

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.635

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА В КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2021 г. А. И. Козлов¹, М. Ю. Кокурин^{2,*}

¹ 424000 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, ул. Вознесенская, 110, АНО ДПО “Инфосфера”,
центр профессиональной подготовки “Институт программных систем”, Россия

² 424000 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия

*e-mail: kokurinm@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.01.2021 г.
Переработанный вариант 01.01.2021 г.
Принята к публикации 01.01.2021 г.

Исследуются коэффициентные обратные задачи для уравнений второго и третьего порядков с одним и двумя неизвестными коэффициентами. В качестве исходных данных рассматривается решение уравнения для набора зондирующих источников, усредненное по времени со степенными весами. Установлено, что исходные нелинейные обратные задачи допускают эквивалентную редукцию к интегральным уравнениям, которые в зависимости от способа усреднения могут быть как линейными, так и нелинейными. Доказывается, что эти уравнения имеют единственное решение, определяющее искомое решение обратных задач. Приводятся результаты численного эксперимента по решению получаемого линейного интегрального уравнения с ядром специального вида. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, линейное интегральное уравнение, бигармоническое уравнение, единственность, численный эксперимент.

DOI: 10.31857/S0044466921090131

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] М.М. Лаврентьев предложил подход к решению нелинейных коэффициентных обратных задач для широкого класса уравнений в частных производных, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Подход использует преобразование Лапласа исследуемого уравнения по времени. Поясним схему действий применительно к обратной задаче для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим обратную задачу акустического зондирования ограниченной неоднородности набором точечных источников, расположенных вне этой неоднородности (см. [3]). Акустическое поле $u(x, t) = u(x, t; q)$, возбуждаемое источником, находящимся в точке q , определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - \delta(x - q)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \quad (1.1)$$
$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $c(x) > 0$ — скорость звука в точке $x \in \mathbb{R}^3$ и предполагается, что $c(x) \equiv c_0$ вне априори заданной ограниченной замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^3$ с известной постоянной c_0 , а значения $c(x)$ при

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085).

$x \in D$ неизвестны. Для определенности функцию $c = c(x)$ считаем непрерывной на $\mathbb{R}^3$. Непрерывная функция g удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty g(t)dt \neq 0, \quad |g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}, \quad \beta > 0, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Для отыскания $c(x)$ при $x \in D$ рассеянное поле $u = u(x, t; q)$ измеряется при $t > 0$ в точках $x \in X$, где $X \subset \mathbb{R}^3$ — множество детекторов, $X \cap D = \emptyset$. Будем считать, что в эксперименте зондирования используется множество источников $q \in Y$, $Y \cap D = \emptyset$. Множества X и Y далее считаем замкнутыми областями, расположенными на многообразиях в $\mathbb{R}^3$, вид которых будет уточнен далее. Для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$, определим преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$. Будем считать, что все функции $u(x, t; q)$, $q \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно достаточно быстро убывают при $t \rightarrow +\infty$, когда $x \in X$, так что их преобразования Лапласа существуют. Кроме того, предполагаем, что $u(x, t; q) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $q \in Y$ и $t > 0$. Условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования, обсуждаются в [4], [5]. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D, \quad (1.3)$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}(x, t) = \xi(x) u_{tt}(x, t) + \delta(x - q) g(t).$$

Функция c , очевидно, однозначно определяется по ξ , поэтому далее ограничимся отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$. Применяя к обеим частям последнего равенства преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\Delta \tilde{u}(x, p; q) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; q) = p^2 \xi(x) \tilde{u}(x, p; q) + \tilde{g}(p) \delta(x - q), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.4)$$

В силу сделанных предположений, $\tilde{u}(x, p; q) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по $q \in Y$, $p \geq 0$. Нам потребуется фундаментальное решение (функция Грина) уравнения

$$\Delta u(x) - \frac{p^2}{c_0^2} u(x) = \delta(x - q), \quad p \geq 0,$$

с условием на бесконечности $u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$. Эта функция имеет вид

$$G(x, q; p) = -\frac{e^{\frac{p}{c_0}|x-q|}}{4\pi|x-q|}. \quad (1.5)$$

Из (1.4) с учетом (1.5) следует равенство

$$\tilde{u}(x, p; q) = \tilde{g}(p) G(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.6)$$

