b > 0$ и $|\Re(\nu)| < 1$, $\operatorname{trig} x \in \{\cos x, \sin x\}$, для случая $\operatorname{sign} A_+ = \operatorname{sign} A_-$ получаем

$$S_k = -\frac{\Gamma(\sigma+1)\mathcal{K}_{\sigma+1}(A_+A_-)}{2^{\sigma+2}\pi^2}e^{(-1)^k\mathbf{i}\operatorname{sign} A_+\sigma\pi}.$$

По формуле [7, 2.5.23.4] имеем

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1}\operatorname{trig}(ax+b/x)dx = \frac{\pi}{2}(ba^{-1})^{\nu/2}\widetilde{\operatorname{trig}}(\nu\pi/2)\left[J_{-\nu}(2\sqrt{ab}) + \varepsilon J_\nu(2\sqrt{ab})\right], \tag{4.3}$$

в которой $a, b > 0$ и $|\Re(\nu)| < 1$, $\widetilde{\operatorname{trig}}\, x$ обозначает соответствующую кофункцию для $\operatorname{trig} x \in \{\cos x, \sin x\}$ и ε – четность функции $\operatorname{trig} x$, можно получить аналогичные формулы для S_0 и S_1 в случае $\operatorname{sign} A_+ = -\operatorname{sign} A_-$.

Используя известные формулы (см., например, [14, с. 325]) функции $e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,+}$ можно выразить через G-функции Мейера:

$$e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,+}=\begin{cases}-\dfrac{\cos(\sigma\pi)\Gamma(\sigma+1)}{2^{\sigma+1}\pi^2}G^{20}_{02}(A_+A_-\,|\,0,-\sigma-1) & \text{при}\quad A_+A_->0,\\ \dfrac{\mathbf{i}\,\mathrm{sign}\,A_+\cos(\sigma\pi)\Gamma(\sigma+1)}{2^{\sigma+3}\pi}G^{10}_{02}(-A_+A_-\,|-\sigma-1,0) & \text{при}\quad A_+A_-<0.\end{cases}$$

Результат, аналогичный теореме 4, можно получить и для функций $e^{(-\sigma-2)}_{p_3,q_3,0,0,-}$ (мы его не приводим).

Пусть

$$[T^{(\sigma)}(g)](f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3})=\int_{\mathbb{R}}d\hat{p}_3\int_{\mathbb{R}}t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)f^{**}_{\hat{p}_3,\hat{q}_3}d\hat{q}_3. \tag{4.4}$$

Поскольку

$$\mathrm{F}_i(f^{(-\sigma-2)**}_{\tilde{p}_3,\tilde{q}_3},T^{(\sigma)}(g)(f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3}))=\mathrm{F}_3(f^{(-\sigma-2)**}_{\tilde{p}_3,\tilde{q}_3},T^{(\sigma)}(g)(f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3}))=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\delta(\hat{p}_3+\tilde{p}_3)d\hat{p}_3\int_{\mathbb{R}}t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)\delta(\hat{q}_3+\tilde{q}_3)d\hat{p}_3,$$

где δ – дельта-функция, получаем

$$t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_i(f^{(-\sigma-2)**}_{-\hat{p}_3,-\hat{q}_3},T^{(\sigma)}(g)(f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3})).$$

В частности,

$$t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(-e_{2,2})=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{F}_3(f^{(-\sigma-2)**}_{-\hat{p}_3,-\hat{q}_3},T^{(\sigma)}(-e_{2,2})(f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3}))=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\hat{p}_3\alpha_3}d\alpha_3\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\left(\hat{q}_3\beta_3+\frac{q_3\beta_3-p_3\alpha_3}{\alpha_3^2-\beta_3^2}\right)}\left|\alpha_3^2-\beta_3^2\right|^{\sigma}d\beta_3=$$
$$=\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(\hat{A}_+z_-+A_-/z_-)}\left|z_-\right|^{\sigma}dz_-\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}(\hat{A}_-z_++A_+/z_+)}\left|z_+\right|^{\sigma}dz_+.$$

Используя (4.2) или (4.3), получаем соответствующие значения матричных элементов $t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(-e_{2,2})$ для каждой пары

$$(\mathrm{sign}(A_+\hat{A}_-),\mathrm{sign}(A_-\hat{A}_+))\in\{(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)\}.$$

Например, при $A_+\hat{A}_-,A_-\hat{A}_+<0$ имеем

$$t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(-e_{2,2})=\frac{2|A_+A_-|^{\sigma+1}}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\sigma\pi}{2}\right)\mathcal{K}_{\sigma+1}(A_+\hat{A}_-)\mathcal{K}_{\sigma+1}(A_-\hat{A}_+).$$

