ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 9, с. 1536–1544

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.633

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ[1)]

А. В. Баев

119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

e-mail: drbaev@mail.ru

Поступила в редакцию 23.02.2021 г.
Переработанный вариант 23.02.2021 г.
Принята к публикации 23.02.2021 г.

Рассмотрены два уравнения гиперболического типа с нелинейным коэффициентом при старшей производной, определяющим как скорость нелинейных волн, так и характеризующим рассеивающие свойства среды. Для установившихся решений типа бегущих волн поставлены обратные задачи, состоящие в определении нелинейного коэффициента по зависимости периода от амплитуды стационарных колебаний. Получены и исследованы нелинейные интегро-функциональные уравнения обратной задачи, установлены достаточные условия существования и единственности решения обратных задач. Для решения функциональных уравнений предложены алгоритмы эволюционного типа, представлены решения модельных обратных задач. Библ. 15. Фиг. 3.

Ключевые слова: волновое уравнение, стационарное решение, интегро-функциональное уравнение, режим с обострением.

DOI: 10.31857/S0044466921090052

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи для нелинейных уравнений в частных производных составляют важный класс задач теоретической и математической физики (см. [1]–[3]). Среди этих задач значительное место занимают задачи, связанные с распространением возмущений различной природы, а именно, задачи для нелинейных уравнений гиперболического типа. Наряду с прямыми задачами, состоящими в определении таких возмущений, возникают обратные задачи, связанные с восстановлением параметров модели. Случай квазилинейных гиперболических уравнений рассматривался в [4]–[9] (в [4]–[6] указаны более ранние работы).

В настоящей работе рассмотрены обратные задачи, восходящие по постановке к известным задачам из [10] [11, с. 42], но в отличие от них не сводящиеся к линейным интегральным уравнениям типа Вольтерра I или II рода. В качестве исходных данных для восстановления нелинейной скорости распространения волн рассмотрены доступные в наблюдениях период и амплитуда установившихся колебаний. Близкие по постановке обратные задачи для стационарных колебаний для системы уравнений мелкой воды и уравнения КдВ (см. [1]–[3], [12]) рассмотрены в [13]–[15].

Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2(x)u_{xx} + (-1)^k a(x)a'(x)u_x, \quad a > 0, \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

описывает широкий класс процессов распространения колебаний в неоднородной среде. Случай $k = 1$ соответствует распространению волн без рассеяния, случай $k = 2$ – распространению с коэффициентом отражения, равным $-a'(x)/a(x)$. Наряду с прямыми задачами, в которых при некоторых дополнительных условиях и известной функции $a(x)$ требуется найти функцию $u(x,t)$, возможна постановка обратных задач. В этих задачах по дополнительным данным о решении прямой задачи требуется восстановить $a(x)$.

Уравнение (1) справедливо в рамках линейной теории, когда силы напряжения линейно зависят от деформаций (в терминах теории упругости). Очевидно, что возникает потребность рас-

[1)]Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики.

сматривать процессы, где такая зависимость нелинейна. Простейшим уравнением, обобщающим (1) на случай нелинейной однородной среды, является уравнение

$$u_{tt} = a^2(u)u_{xx} + (-1)^k a(u)(a(u))_x u_x. \tag{2}$$

Функцию $a(u)$ считаем четной, и пусть $a'(u) > 0$ при $u > 0$.

Уравнение (2) допускает решения в виде бегущих волн. Среди таких решений наиболее просто как в лабораторных экспериментах, так и в натурных наблюдениях изучать установившиеся колебания, которые мы будем также называть стационарными волнами. Построим такое решение для уравнения (2) при $k = 1$. Запишем (2) в виде

$$u_{tt} = a^2(u)u_{xx} - a'(u)a(u)u_x^2 \tag{3}$$

и рассмотрим установившееся решение

$$u(x,t) = q(ct - x) = q(\xi), \quad \xi = ct - x.$$

После подстановки $q(\xi)$ в (3) находим

$$(c^2 - a^2(q))q'' = -a'(q)a(q)(q')^2,$$

что после разделения переменных дает

$$\frac{q''}{q'} = -\frac{a'(q)a(q)q'}{c^2 - a^2(q)}.$$

Интегрируя последнее равенство и полагая постоянную интегрирования равной нулю, что не ограничивает общности рассмотрения, получаем

$$\ln|q'| = \ln\sqrt{c^2 - a^2(q)},$$

откуда приходим к равенству

$$(q')^2 + a^2(q) = c^2. \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что последнее равенство определяет гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p,q) \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{a^2(q)}{2} = E, \quad p = q'(\xi), \quad 2E = c^2,$$

и энергией E. Как известно, при определенных свойствах функции $a(y)$ (например, $a''(y) > 0$) существуют ограниченные фазовые траектории этой системы, зависящие от параметра c, т.е. стационарные решения вида $q = q(\xi, c)$.