Обозначим для краткости

$$H^0(x, q; p) = \tilde{g}(p) G(x, q; p). \quad (1.7)$$

Двукратное дифференцирование равенства (1.6) по p с учетом (1.7) дает

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{pp}(x, p; q) &= H_{pp}^0(x, q; p) + 2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + \\ &+ 4p \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] \xi(x') dx' + \\ &+ p^2 \int_D [G_{pp}(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + 2G_p(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_{pp}(x', p; q)] \xi(x') dx'.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Полагая в (1.6) и (1.8) $p = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, 0; q) &= H^0(x, q; 0) = \tilde{g}(0)G(x, q; 0), \\ \tilde{u}_{pp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}^0(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx' = \\ &= H_{pp}^0(x, q; 0) + 2\tilde{g}(0) \int_D G(x, x'; 0) G(x', q; 0) \xi(x') dx'.\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.5) следует, что для определения функции $\xi(x)$ имеем линейное интегральное уравнение

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_0(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (1.9)$$

где

$$f_0(x, q) = \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}^0(x, q; 0) \right). \quad (1.10)$$

Заметим, что $\tilde{g}(0) \neq 0$ в силу первого условия в (1.2), функция $H_{pp}^0(x, q; 0)$ определяется из (1.7). Таким образом, входными данными для определения ξ служит величина рассеянного поля $u(x, t; q)$, усредненная по времени с весом t^2 , для различных $(x, q) \in X \times Y$.

К уравнению (1.9), называемому в работе уравнением М.М. Лаврентьева, сводятся также обратные задачи зондирования неоднородности точечными гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [6, с. 223], [7, § 3.1], [8]). К аналогичному уравнению с заменой (1.5) функцией Грина в ограниченной области G сводится обратная задача зондирования неоднородного включения $D \subset G$ (см. [9]).

Начиная с [2], значительное число работ было посвящено условиям, при которых уравнение (1.9) для любой правой части имеет не более одного решения (см. [3], [7, § 3.1], [8], [10]–[12]). Это свойство имеет место, например, если X, Y — замкнутые области на плоскости, не пересекающей D , либо ограниченные поверхности, содержащие множество D внутри. В качестве X, Y можно выбрать также замкнутые области на аналитических поверхностях, например, сферах, содержащих D внутри. В этих случаях размерность пространственного носителя данных $X \times Y$ в (1.9) равна четырем, в то время как искомая функция ξ зависит от трех переменных. Тем самым обратная задача оказывается переопределенной. Отметим в этой связи следующий недавний результат.

Теорема 1 (см. [11], [12]). Пусть $\Pi, \mathcal{L}$ — плоскость и прямая в $\mathbb{R}^3$, не пересекающие $\bar{D}$, одно из X и Y — замкнутая область в Π , другое — замкнутый отрезок в $\mathcal{L}$. Тогда для любой правой части f_0 уравнение (1.9) имеет не более одного решения.

В условиях теоремы 1 размерность носителя данных $X \times Y$ оказывается равной трем, как и размерность носителя D искомой функции. Несмотря на достаточно продолжительную историю теоретического исследования уравнения М.М. Лаврентьева, вопросы численного решения этого уравнения ранее практически не изучались. Альтернативный способ редукции описанной обратной задачи к линейному интегральному уравнению развивается в [13].

Дальнейшее содержание работы следующее. Во-первых, с целью более адекватного моделирования реальных процессов зондирования в (1.1) вместо обобщенной функции $\delta(x - q)$, сосре-

