

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
НЕЛИНЕЙНЫХ СВЯЗАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ВЫТЕКАЮЩИХ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ  
МЕТАЛЛОДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ<sup>1)</sup>**

© 2021 г. Ю. Г. Смирнов<sup>1,2,\*</sup>, Е. Ю. Смолькин<sup>1,2,\*\*</sup>, М. О. Снегур<sup>1,2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 440026 Пенза, ул. Красная, 40, ПГУ, Россия

<sup>2</sup> 354340 Сочи, Олимпийский пр-т, 1, Научно-технологический университет “Сириус”, Россия

\*e-mail: smirnovyug@mail.ru

\*\*e-mail: e.g.smolkin@hotmail.com

\*\*\*e-mail: snegur.max15@gmail.com

Поступила в редакцию 29.01.2020 г.  
Переработанный вариант 25.12.2020 г.  
Принята к публикации 11.04.2021 г.

Рассматривается задача о распространении связанных поверхностных (ТЕ) и вытекающих (ТМ) поляризованных электромагнитных волн в линии Губо (идеально проводящем цилиндре, покрытом концентрическим диэлектрическим слоем), заполненной неоднородной нелинейной средой. Нелинейная связанная ТЕ–ТМ-волна характеризуется двумя (независимыми) частотами  $\omega_E$  и  $\omega_M$  и двумя постоянными распространения  $\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M$ . Физическая задача сводится к нелинейной двухпараметрической задаче сопряжения на собственные значения для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Обнаружены два типа решений: нелинейные решения первого типа являются решениями, соответствующими решениям линейных задач (такие решения переходят в линейные, когда коэффициент нелинейности стремится к нулю); решения второго типа – “чисто” нелинейные, поскольку они не переходят в линейные решения при уменьшении коэффициента нелинейности. Представлены результаты расчетов связанных постоянных распространения и связанных собственных мод. Библ. 35. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** неоднородный волновод, линия Губо, уравнения Максвелла, поляризованные поверхностные ТЕ- и вытекающие ТМ-волны, нелинейная двухпараметрическая задача на собственные значения, нелинейность Керра.

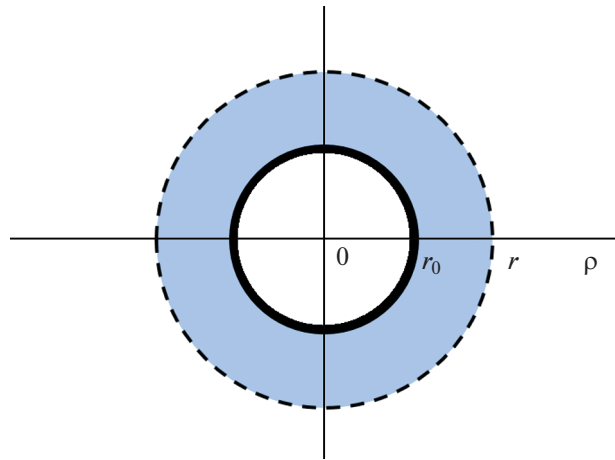
**DOI:** 10.31857/S004446692108007X

## ВВЕДЕНИЕ

В течение многих лет теория распространения поляризованных электромагнитных волн в плоских и цилиндрических волноводах, заполненных линейной средой, привлекала большое внимание исследователей (см. [1]–[3]). Эта теория интересна тем, что, во-первых, такие проблемы описывают реальные физические процессы, важные для прикладных и теоретических наук, а во-вторых, с математической точки зрения эта теория является богатым источником сложных и интересных математических задач.

Анализ распространения волн в открытых металлодиэлектрических волноводах представляет собой важный класс векторных электромагнитных задач. Идеально проводящий цилиндр, покрытый концентрическим диэлектрическим слоем (линия Губо), является наиболее простым типом таких направляющих структур. Полное математическое исследование спектра симметричных поверхностных линейных мод в линии Губо выполнено в [4]–[7]. Эти исследования подтверждают хорошо известное свойство линии Губо: поддерживать распространение поверхностной волны для сколь угодно тонкого диэлектрического слоя. Поэтому может быть важно как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения дальнейшего применения линии, расширить

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-31-51004).



Фиг. 1. Геометрия задачи.

эти результаты для гораздо более широких семейств линии Губо с нелинейными неоднородными диэлектрическими средами. Это будет первым необходимым шагом для анализа более сложных открытых металлодиэлектрических волноводов с таким заполнением. Возникновение и анализ вытекающих волн вместе с их различными применениями в микроволновой технике были предметом многочисленных исследований с начала 1950-х годов (см. [8]–[10]).

Работа посвящена проблеме распространения связанных поверхностной ТЕ и вытекающей ТМ электромагнитных волн в линии Губо, заполненной нелинейной неоднородной средой. Эта проблема, как известно авторам, в литературе не рассматривалась. Нелинейность выражается законом Керра (см. [11]–[13]). Диэлектрическая проницаемость внутри волновода зависит от поля и радиальной координаты  $\rho$ . Связанная волна в волноводе представляет собой сумму двух поляризованных монохроматических волн; каждая из этих поляризаций гармонически зависит от переменной  $z$ . Цель данной статьи – численное исследование нелинейного взаимодействия двух типов таких волн, распространяющихся с разными частотами  $\omega_E$  и  $\omega_M$ .

Краткий обзор задач распространения волн в волноводах со средами с керровской и другими нелинейностями см. в [15]–[18]. В [19]–[22] проведено численное исследование распространения поверхностных волн в слоистых нелинейных диэлектрических и металлодиэлектрических волноводах. Численные результаты получены с помощью метода пристрелки по параметру (см., например, [23], [14], [24]).

Метод возмущения, используемый в данной работе, был предложен и развит в [25], [26]. Альтернативный метод интегральных дисперсионных уравнений представлен в [27]. Связанные волны рассматривались в [28], [29].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $O\rho\varphi z$ . В  $\mathbb{R}^3$  помещен волновод

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси  $Oz$  (ось симметрии волновода совпадает с осью  $Oz$ ), и круговым поперечным сечением. Волновод неограниченно продолжается в направлении  $z$ .