Установившиеся решения, другими словами, периодические колебания, характеризуются двумя величинами: периодом и амплитудой, которые, в свою очередь, зависят от энергии E. Изменяя энергию системы, можно получить параметрическую зависимость периода колебаний от амплитуды. Действительно, возвращаясь к (4), получаем

$$\frac{dq}{\sqrt{c^2 - a^2(q)}} = \pm d\xi,$$

откуда для четной функции $a(y)$, делая y независимой переменной, находим

$$\oint \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = T(Y), \tag{5}$$

где $T(Y)$ – период колебаний, Y – амплитуда, а контурный интеграл считается по замкнутой фазовой траектории. Полагаем, что период T и амплитуда Y являются величинами, доступными в измерениях. Равенство (4) соответствует переходу от параметрической зависимости периода и амплитуды от энергии E к явной.

Пусть теперь зависимость $T(Y)$ известна на $[0, h]$, и требуется найти $a(y)$. Такую задачу будем называть обратной по отношению к прямой задаче для уравнения (2), а четную, гладкую на $[0, h]$, функцию $a(y)$ такую, что $a'(y) > 0$ при $y > 0$, удовлетворяющую уравнению (5), – ее решением. Эта обратная задача является, с одной стороны, простейшей в своем классе, с другой стороны, к ней сводится задача из более широкого класса, в частности, задача восстановления в (2) коэффициента вида $a(u, x)$.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 1$)

Очевидно, что (5) может быть записано в форме нелинейного функционального уравнения типа Вольтерра I рода относительно $a(y)$:

$$4\int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{c^2 - a^2(y)}} = T(Y), \quad c = a(Y). \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть* $a \in C^2[0, h]$. *Тогда* $T \in C^1(0, h]$.

Доказательство. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = \int_{a_0}^c \frac{dy(a)}{\sqrt{c^2 - a^2}} = \int_{a_0}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad a_0 = a(0), \tag{7}$$

где $y(a)$ – функция, обратная к $a(y)$ при $y \in [0, h]$, $c > a_0$, $a_0 = a(0)$, и $y'(a) \to +\infty$ при $a \to a_0$. Разобьем (7) на два слагаемых:

$$\int_{a_0}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} + \int_{a_1}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad a_0 < a_1 < c.$$

Очевидно, что первый интеграл имеет под интегралом особенность при $a = a_0$. Но любой интеграл вида

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{(c^2 - a^2)^n}}$$

является сходящимся при $n \in \mathbb{N}$, так как

$$\lim_{\varepsilon_m \to 0} \int_{a_0+\varepsilon_m}^{a_1} \frac{y'(a)da}{\sqrt{(c^2 - a^2)^n}} < \lim_{\varepsilon_m \to 0} \frac{y(a_1) - y(a_0 + \varepsilon_m)}{\sqrt{(c^2 - a_1^2)^n}} \le \frac{y(a_1)}{\sqrt{(c^2 - a_1^2)^n}},$$

а последовательность интегралов монотонно возрастает по ε_m при монотонной последовательности $\{\varepsilon_m\} \to +0$. Следовательно, первый интеграл дифференцируем по $c > a_1$.

Второй интеграл имеет под интегралом особенность типа $1/\sqrt{x}$ и может быть взят по частям:

$$\int_{a_1}^c \frac{y'(a)da}{\sqrt{c^2 - a^2}} y'(a) \arcsin \frac{a}{c}\Big|_{a_1}^c - \int_{a_1}^c y''(a) \arcsin \frac{a}{c} da = y'(c)\frac{\pi}{2} - y'(a_1) \arcsin \frac{a_1}{c} - \int_{a_1}^c y''(a) \arcsin \frac{a}{c} da.$$

Ясно, что последнее выражение дифференцируемо по $c > a_1$, и, следовательно, интеграл (7) дифференцируем по $Y > 0$, так как $c = a(Y)$.