доточенной в точке $x = q$, мы рассматриваем распределенный источник, описываемый непрерывной функцией $\varphi(|x - q|)$, где $\varphi(r) = 0$ при $r \geq \varepsilon > 0$. Таким образом, неоднородность зондируется сигналами одной и той же пространственной формы, сосредоточенными в ε -окрестностях точек $q \in Y$. Переход к описанию зондирующих сигналов обычными, а не обобщенными функциями, в определенной степени упрощает теоретический анализ соответствующих волновых уравнений, к которым теперь применим классический инструментарий исследования гиперболических уравнений (см., например, [14], [15]). Наряду с этим рассматриваются уравнения более общего вида, в том числе уравнение третьего порядка, с двумя подлежащими определению коэффициентами. Устанавливается, что при наличии данных об усреднении рассеянного поля с весами t^m , $m = 2, 3$, определение указанных коэффициентов сводится к уравнениям вида (1.9). Эти результаты излагаются ниже в разд. 2 и 3. В то же время использование в гиперболическом уравнении в качестве входных данных усреднений с весами t^m , $m = 3, 4$, приводит к новым типам интегральных уравнений. Их мы называем уравнениями типа уравнения М.М. Лаврентьева. При подходящем выборе многообразий источников и детекторов X, Y мы устанавливаем, что эти уравнения также имеют единственное решение. В начале разд. 4 исследуется случай $m = 3$. Получаемое интегральное уравнение оказывается линейным, но его оператор отличается от оператора в (1.9). Завершающая часть разд. 4 посвящена случаю $m = 4$. В этой ситуации соответствующее уравнение оказывается уже нелинейным, однако доказывается, что оно имеет единственное решение. Раздел 5 посвящен описанию и результатам численного эксперимента по решению уравнения вида (1.9).

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) + b(x) u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Относительно функции $u(x, t) = u(x, t; q)$ считаем выполненными сделанные ранее предположения. В рассматриваемой обратной задаче по измеренным усредненным по времени значениям $u(x, t; q)$, $(x, q) \in X \times Y$, подлежат определению кусочно-непрерывные коэффициенты $b(x)$, $c(x)$, $x \in D$. Считаем, что $c(x) \equiv c_0$ и $b(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$, функция $g(t)$ удовлетворяет условию (1.2). Пусть $\varphi = \varphi(r)$, $r \geq 0$ — непрерывная функция и выполняются условия

$$\varphi(r) = 0, \quad r \geq \varepsilon; \quad \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr \neq 0. \quad (2.2)$$

Обозначим $O_\varepsilon(q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - q| \leq \varepsilon\}$. Будем предполагать, что

$$\left(\bigcup_{q \in Y} O_\varepsilon(q) \right) \cap D = \emptyset. \quad (2.3)$$

Как и выше, будем интерпретировать точки $q \in Y$ как координаты зондирующих источников, описываемых слагаемым $\varphi(|x - q|)g(t)$ в (2.1). Указанные источники сосредоточены в ε -окрестности точек q . Согласно (2.3), эти окрестности не пересекаются с носителем неоднородности D . Усреднение по t волнового поля $u(x, t; q)$ происходит в точках $x \in X$, где X — множество детекторов. Выполняя в (2.1) преобразование Лапласа по t и пользуясь обозначением (1.3), получаем подобное (1.6) равенство

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + p \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) b(x') dx', \quad (2.4)$$

где

$$H(x, q; p) = \tilde{g}(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx', \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.5)$$

Дифференцируя обе части (2.4) по p , находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, p; q) = & H_p(x, q; p) + 2p \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + p^2 \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + \\ & + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] \xi(x') dx' + \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) b(x') dx' + \\ & + p \int_D [G_p(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) + G(x, x'; p) \tilde{u}_p(x', p; q)] b(x') dx'.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Далее нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus O_\varepsilon(q)$ справедливо равенство

$$\int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x - q|}, \quad A(\varphi, \varepsilon) = 4\pi \int_0^\varepsilon r^2 \varphi(r) dr.$$

Доказательство сводится к непосредственному интегрированию. Имеем

$$J \triangleq \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|y'|) dy'}{|y' - (x - q)|}.$$

Проводя при необходимости в последнем интеграле ортогональное преобразование $y' = Uz'$, без ограничения общности можем считать, что направление вектора $x - q$ совпадает с направлением оси y'_3 в координатах (y'_1, y'_2, y'_3) , т.е. $x - q = (0, 0, |x - q|)$. Переходя к сферическим координатам

$$y'_1 = r \sin \chi \cos \theta, \quad y'_2 = r \sin \chi \sin \theta, \quad y'_3 = r \cos \chi, \quad \chi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

и выполняя интегрирование по χ , получаем

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\varepsilon \varphi(r) r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{\sin \chi d\chi}{\sqrt{r^2 - 2r|x - q| \cos \chi + |x - q|^2}} = \\ &= \frac{1}{|x - q|} \int_0^\varepsilon \varphi(r) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left[\sqrt{r^2 + 2|x - q|r + |x - q|^2} - \sqrt{r^2 - 2|x - q|r + |x - q|^2} \right].\end{aligned}$$

По условию леммы $|x - q| > \varepsilon \geq r$, поэтому выражение в квадратных скобках есть $(r + |x - q|) - (|x - q| - r) = 2r$. Требуемое утверждение непосредственно следует отсюда.