Сечение волновода, перпендикулярное его оси, состоит из круга радиуса  $r_0$  и концентрического кольца с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним радиусом  $r$  (фиг. 1).

Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид  $\epsilon_0 \tilde{\epsilon}$ , где  $\epsilon_0 > 0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума и

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} \epsilon + \alpha |\mathbf{E}|^2, & 0 \leq \rho \leq r, \\ 1, & \rho > r, \end{cases} \tag{1}$$

а  $\alpha$  – вещественная положительная постоянная,  $\varepsilon(\rho) \in C[r_0, r]$ ,  $\min_{\rho \in [r_0, r]} \varepsilon(\rho) > 1$ , и  $\mathbf{E}$  – комплексная амплитуда электрического поля (см. [30]). Пространство заполнено средой без источников; всюду  $\mu = \mu_0 > 0$  – магнитная проницаемость вакуума.

В этом исследовании предполагается, что электромагнитное поле представляет собой сумму монохроматических ТЕ- и ТМ-волн (каждая волна распространяется на своей частоте и гармонически зависит от  $z$  на разных, но связанных постоянных распространения). В нелинейной среде это приводит к новому типу волн, называемых связанными волнами.

Рассмотрим электромагнитное поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  следующей конфигурации:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}, \quad (2)$$

где  $\omega_E, \omega_M$  – (положительные) круговые частоты,  $\mathbf{E}_E, \mathbf{E}_M, \mathbf{H}_E$  и  $\mathbf{H}_M$  – комплексные амплитуды полей с индексами  $E$  и  $M$  соответственно (см. [30]), имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_E &= (0, E_\varphi, 0)^\top, & \mathbf{E}_M &= (E_\rho, 0, E_z)^\top, \\ \mathbf{H}_E &= (H_\rho, 0, H_z)^\top, & \mathbf{H}_M &= (0, H_\varphi, 0)^\top, \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_\rho(\rho) e^{i\gamma_M z}, & E_\varphi &= E_\varphi(\rho) e^{i\gamma_E z}, & E_z &= E_z(\rho) e^{i\gamma_M z}, \\ H_\rho &= H_\rho(\rho) e^{i\gamma_E z}, & H_\varphi &= H_\varphi(\rho) e^{i\gamma_M z}, & H_z &= H_z(\rho) e^{i\gamma_E z}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\gamma_E, \gamma_M$  – неизвестные вещественные связанные постоянные распространения (спектральные параметры).

Запишем систему уравнений Максвелла в следующей форме (см. [31]):

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}) &= -i\tilde{\varepsilon}\omega_E \mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} - i\tilde{\varepsilon}\omega_M \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}, \\ \text{rot}(\mathbf{E}_E e^{-i\omega_E t} + \mathbf{E}_M e^{-i\omega_M t}) &= i\mu_0\omega_E \mathbf{H}_E e^{-i\omega_E t} + i\mu_0\omega_M \mathbf{H}_M e^{-i\omega_M t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя компоненты (3), (4) поля (2) в систему (5), получаем

$$\begin{aligned} \gamma_M^2 E_\rho + \gamma_M (iE_z)' &= \omega_M^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_\rho, \\ \gamma_E^2 E_\varphi - (\rho^{-1}(\rho E_\varphi))' &= \omega_E^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_\varphi, \\ -\gamma_M \rho^{-1}(\rho E_\rho)' - \rho^{-1}(\rho (iE_z))' &= \omega_M^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} (iE_z), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$H_\rho = -\gamma_E (\omega_E \mu_0)^{-1} E_\varphi, \quad H_z = (i\omega_E \mu_0)^{-1} \rho^{-1} (\rho E_\varphi)', \quad H_\varphi = (i\omega_M \mu_0)^{-1} (i\gamma_M E_\rho - E_z').$$

Введем обозначения  $u_1(\rho) := E_\rho(\rho)$ ,  $u_2(\rho) := E_\varphi(\rho)$ ,  $u_3(\rho) := iE_z(\rho)$ , где  $u_i$ , вообще говоря, также зависят от  $\gamma_E, \gamma_M$  (далее мы часто будем опускать аргументы). В этих обозначениях система (6) принимает вид (ср. с (12) из [29])

$$\begin{aligned} \gamma_M^2 u_1 + \gamma_M u_3' &= k_M^2 \tilde{\varepsilon} u_1, \\ (\rho^{-1}(\rho u_2))' - \gamma_E^2 u_2 &= -k_E^2 \tilde{\varepsilon} u_2, \\ \gamma_M \rho^{-1}(\rho u_1)' + \rho^{-1}(\rho u_3)' &= -k_M^2 \tilde{\varepsilon} u_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $k_E^2 := \omega_E^2 \mu_0 \varepsilon_0$  и  $k_M^2 := \omega_M^2 \mu_0 \varepsilon_0$ .

При  $\rho > r$  имеем  $\tilde{\varepsilon} = 1$ , тогда из (7) получаем систему

$$\begin{aligned} \gamma_M^2 u_1 + \gamma_M u_3' &= k_M^2 u_1, \\ (\rho^{-1}(\rho u_2))' - \gamma_E^2 u_2 &= -k_E^2 u_2, \\ \gamma_M \rho^{-1}(\rho u_1)' + \rho^{-1}(\rho u_3)' &= -k_M^2 u_3. \end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(\rho) &= -\gamma_M \kappa_M^{-1} (\tilde{C}_M K_0'(\kappa_M \rho) + C_M I_0'(\kappa_M \rho)), \\ u_2(\rho) &= \tilde{C}_E I_1(\kappa_E \rho) + C_E K_1(\kappa_E \rho), \\ u_3(\rho) &= \tilde{C}_M K_0(\kappa_M \rho) + C_M I_0(\kappa_M \rho), \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\kappa_M^2 := \gamma_M^2 - k_M^2$ ,  $\kappa_E^2 := \gamma_E^2 - k_E^2$ ;  $\tilde{C}_E$ ,  $\tilde{C}_M$ ,  $C_M$  и  $C_E$  – постоянные интегрирования;  $I$  и  $K$  – модифицированные функции Бесселя (см. [32]).