Пример 1. Пусть $a^2(y) = a_0^2 + a_2^2 y^2$, $a_2 > 0$. Тогда

$$T(Y) = 4\int_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = \frac{2\pi}{a_2}.$$

Полагая $T(0) = \lim_{Y \to 0} T(Y) = 2\pi/a_2$, получаем гладкую на отрезке $[0, h]$ функцию $T(Y)$.

Из этого примера следует, что a_0 условиями обратной задачи, вообще говоря, не определяется. Поэтому полагаем $a_0 > 0$ известной величиной.

Замечание. Поведение функции T в нуле зависит от поведения функции a в нуле; при этом функция T может быть как дифференцируемой, так и нет в этой точке. Например, если $a''(0) > 0$, $a \in C^3[0, h]$, то $T \in C^1[0, h]$. Более детальное изучение аналитических свойств интеграла (6) выходит за рамки настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть* $T \in C^1[0, h]$. *Тогда на* $[0, h]$ *существует не более одного решения обратной задачи.*

Доказательство. Преобразуем исходное уравнение (6). Домножим его на $c/\sqrt{v^2 - c^2}$ и проинтегрируем обе части по c. При этом, используя прием Дирихле, имеем

$$4\int_{a_0}^v \int_0^{y(c)} \frac{cdydc}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a^2(y))}} = 4\int_{a_0}^v \int_a^v \frac{cdcdy(a)}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a^2)}} = 2\pi\int_{a_0}^v dy(a) = 2\pi y(v),$$

откуда следует равенство

$$\int_{a_0}^{v} \frac{T(y(c))cdc}{\sqrt{v^2 - c^2}} = 2\pi y(v). \tag{8}$$

Дальнейшее доказательство единственности проведем от противного, а именно, допустим, что найдется точка $y_0 \in [0, h)$, число $\delta > 0$ и решения обратной задачи $a_1(y)$, $a_2(y)$ такие, что $a_1(y) = a_2(y) = a(y)$ при $y \le y_0$ (возможно, $y_0 = 0$), и $a_1(y) \ne a_2(y)$ при $y_0 < y < y_0 + \delta \le h$. Тогда для разности обратных функций $y_1(a) \ne y_2(a)$ при $a(y_0) \le a \le a(y_0) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, из (8) имеем

$$2\pi|y_1(a) - y_2(a)| \le \int_{a(y_0)}^{a} \frac{|T(y_1(c)) - T(y_2(c))|cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \le$$

$$\le \max_{y\in[0,h]}|T'(y)| \int_{a(y_0)}^{a} \frac{|y_1(c) - y_2(c)|cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \le \sqrt{\varepsilon} M \max_{c\in[a_0,a]}|y_1(c) - y_2(c)|,$$

где M не зависит от ε. В точке $a_* = \operatorname{argmax}_{c\in[a_0,a]}|y_1(c) - y_2(c)|$ приходим к противоречию в силу произвольности выбора ε.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 1$)

Справедлива следующая теорема существования в малом обратной задачи для случая $k = 1$.

Теорема 2. *Пусть $T \in C^1[0, h]$, $T(Y) > 0$ при $Y \in [0, h]$. Тогда найдется точка $h_0 \in (0, h]$ такая, что на $[0, h_0]$ существует строго монотонная функция $a \in C^1[0, h_0]$ (решение уравнения (5)), такая, что $a(0) = a_0$, $a'(0) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$, определяемую равенством

$$y_n(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{a_0}^{a} \frac{T(y_{n-1}(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y_0 = \text{const}, \quad y_0 \in [0, h], \tag{9}$$

при $a \in [a_0, a_\varepsilon]$, $a_\varepsilon = a_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \le \delta$. Повторяя рассуждения теоремы 1, для $n \ge 2$ получаем

$$2\pi|y_{n+1}(a) - y_n(a)| \le \sqrt{\varepsilon}\sqrt{2a_0 + \delta}\max_{y\in[0,h]}|T'(y)| \max_{c\in[a_0,a_\varepsilon]}|y_n(c) - y_{n-1}(c)|,$$

откуда при $M = \sqrt{2a_0 + \delta}\max_{y\in[0,h]}|T'(y)|$ имеем рекуррентную оценку

$$2\pi \max_{a\in[a_0,a_\varepsilon]}|y_{n+1}(a) - y_n(a)| \le \sqrt{\varepsilon} M \max_{a\in[a_0,a_\varepsilon]}|y_n(a) - y_{n-1}(a)|, \quad n \ge 2.$$