Полагая $p = 0$ в (2.4) и используя (2.5) и лемму 1, получаем

$$\tilde{u}(x, 0; q) = H(x, q; 0) = -\frac{\tilde{g}(0)}{4\pi} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} = -\frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi |x - q|}, \quad x \in D. \quad (2.7)$$

Заметим, что условие леммы выполняется в силу (2.3). Полагая теперь $p = 0$ в (2.6) и пользуясь (2.7), находим

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, 0; q) &= -\int_0^\infty t u(x, t; q) dt = H_p(x, q; 0) + \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) b(x') dx' = \\ &= H_p(x, q; 0) + \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{16\pi^2} \int_D \frac{b(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Таким образом, для определения коэффициента $b(x)$ имеем аналогичное (1.9) интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\int_D \frac{b(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} &= f_1(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \\ f_1(x, q) &= -\frac{16\pi^2}{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t u(x, t; q) dt + H_p(x, q; 0) \right).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Перейдем к определению коэффициента $c(x)$ или, эквивалентно, функции $\xi(x)$. Дифференцируя (2.6) по p и полагая в полученном равенстве $p = 0$, находим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{pp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx' + \\ &+ 2 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] b(x') dx'. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку функция $b(x)$ уже определена, функция $\tilde{u}_p(x, 0; q)$ также известна в силу (2.8). В свою очередь, функция $\tilde{u}(x, 0; q)$ определена в (2.7). Таким образом, из (2.10) получаем уравнение для определения функции ξ :

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_2(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} f_2(x, q) &= \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}(x, q; 0) - \right. \\ &\left. - 2 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] b(x') dx' \right). \end{aligned}$$

Видим, что для определения двух коэффициентов в уравнении (2.1) достаточно иметь усредненные значения рассеянного поля

$$\left\{ \int_0^\infty t u(x, t; q) dt, \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}. \quad (2.12)$$

При этом обе искомые функции $b(x)$, $c(x)$ определяются из интегральных уравнений (2.9), (2.11) с одним и тем же ядром. Однозначность восстановления указанных функций следует из теоремы 1.

Следующая теорема подытоживает проведенные рассуждения.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), множества X , Y выбраны как в теореме 1. Тогда данные (2.12) позволяют однозначно определить функции $b(x)$, $c(x)$ в уравнении (2.1). Именно, они находятся из уравнений (2.9) и (2.11), имеющих единственные решения.

В следующем разделе обратимся к задаче реконструкции двух коэффициентов в уравнении третьего порядка.

3. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) - b(x) \Delta u_t(x, t) &= \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|) g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) описывает акустические процессы в вязкой теплопроводной среде, параметр $b(x)$ определяется коэффициентами вязкости среды (см. [16]). Как и выше, требуется реконструировать кусочно-непрерывные коэффициенты $c(x)$ и $b(x)$, $x \in D$, причем $c(x) \equiv c_0$, $b(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Считаем выполненными условия (1.2), (2.2), (2.3). При прежних предположениях относительно функции $u(x, t) = u(x, t; q)$ преобразование Лапласа уравнения (3.1) дает

$$\frac{p^2}{c^2(x)} \tilde{u}(x, p; q) = (1 + pb(x)) \Delta \tilde{u}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \varphi(|x - q|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Поскольку $b(x) = 0$ вне D , с учетом (2.3) получаем

$$\frac{p^2}{c^2(x)(1+pb(x))} \tilde{u}(x, p; q) = \Delta \tilde{u}(x, p; q) - \tilde{g}(p) \Phi(|x - q|). \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\eta(x, p) = \frac{1}{c^2(x)(1+pb(x))} - \frac{1}{c_0^2}, \quad (3.3)$$