**Замечание.** Классификация волн как поверхностных или вытекающих зависит от поведения в направлении  $\rho$  (см., например, [2], [3]). Волна называется *поверхностной*, если она такова, что  $u(\rho) \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ . Волна называется *вытекающей*, если она такова, что  $u(\rho) \rightarrow \infty$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ .

Мы будем рассматривать распространяющиеся поверхностные ТЕ- и вытекающие ТМ-волны. Решение  $C_E K_1(\kappa_E \rho)$  определяет *поверхностные ТЕ-поляризованные волны*, убывающие на бесконечности, поскольку  $K_1(\kappa_E \rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow \infty$  (см. [32]). Решение  $C_M I_0(\kappa_M \rho)$  определяет *вытекающие ТМ-поляризованные волны*, возрастающие на бесконечности, поскольку  $I_0(\kappa_M \rho) \rightarrow \infty$  при  $\rho \rightarrow \infty$  (см. [32]).

Согласно таким образом выбранным условиям на бесконечности, решение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} u_1(\rho) &= -\gamma_M \kappa_M^{-1} C_M I_0'(\kappa_M \rho) = -\gamma_M \kappa_M^{-1} C_M I_1(\kappa_M \rho), \\ u_2(\rho) &= C_E K_1(\kappa_E \rho), \\ u_3(\rho) &= C_M I_0(\kappa_M \rho). \end{aligned} \tag{9}$$

При  $r_0 \leq \rho \leq r$  имеем  $\tilde{\epsilon} = \epsilon + \alpha |\mathbf{u}|^2$ , где  $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$  и  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ .

Из (7) получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_M^2 u_1 + \gamma_M u_3' &= k_M^2 (\epsilon + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_1, \\ (\rho^{-1} (\rho u_2)') - \gamma_E^2 u_2 &= -k_E^2 (\epsilon + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_2, \\ \gamma_M \rho^{-1} (\rho u_1)' + \rho^{-1} (\rho u_3)' &= -k_M^2 (\epsilon + \alpha |\mathbf{u}|^2) u_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Известно, что касательные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела сред. В рассматриваемом случае касательными составляющими являются компоненты  $E_\phi$ ,  $E_z$ ,  $H_\phi$ ,  $H_z$ . Непрерывность  $H_\phi$  влечет непрерывность  $\tilde{\epsilon} E_\rho$ . Касательные компоненты электрического поля  $\mathbf{E}$  обращаются в нуль на идеально проводящей границе  $\rho = r_0$ . Из сказанного следуют граничные условия и условия сопряжения:

$$u_2|_{\rho=r_0} = 0, \quad u_3|_{\rho=r_0} = 0, \tag{11}$$

$$[\tilde{\epsilon} u_1]_{\rho=r} = 0, \quad [u_2]_{\rho=r} = 0, \quad [u_2']_{\rho=r} = 0, \quad [u_3]_{\rho=r} = 0, \tag{12}$$

где  $[f]_{\rho=r} = \lim_{\rho \rightarrow r-0} f(\rho) - \lim_{\rho \rightarrow r+0} f(\rho)$ .

Имеем следующую двухпараметрическую задачу на собственные значения (Задача P): найти такие пары  $(\gamma_E, \gamma_M) = (\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ , при которых существуют нетривиальные решения  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  системы уравнений (10), удовлетворяющие граничным условиям (11) и условиям сопряжения (12), причем пара постоянных  $C_E$  и  $C_M$  считается фиксированной (см. (9)).

Пару постоянных распространения  $(\gamma_E, \gamma_M) = (\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ , являющихся решением задачи P, будем называть *связанными собственными значениями*. Каждая пара  $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$  отвечает распространяющейся связанной поверхностной ТЕ- и вытекающей ТМ-волне вида (2) при условиях (3), распространяющейся в волноводе  $\Sigma$ .

2. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ P

Пусть  $\chi_E^2 = k_E^2 \varepsilon - \gamma_E^2$  и  $\chi_M^2 = k_M^2 \varepsilon - \gamma_M^2$ . Известно (см. [33]), что для всех  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$ , отличных от точек спектра операторов

$$L_E := \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + \rho \left( \chi_E^2 - \frac{1}{\rho^2} \right), \quad L_M := \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\rho \varepsilon}{\chi_M^2} \frac{d}{d\rho} \right) + \rho \varepsilon,$$

существуют функции Грина  $G_E$  и  $G_M$  краевых задач

$$\begin{aligned} L_E G_E &= -\delta(\rho - s), \\ G_E|_{\rho=r_0} &= \partial_\rho G_E|_{\rho=r} = 0, \quad r_0 < s < r, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} L_M G_M &= -\delta(\rho - s), \\ G_M|_{\rho=r_0} &= \partial_\rho G_M|_{\rho=r} = 0, \quad r_0 < s < r. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя подход, предложенный в [28], [31], задача P может быть сведена к исследованию разрешимости следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} C_E g_E(\gamma_E) &= \alpha Q_E(\gamma_E, \gamma_M), \\ C_M g_M(\gamma_M) &= \alpha Q_M(\gamma_E, \gamma_M), \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} g_E(\gamma_E) &= (1 + r \partial_s G_E(r, r)) (\kappa_E r K_0(\kappa_E r) + K_1(\kappa_E r)), \\ Q_E(\gamma_E, \gamma_M) &= -\alpha r \int_{r_0}^r k_E^2 \rho \partial_s G_E(\rho, r) |\mathbf{u}|^2(\rho) u_2(\rho) d\rho \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} g_M(\gamma_M) &= \frac{r^2 \varepsilon^2(r)}{\chi_M^2(r)} (\kappa_M r I_0(\kappa_M r) - I_1(\kappa_M r)) G_M(r, r) - \frac{\chi_M^2(r)}{\kappa_M} I_1(\kappa_M \rho), \\ Q_M(\gamma_E, \gamma_M) &= \alpha \gamma_M \varepsilon(r) \int_{r_0}^r \frac{\partial_{\rho s}^2 G_M(\rho, r)}{\chi_M^2(\rho)} \rho |\mathbf{u}|^2 u_1 d\rho + \alpha \varepsilon(r) \int_{r_0}^r \partial_s G_M(\rho, r) \rho |\mathbf{u}|^2 u_3 d\rho. \end{aligned}$$

Полагая  $\alpha = 0$  в (15), мы получаем два соотношения для случая линейной среды внутри волновода:

$$g_E(\gamma_E) = 0, \tag{16}$$

$$g_M(\gamma_M) = 0. \tag{17}$$

Уравнения (16) и (17) соответствуют линейным процессам распространения ТЕ- и ТМ-волн; их корни определяют соответствующие константы распространения. Эти процессы независимы, что видно из полученных соотношений.