Из нее следует, что функциональный ряд

$$y(a) = \sum_{n=1}^{\infty}(y_{n+1}(a) - y_n(a))$$

равномерно сходится на отрезке $[a_0, a_\varepsilon]$ к непрерывной функции $y(a)$ при достаточно малом ε в силу признака Вейерштрасса, поскольку любая функция $y_n \in C[a_0, a_\varepsilon]$, причем $y_n(a_0) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем последнее по индукции. Так как $y_0 = \text{const}$, то из (9) при $a_0 < a \le a_\varepsilon$ следует, что $2\pi y_1(a) = T(y_0)\sqrt{a^2 - a_0^2}$, и, доопределив $y_1(a)$ при $a = a_0$ как $y_1(a_0) = 0$, получаем, что $y_1 \in C[a_0, a_\varepsilon]$.

Пусть $y_n \in C[a_0, a_\varepsilon]$, $n > 1$. Разобьем интеграл в (9) на сумму двух:

$$\int_{a_0}^{a} \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \int_{a_0}^{a_1} \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} + \int_{a_1}^{a} \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Аналогично лемме 1 доказываем, что функция $y_{n+1}(a)$ непрерывна при любом $a \in [a_1, a_\varepsilon]$, причем

$$2\pi \lim_{a\to a_0} y_{n+1}(a) = \lim_{a\to a_0}\int_{a_0}^{a} \frac{T(y_n(c))cdc}{\sqrt{a^2 - c^2}} = T(y_n(a_0))\lim_{a\to a_0}\sqrt{a^2 - a_0^2} = 0.$$

Доопределив $y_{n+1}(a_0) = 0$, получаем, что $y_{n+1} \in C[a_0, a_\varepsilon]$.

Итак, доказано, что найдется такой отрезок $[a_0, a_\varepsilon]$, что на нем определена непрерывная функция $y(a)$, удовлетворяющая уравнению (8). Аналогично лемме 1 доказываем, что $y \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$.

Докажем, что $y'(a) > 0$ при $a \in (a_0, a_0 + \varepsilon]$ и, более того,

$$2\pi y(a) = T(0)\sqrt{a^2 - a_0^2} + \varphi(a), \quad \varphi \in C^1[a_0, a_\varepsilon], \quad \varphi(a_0) = 0.$$

Для этого продифференцируем (8), предварительно проинтегрировав интеграл по частям:

$$\int_{a_0}^{v} \frac{T(y(c))cdc}{\sqrt{v^2 - c^2}} = -T(y(c))\sqrt{v^2 - c^2}\Big|_{a_0}^{v} + \int_{a_0}^{v} T'(y(c))y'(c)\sqrt{v^2 - c^2}dc =$$

$$= T(0)\sqrt{v^2 - a_0^2} + \int_{a_0}^{v} T'(y(c))y'(c)\sqrt{v^2 - c^2}dc = T(0)\sqrt{v^2 - a_0^2} + \varphi(v).$$

В результате получаем

$$\begin{gathered} 2\pi\varphi'(v) = 2\pi\int_{a_0}^{v} \frac{vT'(y(c))y'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}}dc = \int_{a_0}^{v} \frac{vT'(y(c))\varphi'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}}dc + \\ + \int_{a_0}^{v} \frac{vT(0)T'(y(c))}{\sqrt{(v^2 - c^2)(c^2 - a_0^2)}}cdc = \int_{a_0}^{v} \frac{vT'(y(c))\varphi'(c)}{\sqrt{v^2 - c^2}}dc + F(v), \end{gathered} \tag{10}$$

где $F \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$ – известная функция, причем величина $F(a_0)$ конечна. Равенство (10) является уравнением Абеля II рода относительно функции $\varphi'(v)$ и, таким образом, имеет непрерывное на $[a_0, a_\varepsilon]$ решение. Отсюда следует, что $\varphi \in C^1[a_0, a_\varepsilon]$ и $\varphi(a_0) = 0$.