Используя (4.1) и (4.4), представим базисную функцию $f^{(\sigma)**}_{\hat{p}_3,\hat{q}_3}$ в виде линейной комбинации функций, принадлежащих базису $B_2^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned}[T^{(\sigma)}(g)](f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3})=&\sum_{p_2\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}d\hat{p}_3\int_{\mathbb{R}}t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)e^{(\sigma)}_{\hat{p}_3,\hat{q}_3,p_2,q_2,+}d\hat{q}_3\right)f^{(\sigma)*}_{p_2,q_2,+}dq_2+\\&+\sum_{p_2\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}d\hat{p}_3\int_{\mathbb{R}}t^{(\sigma)**}_{p_3,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(g)e^{(\sigma)}_{\hat{p}_3,\hat{q}_3,p_2,q_2,-}d\hat{q}_3\right)f^{(\sigma)*}_{p_2,q_2,-}dq_2.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Легко видеть, что $f^{(\sigma)*}_{p_2,q_2,\pm}$ является собственной функцией оператора $T^{(\sigma)}(-e_{2,2})$, отвечающей собственному значению $(-1)^{p_2}$. Это означает, в частности, что $f^{(\sigma)*}_{0,0,\pm}$ является неподвижной точкой линейного оператора $T^{(\sigma)}(-e_{2,2})$, следовательно, из равенства

$$[T^{(\sigma)}(g)](f^{(\sigma)**}_{p_3,q_3}) = \sum_{p_2\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} e^{(\sigma)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,+}[T^{(\sigma)}(g)](f^{(\sigma)*}_{p_2,q_2,+})dq_2 + \sum_{p_2\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} e^{(\sigma)}_{p_3,q_3,p_2,q_2,-}[T^{(\sigma)}(g)](f^{(\sigma)*}_{p_2,q_2,-})dq_2,$$

теорем 3 и 4 и равенства (4.5) вытекает формула

$$\int_{\mathbb{R}} d\hat{p}_3 \int_{\mathbb{R}} t^{(\sigma)**}_{0,q_3,\hat{p}_3,\hat{q}_3}(\mathrm{diag}(-1,-1,1,1))e_{\hat{p}_3,\hat{q}_3,0,0,\pm}d\hat{q}_3 = e_{0,q_3,0,0,\pm} = -\frac{\Gamma(\sigma+1)}{2^{(1\pm1)/2}\pi|q_3|^{\sigma+1}}Y_{\pm(\sigma+1)}(|q_3|). \tag{4.6}$$

Прием, использованный при выводе интегрального соотношения (10), был применен в [15], где рассматривалась связь между вычисленными в разных базисах матричными элементами сужений операторов представлений на некоторые клеточно-диагональные матрицы. В работе [16] рассматривалась другая реализация неприводимых представлений группы $SO(2,2)$, при этом оказалось, что ядро интегрального оператора, поставленного в соответствие оператору представления, тоже выражается через функции Бесселя—Клиффорда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виленкин Н.Я., Шлейникова М.А.* Интегральные соотношения для функций Уиттекера и представления трехмерной группы Лоренца // Матем. сборник. 1970. Т. 81. № 2. С. 185—191.
2. *Виленкин Н.Я., Нижников А.И.* Интегральные соотношения для G-функций Мейера и представления n-мерной группы Лоренца // Известия вузов. Матем. 1979. Т. 23. № 5. С. 11—17.
3. *Шилин И.А., Чой Дж.* Некоторые формулы для обычных функций и гиперфункций Бесселя—Клиффорда, связанные с собственной группой Лоренца // Фундам. и прикл. матем. 2019. Т. 22. № 5. С. 195—208.
4. *Shilin I.A., Choi J., Lee J.W.* Some integrals infolving Coulomb functions related to three-dimensional proper Lorentz group // AIMS Mathematics. 2020. V. 5. № 6. P. 5664—5682.
5. *Shilin A.I., Choi J.* Certain connections between the spherical and hyperbolic bases on the cone and formulas for related special functions // Int. Trans. Spec. Func. 2014. V. 25. № 5. P. 374—383.
6. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963.
9. *Климык А.У., Качурик И.И.* Вычислительные методы в теории представлений групп. Киев: Вища школа, 1986.
10. *Oberhettinger F.* Tabellen zur Fourier Transformation. Berlin: Springer, 1957.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том II. М.: Наука, 1970.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Том I. М.: Наука, 1969.
15. *Shilin A.I., Choi J.* Integral and series representations of special functions related to the group $SO(2,2)$ // Ramanujan J. 2017. V. 44. № 1. P. 133—153.
16. *Shilin A.I., Choi J.* On matrix elements of the $SO(2,2)$-representation in a space of functions on 2×4-matrices // Int. Trans. Spec. Func. 2018. V. 29. № 10. P. 761—770.