Рассмотрим две краевые задачи:

$$\begin{aligned} (\rho w_E')' + \rho \left( k_E^2 \varepsilon - \frac{1}{\rho^2} \right) w_E &= \rho \lambda_E w_E, \\ w_E'|_{\rho=r_0} &= w_E'|_{\rho=r} = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned} \left( \frac{w_M'}{\rho \varepsilon} \right)' + \frac{k_M^2}{\rho} w_M &= \frac{\lambda_M w_M}{\rho \varepsilon}, \\ w_M'|_{\rho=r_0} &= w_M'|_{\rho=r} = 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где  $r_0 < \rho < r$ . Задача (18) получена из (6) для  $w_E = E_\varphi$  и  $\lambda_E = \gamma_E^2$ , и задача (19) получена из (6) для  $w_M = \rho H_\varphi$  и  $\lambda_M = \gamma_M^2$ .

Пусть  $\{\lambda_E^{(n)}, w_E^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  и  $\{\lambda_M^{(m)}, w_M^{(m)}\}_{m=1}^\infty$  являются системами всех собственных значений и собственных функций, ортонормированных в пространствах  $L_2(r_0, r; \rho)$  и  $L_2(r_0, r; \rho^{-1}\epsilon^{-1})$  краевых задач (18) и (19) соответственно. Как известно (см. [34]), все собственные значения обеих задач являются действительными и простыми (кратности 1). В этом случае каждая задача имеет только конечное число (или не имеет) положительных собственных значений и бесконечное число отрицательных.

Следующие утверждения дают критерии разрешимости сформулированных выше линейных задач и следуют из результатов [28], где эти вопросы были тщательно рассмотрены.

**Лемма 1.** *Предположим, что существует  $(n + 1)$  собственных значений  $\lambda_E^{(1)}, \dots, \lambda_E^{(n+1)}$  краевой задачи (18) таких, что*

$$k_E^2 < \lambda_E^{(1)} < \dots < \lambda_E^{(n+1)} < k_E^2 \min_{\rho \in [r_0, r]} \epsilon,$$

тогда можно выбрать радиус  $r > 0$  так, чтобы уравнение (16) имело как минимум  $n$  простых (кратности 1) корней  $\tilde{\gamma}_E^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_E^{(n)}$  таких, что

$$\sqrt{\lambda_E^{(i)}} < \tilde{\gamma}_E^{(i)} < \sqrt{\lambda_E^{(i+1)}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

**Лемма 2.** *Предположим, что существует  $(m + 1)$  собственных значений  $\lambda_M^{(1)}, \dots, \lambda_M^{(m+1)}$  краевой задачи (19) таких, что*

$$k_M^2 < \lambda_M^{(1)} < \dots < \lambda_M^{(m+1)} < k_M^2 \min_{\rho \in [r_0, r]} \epsilon,$$

тогда можно выбрать радиус  $r > 0$  так, чтобы уравнение (17) имело как минимум  $m$  простых (кратности 1) корней  $\tilde{\gamma}_M^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_M^{(m)}$  таких, что

$$\sqrt{\lambda_M^{(i)}} < \tilde{\gamma}_M^{(i)} < \sqrt{\lambda_M^{(i+1)}}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть  $\{\Delta_E^{(i)}\}_{i=1}^{n+1}$  и  $\{\Delta_M^{(j)}\}_{j=1}^{m+1}$  – некоторые множества положительных чисел такие, что интервалы

$$\Gamma_E^{(i)} := \left[ \sqrt{\lambda_E^{(i)}} + \Delta_E^{(i)}, \sqrt{\lambda_E^{(i+1)}} - \Delta_E^{(i+1)} \right], \quad i = \overline{1, n}, \tag{20}$$

и

$$\Gamma_M^{(j)} := \left[ \sqrt{\lambda_M^{(j)}} + \Delta_M^{(j)}, \sqrt{\lambda_M^{(j+1)}} - \Delta_M^{(j+1)} \right], \quad j = \overline{1, m}, \tag{21}$$

не содержат полюсов функций Грина  $G_E$  и  $G_M$  для всех допустимых  $i$  и  $j$ :

$$\gamma_E^{(i)} \in \Gamma_E^{(i)}, \quad \gamma_M^{(j)} \in \Gamma_M^{(j)}.$$

Другими словами,  $\Delta_E^{(i)}$  и  $\Delta_M^{(j)}$  выбраны так, чтобы отойти от полюсов функций Грина  $G_E$  и  $G_M$  без потери решений линейных задач (для  $\alpha = 0$ ).

Следующая теорема устанавливает условие существования решения нелинейной задачи P и следует из результатов [28], где этот вопрос был тщательно рассмотрен.