Из структуры функции $y(a)$ следует, что

$$2\pi y'(a) = \frac{aT(0)}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} + \varphi'(a)$$

при $a \in (a_0, a_\varepsilon]$, и, таким образом, $y'(a) > 0$, если ε достаточно мало. Очевидно, что при этом на отрезке $[a_0, y(a_\varepsilon)]$ существует гладкая монотонная функция $a(y)$, обратная к $y(a)$, причем

$$a^2(y) = a_0^2 + (2\pi/T(0))^2 y^2 + \ldots .$$

Теперь, когда доказана монотонность функции $y(a)$, остается доказать, что $a(y)$ является решением уравнения (5). Для этого домножим (8) на $v/\sqrt{u^2 - v^2}$ и проинтегрируем по отрезку $[a_0, u]$, воспользовавшись приемом Дирихле. Взяв полученный при этом интеграл по частям, имеем

$$\int_{a_0}^{u} T(y(c))cdc = 4\int_{a_0}^{u} \frac{y(v)vdv}{\sqrt{u^2 - v^2}} = 4\int_{a_0}^{u} y'(v)\sqrt{u^2 - v^2}dv.$$

В результате последующего дифференцирования получаем

$$T(y(u)) = 4\int_{a_0}^{u} \frac{y'(v)dv}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Положим $Y = y(u)$. Учитывая монотонность функции $y(v)$ для обратной к ней функции $a(y)$, окончательно приходим к равенству

$$4\int_{0}^{Y} \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = T(Y).$$

Пример 2. Нетривиальный пример дает зависимость $T(Y) = 2\pi\cos Y$. Нетрудно проверить, что решением уравнения (5) при $a_0 = 1$ является $a(y) = 1/\cos y$. Таким образом, решение обратной задачи существует при выполнении условия $T(Y) > 0$.

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ($k = 2$)

Повторяя рассуждения из разд. 1, приходим к следующему равенству:

$$\sqrt{c^2 - a^2(q)}dq = \pm d\xi. \tag{11}$$

Покажем, что и в этом случае физическая система, описываемая (3), допускает периодические колебания. Выберем в (11) знак +, тогда с учетом монотонности и четности $a(q)$ получаем решение $q(\xi)$, возрастающее от значения $-a^{-1}(c)$ до $a^{-1}(c)$ на интервале $(\xi(-c), \xi(c))$, где

$$\xi(c) = \int\limits_{-a^{-1}(c)}^{a^{-1}(c)} \sqrt{c^2 - a^2(y)}dy = 2\int\limits_0^{a^{-1}(c)} \sqrt{c^2 - a^2(y)}dy \tag{12}$$

и $y = a^{-1}$ — функция, обратная к функции a.

Доопределим функцию $y(\xi)$ в точках $\pm\xi(c)$ по непрерывности, положив $y(\pm\xi(c)) = \pm a^{-1}(c)$. Очевидно, что при этом $y'(\pm\xi(c)) = +\infty$. Такое построение для ОДУ (11) можно продолжить на всей числовой прямой $\mathbb{R} \ni \xi$. В итоге приходим к стационарному решению $y(\xi)$ (волновому процессу с обострением) (см. фиг. 1) с периодом $4\xi(c)$ и амплитудой $a^{-1}(c)$.

Поставим следующую обратную задачу: по периоду $X(Y)$, как функции амплитуды Y, найти функцию $a(y)$ (см. разд. 1). Полагая $c = a(Y)$, из (12) получаем относительно $a(y)$ основное уравнение обратной задачи:

$$X(Y) = 4\int\limits_0^Y \sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}dy. \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть* $a \in C^2[0, h]$. *Тогда* $X \in C^2(0, h]$ *и* $X'(Y) > 0$ *при* $Y \in (0, h]$.

Доказательство. Формальное дифференцирование (13) дает

$$X'(Y) = 4a'(Y)a(Y)\int\limits_0^Y \frac{dy}{\sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}} = a'(Y)a(Y)T(Y),$$

где функция $T(Y)$ определяется равенством (6). Из леммы 1 следует, что $T \in C^1(0, h]$, откуда следует утверждение леммы.

Пример 3. Рассмотрим $a^2(y) = a_0^2 + a_2^2y^2$. Несложные вычисления дают $X(Y) = \pi a_2 Y^2$. Отсюда следует, что a_0 данными обратной задачи, вообще говоря, не определяется. Кроме того, $X(Y)$ имеет при $Y = 0$ нуль порядка не менее второго, если функция $a(y)$ достаточно гладкая.

Теорема 3. *Пусть* $X \in C^2[0, h]$, *и пусть решение обратной задачи* $a(y)$ *известно при* $y \in [0, \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < h$. *Тогда обратная задача имеет не более одного решения на* $[0, h]$.