тогда из (3.2) вытекает

$$\Delta \tilde{u}(x, p; q) - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{u}(x, p; q) = p^2 \eta(x, p) \tilde{u}(x, p; q) + \tilde{g}(p) \Phi(|x - q|), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \eta(x', p) \tilde{u}(x', p; q) dx'. \quad (3.4)$$

Поэтому для $\tilde{u}(x, 0; q)$ выполняется равенство (2.7). Дифференцируя тождество (3.4) дважды по p и полагая $p = 0$, с учетом равенства $\eta(x, 0) = \xi(x)$ (см. (1.3), (3.3)), получаем

$$\tilde{u}_{pp}(x, 0; q) = \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt = H_{pp}(x, q; 0) + 2 \int_D G(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) \xi(x') dx'.$$

Из (1.5), (2.7) следует, что для определения функции $\xi(x)$ и вместе с ней $c(x)$ имеем уравнение

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} &= f_3(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \\ f_3(x, q) &= \frac{8\pi^2}{\tilde{g}(0)A(\Phi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt - H_{pp}(x, q; 0) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Покажем, что и коэффициент $b(x)$ определяется из интегрального уравнения с тем же ядром, что и в (3.5). С этой целью продифференцируем равенство (3.4) трижды по p и в итоговом равенстве положим $p = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ppp}(x, 0; q) &= H_{ppp}(x, q; 0) + 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \xi(x') \tilde{u}(x', 0; q) + \\ &+ G(x, x'; 0) \eta_p(x', 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \xi(x') \tilde{u}_p(x', 0; q)] dx'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.4) следует $\tilde{u}_p(x, p; q) = H_p(x, q; p) + O(p)$ при $p \rightarrow 0$. Поэтому $\tilde{u}_p(x, 0; q) = H_p(x, q; 0)$ есть известная функция. Кроме того, согласно (3.3),

$$\eta_p(x, 0) = -\frac{b(x)}{c^2(x)}, \quad x \in D.$$

По построению функция $c(x)$ уже известна. Поэтому (3.6) приводит к интегральному уравнению для функции $v(x) = c^{-2}(x)b(x)$:

$$\int_D \frac{v(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f_4(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} f_4(x, q) &= \frac{8\pi^2}{3\tilde{g}(0)A(\Phi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt + H_{ppp}(x, q; 0) + \right. \\ &+ 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] \xi(x') dx' \left. \right). \end{aligned}$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), множества X, Y выбраны как в теореме. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^2 u(x, t; q) dt, \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функции $b(x), c(x)$ в уравнении (3.1). Именно, они находятся из уравнений (3.5) и (3.7), при этом $b(x) = c^2(x)v(x)$. Уравнения (3.5), (3.7) имеют единственные решения.

В рассмотренных выше примерах реконструкция неизвестных коэффициентов уравнений сводилась к интегральному уравнению М.М. Лаврентьева с различными правыми частями. Наличие результатов типа теоремы 1 избавляет от необходимости отдельного анализа единственности решения каждого возникающего уравнения. Ниже покажем, что описанная ранее схема редукции коэффициентных обратных задач к интегральным уравнениям при использовании альтернативных схем усреднения сигнала может приводить к интегральным уравнениям новых типов. Вопросы единственности решений таких уравнений нуждаются в отдельном исследовании.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМАХ УСРЕДНЕНИЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ

Обратимся к задаче реконструкции скорости распространения сигнала $c(x)$ в уравнении

$$\frac{1}{c^2(x)} u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) - \varphi(|x - q|)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь в отличие от (1.1) при каждом $q \in Y$ зондирующий источник распределен в шаре $O_\varepsilon(q)$. Считаем выполненными условия разд. 2. Дополнительно предположим, что

$$\int_0^\infty t g(t) dt \neq 0. \quad (4.2)$$

Без ограничения общности можем считать функцию φ в (4.1) нормированной условием

$$\int_{O_\varepsilon(0)} \varphi(|y'|) dy' = 1. \quad (4.3)$$

В данном случае вместо (2.4) имеем уравнение

$$\tilde{u}(x, p; q) = H(x, q; p) + p^2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' \quad (4.4)$$

с функцией H , определенной в (2.5). Выясним возможность однозначной реконструкции коэффициента $c(x)$ по усредненным данным $\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt$ для $(x, q) \in X \times Y$.