**Теорема 1.** *Предположим, что существует  $n$  и  $m$  простых корней  $\tilde{\gamma}_E^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_E^{(n)}$  и  $\tilde{\gamma}_M^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_M^{(m)}$  уравнений (16) и (17) соответственно, удовлетворяющие условиям*

$$k_E < \tilde{\gamma}_E^{(1)} < \dots < \tilde{\gamma}_E^{(n+1)} < k_E \min_{\rho \in [r_0, r]} \sqrt{\epsilon},$$

$$k_M < \tilde{\gamma}_M^{(1)} < \dots < \tilde{\gamma}_M^{(m+1)} < k_M \min_{\rho \in [r_0, r]} \sqrt{\epsilon}.$$

Тогда существует такое число  $\alpha_0 > 0$ , что для любого  $0 < \alpha \leq \alpha_0$  задача P имеет не менее  $n \times m$  связанных собственных значений  $(\hat{\gamma}_E^{(i)}, \hat{\gamma}_M^{(j)})$ , где  $i = \overline{1, n}$  и  $j = \overline{1, m}$ . В этом случае для всех возможных  $i$  и  $j$

$$(\hat{\gamma}_E^{(i)}, \hat{\gamma}_M^{(j)}) \in \Gamma_E^{(i)} \times \Gamma_M^{(j)}.$$

Из приведенной теоремы следует, что в сформулированных выше условиях существуют ТЕ- и ТМ-волны, распространяющиеся без затухания в неоднородной линии Губо с немагнитной изотропной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Связанные собственные значения  $(\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$  являются корнями системы дисперсионных уравнений, которая будет представлена ниже. Чтобы вывести систему, сформулируем вспомогательную задачу Коши, а затем, используя дополнительное условие (граничные условия при  $\rho = r_0$ ), мы выражаем дисперсионные уравнения в явном виде. Связанные собственные значения определяются численно (с любой желаемой точностью), используя вариацию метода пристрелки по параметру (см. [14]).

Пусть  $u_4 = u'_2 + \rho^{-1}u_2$ , тогда система (10) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \frac{\varepsilon' + 2\alpha(u_2u_4 - \rho^{-1}u_2^2 - \gamma_M u_1 u_3)}{\varepsilon + \alpha(2u_1^2 + |\mathbf{u}|^2)} - \frac{\rho^{-1}u_1 + \gamma_M u_3 + 2\alpha k_M^2 \gamma_M^{-1} u_1^2 u_3}{\varepsilon + \alpha(2u_1^2 + |\mathbf{u}|^2)} (\varepsilon + \alpha|\mathbf{u}|^2), \\ u'_2 &= u_4 - \rho^{-1}u_2, \\ u'_3 &= -\gamma_M u_1 + \gamma_M^{-1} k_M^2 (\varepsilon + \alpha|\mathbf{u}|^2) u_1, \\ u'_4 &= \gamma_E^2 u_2 - k_E^2 (\varepsilon + \alpha|\mathbf{u}|^2) u_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Используя решение (9) и условия (12), получаем начальные условия

$$\begin{aligned} u_1(r) &= x, \\ u_2(r) &= C_E K_1(\kappa_E r), \\ u_3(r) &= C_M I_0(\kappa_M r), \\ u_4(r) &= -C_E K_0(\kappa_E r), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $x$  — единственный действительный корень кубического уравнения

$$\begin{aligned} Ax^3 + Bx + C &= 0, \\ A &= \alpha, \quad B = \varepsilon(r) + \alpha(C_E^2 K_1^2(\kappa_E r) + C_M^2 I_0^2(\kappa_M r)), \quad C = -\gamma_M \kappa_M^{-1} C_M I_1(\kappa_M r). \end{aligned} \quad (24)$$

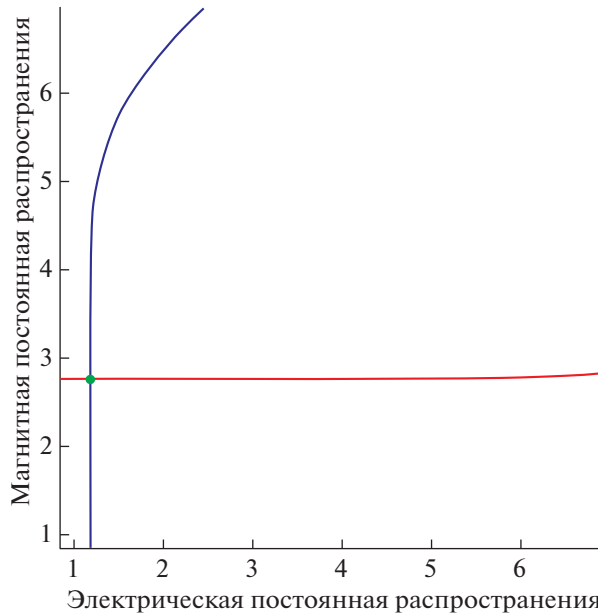
То, что кубическое уравнение (24) имеет только один действительный корень для всех положительных значений  $A$ ,  $B$  и  $C$ , является результатом свойств кубической параболы и прямой, определенных равенством  $Ax^3 = -Bx - C$  (отметим, что для коэффициента  $C < 0$ , соответствующего значению константы  $C_M < 0$ , уравнение (24) также будет иметь один единственный действительный корень).

Предполагаем, что решение задачи Коши (22), (23) существует, единственно, определено глобально на отрезке  $[r_0, r]$  для заданных значений  $r_0$ ,  $r$  и зависит непрерывно от параметров  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$ . Поскольку правые части в (22) являются гладкими по всем аргументам, а начальные данные (23) гладко зависят от параметров  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$ , то локальное существование и единственность решения задачи, а также его непрерывная зависимость от параметров — результат широко известной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [35]). Важным предположением является существование непрерывного решения, определенного глобально на отрезке (насколько нам известно, это невозможно доказать строго в общем случае). Однако в [31] доказано, что такое решение существует при определенных ограничениях на коэффициент нелинейности  $\alpha$  и параметры  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$ . Этот факт оправдывает использование метода пристрелки как минимум при малых значениях  $\alpha$ .

Используя граничные условия (11), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} u_2(r_0, \gamma_E, \gamma_M) &= 0, \\ u_3(r_0, \gamma_E, \gamma_M) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где значения  $u_2(r_0)$  и  $u_3(r_0)$  получены из решения задачи Коши.



**Фиг. 2.** Численное решение системы (25): синяя кривая – решение первого уравнения системы (25); красная кривая – решение второго уравнения системы (25); точка пересечения синей и красных кривых, обозначенная зеленым цветом, является решением системы (25).