Доказательство. Допустим, что при $y > \varepsilon$ существуют $a_1(y) \neq a_2(y)$, что эквивалентно существованию $y_1(a) \neq y_2(a)$ при $a > a_\varepsilon$, $a_\varepsilon = a_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$. Продифференцируем (13) и запишем полученное уравнение в виде

$$X'(y(v))y'(v) = 4\int\limits_0^v \frac{vy'(a)da}{\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Для разности $y_1(v) - y_2(v) = z(v)$ имеем

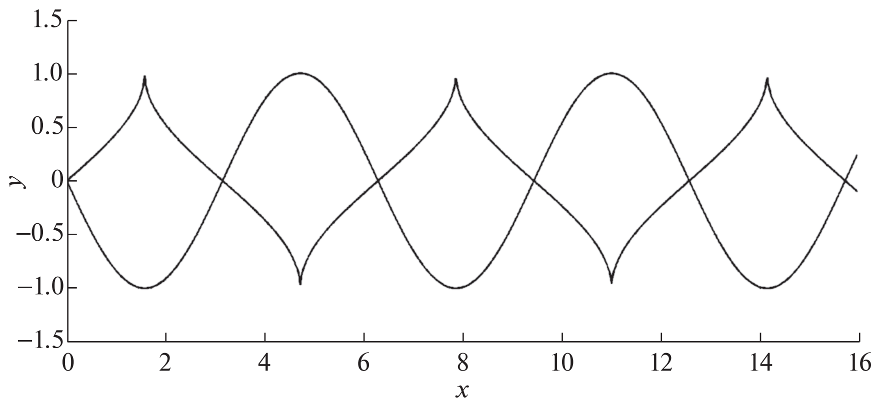
$$X'(y_1(v))z'(v) = 4\int\limits_0^v \frac{vz'(a)da}{\sqrt{v^2 - a^2}} + [X'(y_2(v)) - X'(y_1(v))]y_2'(v).$$

Отсюда при $v \in [a_\varepsilon, b]$, $b = \min_{i=1,2}\{a_i(h)\}$ вытекает следующая оценка:

$$|z'(v)| \min_{v \in [a_\varepsilon, b]} |X'(y_1(v))| \le (4v/a_\varepsilon)\sqrt{v^2 - a_\varepsilon^2} \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z'(a)| + \max_{Y \in [0, h]} |X''(Y)| \left|y_2'(v)\right| \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z(a)|,$$

т.е.

$$m|z'(v)| \le [M_1\sqrt{v - a_\varepsilon} + M_2(v - a_\varepsilon)] \max_{a \in [a_\varepsilon, v]} |z'(a)|,$$



Фиг. 1. Стационарные колебания для $k = 1$ и в режиме с обострением для $k = 2$.

где величины $m, M_1, M_2 > 0$ и не зависят от v. При достаточно малой разности $v - a_\varepsilon \le \delta$ из этой оценки в точке $v^* = \operatorname{argmax}_{v\in[a_\varepsilon, a_\varepsilon+\delta]}|z'(v)|$ имеем

$$m|z'(v^*)| \le (M_1\sqrt{\delta} + M_2\delta)|z'(v^*)|.$$

В силу произвольности выбора $\delta > 0$ приходим к противоречию.

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ $k = 1, 2$

Исходное уравнение (5) обратной задачи в случае $k = 1$ имеет под интегралом интегрируемую особенность, что затрудняет непосредственное использование (5). Получим эквивалентное функциональное уравнение, лишенное этого недостатка.

Обратимся к уравнению (8) и проинтегрируем левую часть по частям:

$$-T(y(c))\sqrt{v^2 - c^2}\Big|_{a_0}^{v} + \int_{a_0}^{v}\sqrt{v^2 - c^2}\,T'(y(c))y'(c)dc = 2\pi y(v).$$

Возвращаясь к переменной y, имеем

$$T(0)\sqrt{a^2(Y) - a_0^2} + \int_0^Y \sqrt{a^2(Y) - a^2(y)}\,T'(y)dy = 2\pi Y.$$