Дифференцируя (4.4) по p трижды и полагая $p = 0$, для $(x, q) \in X \times Y$ получаем равенство

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ppp}(x, 0; q) &= - \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt = H_{ppp}(x, q; 0) + \\ &+ 6 \int_D [G_p(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q)] \xi(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Используя (4.4) и (2.7), находим

$$\tilde{u}(x, 0; q) = H(x, q; 0) = - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi |x - q|}. \quad (4.6)$$

Кроме того, из (4.4) и (2.5) следует, что при $p \rightarrow 0$ выполняется

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, p; q) &= H_p(x, q; p) + O(p) = \tilde{g}'(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx' + \\ &+ \tilde{g}(p) \int_{O_\varepsilon(q)} G_p(x, x'; p) \varphi(|x' - q|) dx' + O(p).\end{aligned}$$

Поэтому, ввиду (1.5), (4.3) и леммы 1,

$$\begin{aligned}\tilde{u}_p(x, 0; q) &= \tilde{g}'(0) \int_{O_\varepsilon(q)} G(x, x'; 0) \varphi(|x' - q|) dx' + \tilde{g}(0) \int_{O_\varepsilon(q)} G_p(x, x'; 0) \varphi(|x' - q|) dx' = \\ &= -\frac{\tilde{g}'(0)}{4\pi} \int_{O_\varepsilon(q)} \frac{\varphi(|x' - q|) dx'}{|x' - x|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0} \int_{O_\varepsilon(q)} \varphi(|x' - q|) dx' = -\frac{\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x - q|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0}.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Объединяя равенства (4.5)–(4.7), для $(x, q) \in X \times Y$ получаем

$$\begin{aligned}-\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt &= H_{ppp}(x, q; 0) + 6 \int_D \left[\frac{1}{4\pi c_0} \left(-\frac{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x' - q|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{4\pi|x' - x|} \right) \left(-\frac{\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)}{4\pi|x' - q|} + \frac{\tilde{g}(0)}{4\pi c_0} \right) \right] \xi(x') dx' .\end{aligned}$$

Поэтому для нахождения функции $\xi(x)$ имеем интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\int_D \left[\frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a}{|x' - x|} + \frac{b}{|x' - q|} \right) \right] \xi(x') dx' &= f_5(x, q), \\ (x, q) \in X \times Y, \quad a &= (\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)c_0)^{-1} \tilde{g}(0), \quad b = (\tilde{g}'(0)c_0)^{-1} \tilde{g}(0),\end{aligned}\quad (4.8)$$

$$f_5(x, q) = -\frac{8\pi^2}{3\tilde{g}'(0)A(\varphi, \varepsilon)} \left(\int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt + H_{ppp}(x, q; 0) \right).$$

Заметим, что, согласно (4.2), в этих формулах $\tilde{g}'(0) \neq 0$.

Следующая теорема устанавливает единственность решения уравнения (4.8), которое мы называем уравнением типа М.М. Лаврентьева.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.2), (4.3), множества X, Y выбраны как в теореме 1. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^3 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функцию $s(x)$. Уравнение (4.8) с любой правой частью имеет в классе кусочно-непрерывных функций не более одного решения.

Доказательство. Пусть для определенности X и Y — замкнутая область плоскости Π и отрезок прямой $\mathcal{L}$ соответственно, $\Pi \cap D = \mathcal{L} \cap D = \emptyset$. Достаточно убедиться, что соответствующее однородное уравнение

$$\int_D \left\{ \frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a}{|x' - x|} + \frac{b}{|x' - q|} \right) \right\} \xi(x') dx' = 0, \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (4.9)$$

имеет в указанном классе лишь нулевое решение. Заметим, что функция $\psi(x, q)$, определенная интегралом в левой части (4.9), вещественно аналитична по $x \in \Pi$ и $q \in \mathcal{L}$. Поэтому равенство (4.9) продолжается по аналитичности на все $(x, q) \in \Pi \times Y$. Зафиксируем произвольно точку