Из нашего рассмотрения следует, что система (25) является системой дисперсионных уравнений; пары постоянных распространения  $(\gamma_E, \gamma_M) = (\hat{\gamma}_E, \hat{\gamma}_M)$ , которые удовлетворяют (25), являются связанными собственными значениями задачи Р. Чтобы определить связанные постоянные распространения, мы будем численно решать систему уравнений (25). Решением каждого уравнения в (25) является кривая в плоскости  $O\gamma_E\gamma_M$ . Помещая обе кривые на одной плоскости, мы определим точки пересечения кривых; эти точки являются связанными собственными значениями.

Разбивая отрезки по  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$  на более мелкие отрезки, мы определим сетку, состоящую из узлов  $\gamma_E^{(i)}, \gamma_M^{(j)}$ ; эти узлы используем для метода пристрелки. Решая задачу Коши (22), (23) для каждого узла сетки, вычисляем величины  $u_2^{(i,j)(r_0)}$  для каждого узла. Предполагаем, что существуют (смежные) узлы, например,

$$\gamma_E^{(i)}, \gamma_M^{(j)} \quad \text{и} \quad \gamma_E^{(i)}, \gamma_M^{(j+1)},$$

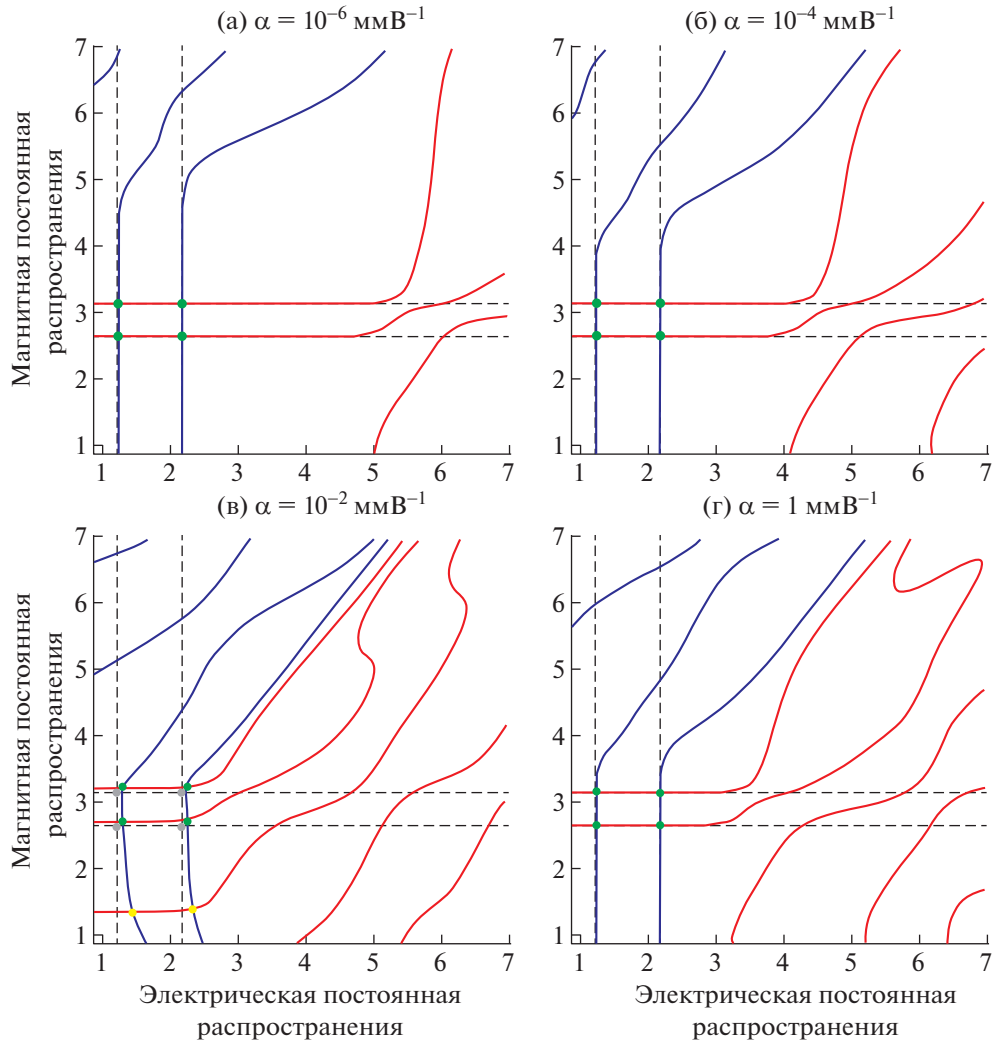
для которых выполняется условие

$$u_2^{(i,j)}(r_0) \times u_2^{(i,j+1)}(r_0) < 0.$$

В силу непрерывной зависимости решения  $u_2(r_0, \gamma_E, \gamma_M)$  от параметров  $\gamma_E$  и  $\gamma_M$  (электрической и магнитной постоянных распространения) следует, что существует точка  $(\gamma_E^{(i)}, \hat{\gamma}_M^{(j)})$  в плоскости  $O\gamma_E\gamma_M$ , где  $\hat{\gamma}_M^{(j)}$  лежит внутри интервала  $(\gamma_M^{(j)}, \gamma_M^{(j+1)})$ , такая, что  $u_2(r_0, \gamma_E^{(i)}, \hat{\gamma}_M^{(j)}) = 0$ . Чем плотнее сетка, которую мы выбираем, тем более точное решение мы находим. Повторив эту процедуру для всей сетки, получим набор пар  $(\gamma_M^{(p)}, \gamma_M^{(q)})$ , образующих кривую (синяя кривая на фиг. 2), приближенное решение уравнения  $u_2(r_0) = 0$  в плоскости  $O\gamma_E\gamma_M$ .

Применяя ту же процедуру к уравнению  $u_3(r_0, \gamma_E, \gamma_M) = 0$ , получаем еще одну кривую (красная кривая на фиг. 2) в плоскости  $O\gamma_E\gamma_M$ , которая является приближенным решением уравнения. Очевидно, что точка пересечения (зеленая точка на фиг. 2) расчетных кривых является приближенным решением задачи Р. Делая сетку более плотной, это решение может быть сделано настолько точным, насколько это необходимо. Более подробно алгоритм описан в [24].