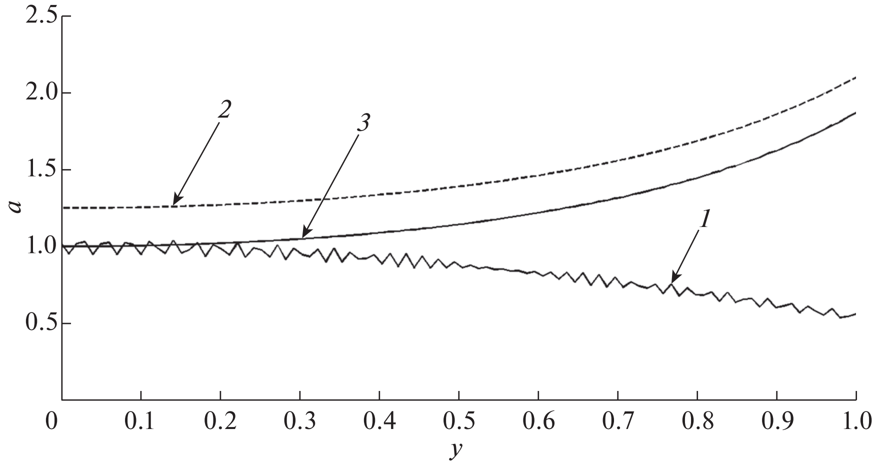
Сделаем замену $Z^2(Y) = a^2(Y) - a_0^2$ и окончательно получим следующее функциональное уравнение:

$$T(0)Z(Y) + \int_0^Y \sqrt{Z^2(Y) - Z^2(y)}\,T'(y)dy = 2\pi Y. \tag{14}$$

Это функциональное уравнение не является уравнением типа Вольтерра II рода, поскольку выражение под интегралом не локально. Однако (14) является эволюционным уравнением, что вытекает из следующего нелокального дифференциального уравнения:

$$\frac{dZ}{dY} = 2\pi\left(T(0) + Z(Y)\int_0^Y \frac{T'(y)}{\sqrt{Z^2(Y) - Z^2(y)}}dy\right)^{-1}.$$

Численное решение этого дифференциального уравнения можно построить, например, методом ломаных, единственность этого решения следует из результатов разд. 2. Очевидно, что построенное таким образом решение имеет наибольшую область определения, в то время как решение, построенное методом последовательных приближений для (14) этого, вообще говоря, не гарантирует. Данное обстоятельство полностью подтвердилось при проведении вычислительных экспериментов.



Фиг. 2. Входные данные для $k = 1$: функция $T(y)$, относительная погрешность 10% (кривая *1*). Точное решение обратной задачи: функция $a(y)$, сдвиг по a на +0.25 (кривая *2*). Численное решение (кривая *3*).

Опираясь на свойство эволюционности уравнения (14), в настоящей работе был применен следующий дискретный алгоритм нахождения функции $Z(y)$. Для выражения под интегралом в (14) использовалась формула прямоугольников на равномерной сетке, что приводило к рекуррентному вычислению $z_n = Z(y_n)$, $n = 1,2,\ldots,N$:

$$T(0)z_n = 2\pi y_n - \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{z_{n-1}^2 - z_k^2}T'(y_k)h, \quad z_0 = 0, \quad y_n = nh, \quad y_0 = 0.$$

Для функции $T(y)$, заданной приближенно, при вычислении $T'(y_n)$ осуществлялась соответствующая регуляризация.

Результаты численного моделирования представлены на фиг. 2 для $T(y) = 2\pi\cos(y)$, точное решение $a(y) = 1/\cos(y)$, $y \in [0,\pi/2)$. Относительная погрешность задания $T(y)$ по норме $C_h[0,\pi/2]$ составляла 10%.

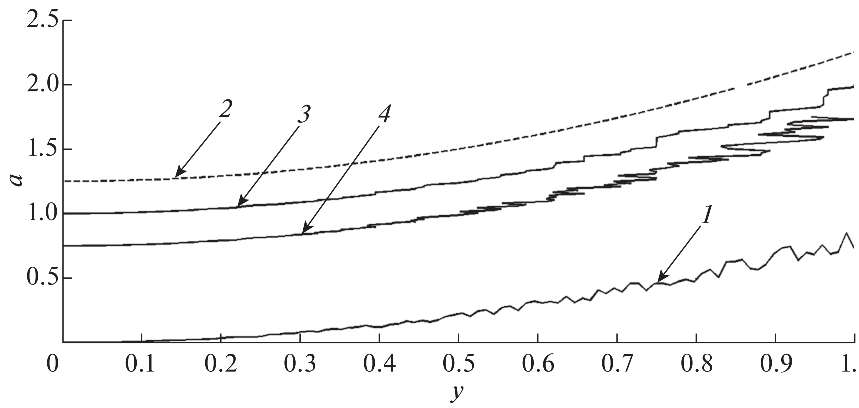
Очевидно, что обратная задача при $k = 2$ является хуже обусловленной, чем при $k = 1$, поскольку уравнение (13) однократным дифференцированием не приводится к функциональному уравнению II рода. Однако в результате интегрирования (13) по частям удается получить интегральное уравнение I рода с особенностью в ядре типа $1/\sqrt{x}$. Основным моментом при построении численного алгоритма является аналитически точное вычисление квадратур с особенностью.