$x \in \Pi$ и перейдем в (4.9) к пределу при $q \in \mathcal{L}$, удаляющейся в бесконечность. Аналогично зафиксируем $q \in Y$ и перейдем к пределу при $x \in \Pi$, удаляющейся в бесконечность. В результате получаем

$$\int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x' - x|} = 0, \quad \int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x' - q|} = 0$$

для всех $x \in X$ и $q \in Y$ соответственно. Поэтому из (4.9) следует

$$\int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x - x'| |x' - q|} = 0, \quad (x, q) \in X \times Y.$$

Ссылка на теорему 1 дает $\xi \equiv 0$, что и завершает доказательство.

Замечание 1. Аналогично устанавливается инъективность для более широкого класса вполне непрерывных интегральных операторов

$$L_{a,b}(\xi)(x, q) = \int_D \left\{ \frac{1}{|x - x'| |x' - q|} - \left(\frac{a(x', x)}{|x' - x|} + \frac{b(x', q)}{|x' - q|} \right) \right\} \xi(x') dx', \quad (x, q) \in X \times Y,$$

где $a(x', x)$, $b(x', q)$ – фиксированные ограниченные суммируемые функции. Оператор $L_{a,b}$ доставляет пример нелокального (при больших $\|a\|_{L_\infty}$, $\|b\|_{L_\infty}$) возмущения вполне непрерывного оператора М.М. Лаврентьева $L_{0,0}$ с сохранением свойства инъективности последнего.

Всюду выше в качестве входных данных для определения искомых коэффициентов обратных задач использовались результаты усреднения по времени рассеянного поля с весами t^m , $m = 2, 3$. При этом нелинейные обратные задачи сводились к линейному интегральному уравнению I рода (2.9), (2.11), (3.5), (3.7), (4.8). Сейчас покажем, что переход по той же схеме к усреднению с весом t^4 существенно меняет картину и приводит уже к нелинейному интегральному уравнению. Тем не менее при подходящем выборе областей локализации источников X и детекторов Y оператор этого уравнения все же остается инъективным. Этим обеспечивается единственность решения соответствующей обратной задачи волнового зондирования. Далее считаем выполненными условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.3).

Дифференцируя равенство (4.4) по p четырежды и полагая $p = 0$, для $(x, q) \in X \times Y$ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{pppp}(x, 0; q) &= \int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt = H_{pppp}(x, q; 0) + 12 \int_D [G_{pp}(x, x'; 0) \tilde{u}(x', 0; q) + \\ &+ 2G_p(x, x'; 0) \tilde{u}_p(x', 0; q) + G(x, x'; 0) \tilde{u}_{pp}(x', 0; q)] \xi(x') dx'. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Кроме того, из (4.4) следует, что при $p \rightarrow 0$ выполняется равенство

$$\tilde{u}_{pp}(x, p; q) = H_{pp}(x, q; p) + 2 \int_D G(x, x'; p) \tilde{u}(x', p; q) \xi(x') dx' + O(p), \quad (4.11)$$

где

$$H_{pp}(x, q; p) = G_{pp}(x, q; p) \tilde{g}(p) + 2G_p(x, q; p) \tilde{g}'(p) + G(x, q; p) \tilde{g}''(p).$$

Из (4.6) и (4.11) следует

$$\tilde{u}_{pp}(x, 0; q) = \left(-\frac{\tilde{g}(0)|x - q|}{4\pi c_0^2} + \frac{\tilde{g}'(0)}{2\pi c_0} - \frac{\tilde{g}''(0)}{4\pi|x - q|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)A(\varphi, \varepsilon)}{8\pi^2} \int_D \frac{\xi(x')dx'}{|x - x'| |x' - q|}. \quad (4.12)$$

Используя (4.6), (4.7), (4.12), из (4.10) для функции $\xi(x)$ получаем нелинейное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ \frac{\tilde{g}(0)}{16\pi^2 c_0^2} \left(A(\varphi, \varepsilon) \frac{|x' - x|}{|x' - q|} + \frac{|x' - q|}{|x' - x|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)}{8\pi^2 c_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{g}'(0)}{8\pi^2 c_0} \left(\frac{1}{|x' - x|} + \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x' - q|} \right) + \frac{\tilde{g}''(0)}{16\pi^2 |x' - x| |x' - q|} \right\} \xi(x') dx' - \\ & - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{32\pi^3} \iint_D \frac{\xi(x') \xi(x'') dx' dx''}{|x - x'| |x' - x''| |x'' - q|} = f_6(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В (4.13) функция

$$f_6(x, q) = \frac{1}{12} \left(\int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt - H_{pppp}(x, q; 0) \right)$$

определяется усредненными значениями рассеянного поля с весом t^4 .