**Фиг. 3.** Дисперсионные кривые. Значения параметров, использованных при вычислениях:  $\epsilon = \epsilon_c + \rho$ ;  $\epsilon_c = 11.7$  (кремний);  $n_0 = 2$  мм и  $r = 4.2$  мм;  $C_E = C_M = 1$ ;  $\omega_E = 30$  ГГц,  $\omega_M = 40$  ГГц.

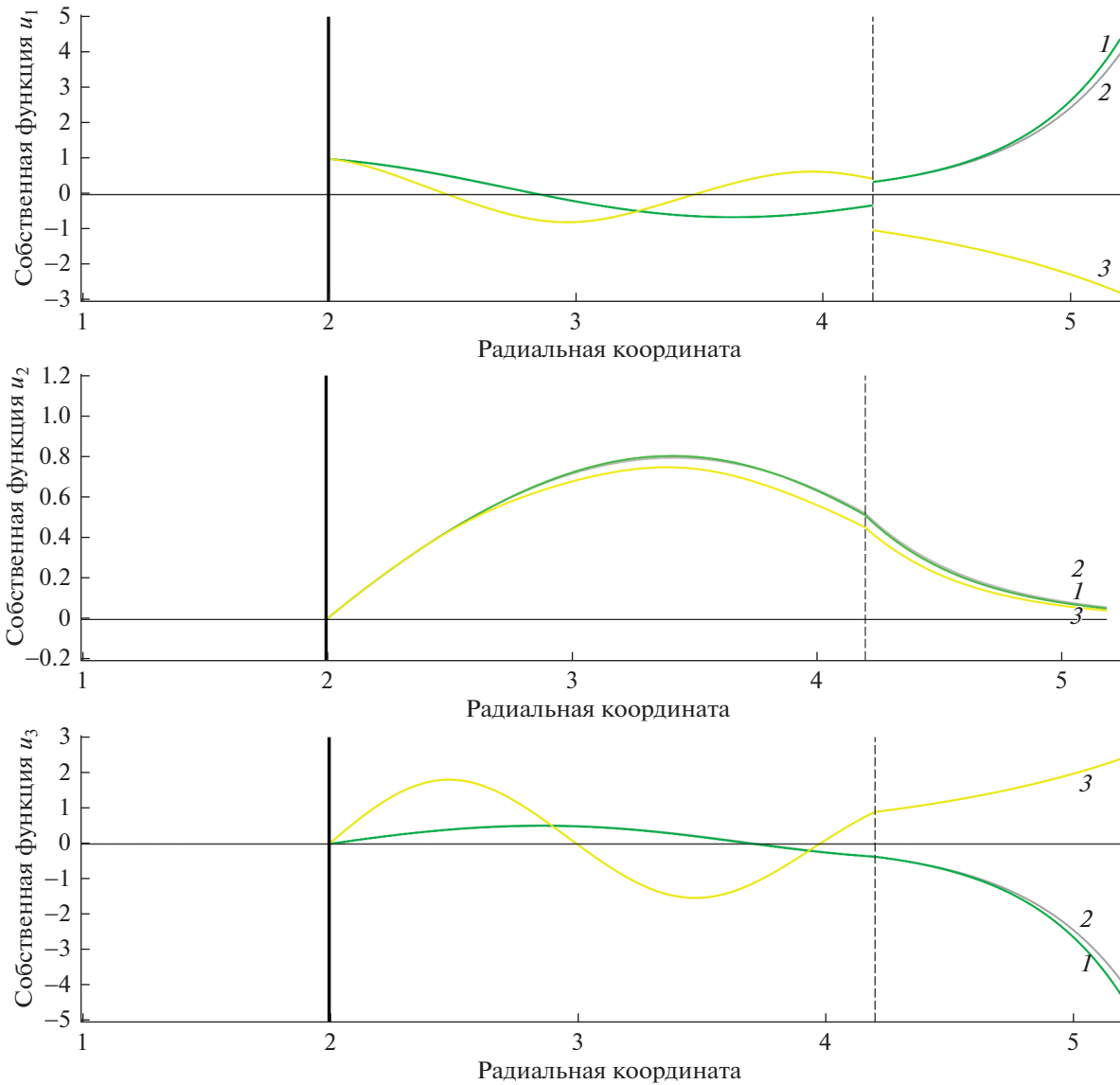
#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На фиг. 3 показаны зависимости  $\gamma_E(\gamma_M)$  (синие кривые) и  $\gamma_M(\gamma_E)$  (красные кривые). Серые линии соответствуют ТЕ- (вертикальные линии) и ТМ-волнам (горизонтальные линии). Значения параметров, использованные в расчетах, указаны в подписях к фигуре.

При достаточно малом коэффициенте нелинейности  $\alpha$  связанные собственные значения находятся вблизи точек пересечения вертикальных и горизонтальных линий (“чисто” линейных ТЕ- и ТМ-волн). Если коэффициент нелинейности меньше некоторого критического значения ( $\alpha \approx 10^{-1}$ ), то существует не менее четырех пар собственных значений (фиг. 3а–в).

Из фиг. 3г видно, что при большом значении коэффициента нелинейности  $\alpha$  существует более четырех пар связанных собственных значений; четыре пары очень близки к решению линейных задач (сравните с фиг. 3а–в); остальные пары являются чисто нелинейными связанными собственными значениями, они не имеют связи с решением линейных задач.

На фиг. 4 показаны графики собственных функций  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  для связанных собственных значений, обозначенных на фиг. 3г: 1 – (2.243, 2.736) (зеленая кривая), 2 – (2.171, 2.637) (серая кривая) и 3 – (2.338, 1.381) (желтая кривая). Отметим, что пара (2.171, 2.637) не является парой связанных собственных значений, это пара собственных значений соответствующих линейных за-



**Фиг. 4.** Собственные функции. Значения связанных постоянных распространения: 1 – (2.243, 2.736) (зеленая кривая), 2 – (2.171, 2.637) (серая кривая) и 3 – (2.338, 1.381) (желтая кривая).