Проинтегрировав (13) по частям, имеем

$$X(y(v)) = \int_{a_0}^{v}\sqrt{v^2 - a^2}y'(a)da = \int_{a_0}^{v}\frac{ay(a)}{\sqrt{v^2 - a^2}}da = \sum_{j=1}^{N}\int_{a_{j-1}}^{a_j}\frac{ay(a)}{\sqrt{v^2 - a^2}}da,$$

откуда на равномерной сетке $a_k = a_0 + kh$, $k = 0,1,\ldots,N$, получаем рекуррентное уравнение на $\{y_n\}$, $n = 1,2,\ldots,N$:

$$y_n\sqrt{a_n^2 - a_{n-1}^2} = X(y_n) - \sum_{j=0}^{n-1}y_j(\sqrt{a_n^2 - a_{j-1}^2} - \sqrt{a_n^2 - a_j^2}), \quad y_0 = 0.$$



Фиг. 3. Входные данные для $k = 2$: функция $X(y)$, относительная погрешность 2.5% (кривая *1*). Точное решение обратной задачи: функция $a(y)$, сдвиг по a на +0.25 (кривая *2*). Численное решение (кривая *3*). Результат без учета монотонности $y(a)$, сдвиг по a на –0.25 (кривая *4*).

Результаты численного моделирования представлены на фиг. 3. Поскольку на приближенных данных $X(y_n)$ сеточная функция $y_n = y(a_n)$ оказывается не монотонной, то графическое изображение функции $a_n = a(y_n)$ носит весьма причудливый характер. С учетом необходимой монотонности $\{y_n\}$ результат решения также представлен на фиг. 3. Относительная погрешность задания $X(y)$ по норме $C_h[0, \pi/2]$ составляла 2.5%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. N.Y.: A Wiley-Interscience Publ., 1974. 636 p.
2. *Leibovich S., Seebass A.R.* (Ed.) Linear and nonlinear waves. Ithaka. NY: Cornell Univer. Press, 1974. 331 p.
3. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
4. *Денисов А.М.* Существование решения обратной коэффициентной задачи для квазилинейного гиперболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 587–596.
5. *Денисов А.М.* Обратная задача для квазилинейной системы в частных производных с нелокальным краевым условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 10. С. 1571–1579.
6. *Денисов А.М.* Обратная задача для квазилинейной системы в частных производных с нелокальным краевым условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 10. С. 1571–1579.
7. *Чурбанов Д.В., Щеглов А.Ю.* Итерационный метод решения обратной задачи для нелинейного уравнения первого порядка в частных производных с оценками гарантированной точности и числа шагов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 2. С. 275–280.
8. *Денисов А.М., Макеев А.С.* Численный метод решения обратной задачи для модели популяции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 3. С. 490–500.
9. *Щеглов А.Ю.* Метод определения коэффициентов квазилинейного уравнения гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 5. С. 813–833.
10. *Herglotz G.* Über das Benndorfsche Problem der Portpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenstrahlen // Phys. Zeltshr. 1907. V. 8. № 5. P. 145–147.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
12. *Newell A.* Solitons in mathematics and physics. Arizona: Soc. for Industrial and Appl. Math., 1985. 246 p.
13. *Баев А.В.* О решении одной обратной задачи для уравнений мелкой воды в бассейне с переменной глубиной // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 11. С. 3–15.
14. *Баев А.В.* Об одной обратной задаче для уравнения КдВ с переменным коэффициентом // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 788–792.
15. *Кабанихин С.И., Криворотько О.И.* Алгоритм восстановления источника возмущений в системе нелинейных уравнений мелкой воды // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 138–147.