дач. Графики касательных компонент электромагнитного поля согласуются с физической постановкой задачи; а именно, собственные функции  $u_2$  и  $u_3$  обращаются в нуль на границе металла  $r_0$  и непрерывны на границе раздела сред  $r$ .

Следует заметить, что собственные функции, соответствующие паре нелинейных связанных собственных значений (2.243, 2.736), практически совпадают с собственными функциями, соответствующими паре линейных собственных значений (2.171, 2.637). Собственные функции, соответствующие паре чисто нелинейных связанных собственных значений (2.338, 1.381), отличаются от нелинейных собственных функций 1 – (2.243, 2.736).

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о распространении связанных поверхностных (ТЕ) и вытекающих (ТМ) поляризованных электромагнитных волн в линии Губо (идеально проводящем цилиндре, покрытом концентрическим диэлектрическим слоем), заполненной неоднородной нелинейной

средой. Приведены условия разрешимости поставленной задачи на собственные значения. Численно были обнаружены ТЕ- и ТМ-волны, распространяющиеся в цилиндрическом нелинейном неоднородном металлодиэлектрическом волноводе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.
2. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987.
3. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
4. *Goubau G.* Surface waves and their application to transmission lines // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. P. 1119–1128.
5. *Goubau G.* Open Wire Lines // *IRE Trans. Microwave Theory and Technique.* 1956. V. 4. P. 197–200.
6. *Harms F.* Elektromagnetische wellen an einem draht mit isolierender zylindrischer hülle // *Ann. Phys.* 1907. V. 6. P. 44–60.
7. *Sommerfeld A.* Über die Fortpflanzung elektrodynamischer Wellen langs eines Drahtes // *Ann. Phys.* 1899. V. 67. P. 233–290.
8. *Marcuvitz N.* On field representations in terms of leaky modes or eigenmodes // *IRE Trans. Antennas Propag.* 1956. V. 4. № 3. P. 192–194.
9. *Oliner A.A.* Leaky waves: Basic properties and applications // *Proc. Asia-Pacific Microw. Conf.* 1997. V. 1. P. 397–400.
10. *Monticone F., Alu A.* Leaky-wave theory, techniques, and applications: from microwaves to visible frequencies // *Proceed. of the IEEE.* 2015. V. 103. № 5. P. 793–821.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика в 10 томах. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982.
12. *Шен И.Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Физматлит, 1989.
13. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
14. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994.
15. *Smirnov Yu., Smolkin E.* On the existence of non-polarized azimuthal-symmetric electromagnetic waves in circular dielectric waveguide filled with nonlinear isotropic homogeneous medium // *Wave Motion.* 2018. V. 77. P. 77.
16. *Smolkin E., Shestopalov Yu.* Nonlinear Goubau line: analytical-numerical approaches and new propagation regimes // *J. Electromagnet. Waves and Appl.* 2017. V. 31. № 8. P. 781–797.
17. *Smolkin E., Valovik D.* Guided electromagnetic waves propagating in a two-layer cylindrical dielectric waveguide with inhomogeneous nonlinear permittivity // *Adv. Math. Phys.* 2015. ID 614976.
18. *Smirnov Yu., Smolkin E., Kurseeva V.* The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide // *Applicable Anal.* 2019. V. 98. V. 3. P. 483–498.
19. *Smolkin E.* Goubau line filled with nonlinear medium: Numerical study of TM-polarized waves // *Proceed. of the 2015 Inter. Conf. on Electromagnet. in Adv. Appl. ICEAA 2015*, P. 1–4, 2015.
20. *Smolkin E., Valovik D.* Numerical solution of the problem of propagation of TM-polarized electromagnetic waves in a nonlinear two-layered dielectric cylindrical waveguide // *ММЕТ'2012 Proceed.* 2012. P. 68–71.
21. *Smolkin E.* The azimuthal symmetric hybrid waves in nonlinear cylindrical waveguide // *Progress in Electromagnet. Res. Symp. PIERS 2017 Proceed.* 2017. P. 348–353.
22. *Smirnov Yu., Smolkin E., Valovik D.* Nonlinear double-layer bragg waveguide: analytical and numerical approaches to investigate waveguiding problem // *Adv. Numeric. Analys.* 2014. V. 2014. P. 1–11.
23. *Smolkin E., Valovik D.* Calculation of the propagation constants of inhomogeneous nonlinear double-layer circular cylindrical waveguide by means of the Cauchy problem method // *J. Communicat. Technology and Electron.* 2013. V. 58. № 8. P. 762–769.
24. *Smolkin E.Y.* On the problem of propagation of nonlinear coupled TE-TM waves in a double-layer nonlinear inhomogeneous cylindrical waveguide // *Proceed. of the Inter. Conf. Days on Diffraction, St. Petersburg*, 2015. P. 318–322.
25. *Schürmann H.W., Smirnov Y., Shestopalov Y.* Propagation of TE waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // *Phys. Rev. E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Phys.* 2005. V. 71. № 1. P. 016614.
26. *Smirnov Y., Schürmann H.W., Shestopalov Y.* Integral equation approach for the propagation of te-waves in a nonlinear dielectric cylindrical waveguide // *J. Nonlin. Math. Phys.* 2004. V. 11. № 2. P. 256–268.

27. *Smirnov Yu., Valovik D.* Nonlinear effects of electromagnetic TM wave propagation in anisotropic layer with Kerr nonlinearity // *Adv. Math. Phys.* 2012. P. 609765.
28. *Smirnov Yu., Valovik D.* Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // *J. Math. Phys.* 2012. V. 53. № 12. P. 123530.
29. *Smirnov Yu., Valovik D.* Coupled electromagnetic transverse-electric-transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity // *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. № 4. P. 043506.
30. *Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P.* Cylindrical nonlinear waveguides // *Sov. Phys. JETP.* 1972. V. 35. № 1. P. 44–47.
31. *Валовик Д.В., Смолькин Е.Ю.* Нелинейное распространение связанных электромагнитных волн в круглом цилиндрическом волноводе // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2017. V. 57. № 8. P. 1304–1320.
32. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
33. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
34. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
35. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1984.