Покажем, что при определенных требованиях к выбору X, Y , сохраняющих равенство $\dim(X \times Y) = 3$, уравнение (4.13) имеет единственное решение. Указанное равенство имеет место, если одно из многообразий X, Y — двумерное, а второе — одномерное. Выше было достаточно одно из них выбрать в виде замкнутой области на плоскости, а второе — в виде отрезка прямой. Для обеспечения единственности решения уравнения (4.13) конструкцию двумерного многообразия необходимо несколько усложнить. Пусть Σ — объединение двух различных сфер с произвольными центрами и радиусами в $\mathbb{R}^3$, расположенных так, что шары, ограниченные этими сферами, не имеют общих точек с D . Нам потребуется следующее известное утверждение о том, что Σ является множеством единственности для бигармонических функций в области, содержащей Σ .

Лемма 2 (см. [17]). Пусть функция $w = w(x)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta^2 w(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D; \quad w(x) = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Тогда w тождественно равна нулю в $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Пусть теперь одно из X, Y совпадает с Σ , а второе, как в теореме 1, есть отрезок прямой $\mathcal{L}$. Примем для определенности $X = \Sigma$. Предположим, что уравнение (4.13) имеет два кусочно-непрерывных решения ξ_1, ξ_2 и обозначим $\zeta = \xi_1 - \xi_2$. Тогда из (4.13) следует

$$\begin{aligned} & \int_D \left\{ \frac{\tilde{g}(0)}{16\pi^2 c_0^2} \left(A(\varphi, \varepsilon) \frac{|x' - x|}{|x' - q|} + \frac{|x' - q|}{|x' - x|} \right) + \frac{\tilde{g}(0)}{8\pi^2 c_0^2} - \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{g}'(0)}{8\pi^2 c_0} \left(\frac{1}{|x' - x|} + \frac{A(\varphi, \varepsilon)}{|x' - q|} \right) + \frac{\tilde{g}''(0)}{16\pi^2 |x' - x| |x' - q|} \right\} \zeta(x') dx' - \\ & - \frac{\tilde{g}(0) A(\varphi, \varepsilon)}{32\pi^3} \iint_D \frac{(\xi_1(x') \xi_1(x'') - \xi_2(x') \xi_2(x'')) dx' dx''}{|x - x'| |x' - x''| |x'' - q|} = 0, \quad (x, q) \in \Sigma \times Y. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Заметим, что при $x \neq y$ выполняются равенства

$$\Delta_x \frac{1}{|x - y|} = 0, \quad \Delta_x |x - y| = \frac{2}{|x - y|}, \quad \Delta_x^2 |x - y| = 0, \quad (4.15)$$

где через Δ_x обозначен оператор Лапласа по переменной $x \in \mathbb{R}^3$. Поэтому функция $\psi(x, q)$, стоящая в левой части (4.14), является бигармонической по x вне D . Используя лемму 2, заключаем,

что равенство (4.14) распространяется на все точки $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$. Из (1.2), (2.2) следует $\tilde{g}(0)A(\varphi, \epsilon) \neq 0$. Применяя оператор Δ_x к обеим частям (4.14) для $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ и используя тождества (4.15), получаем

$$\int_D \frac{\zeta(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D, \quad y \in Y.$$

Ссылка на теорему 1 дает теперь следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (1.2), (2.2), (2.3), (4.3) и одно из множеств X, Y совпадает с Σ , а второе есть отрезок прямой $\mathcal{L}$. Тогда данные

$$\left\{ \int_0^\infty t^4 u(x, t; q) dt : (x, q) \in X \times Y \right\}$$

позволяют однозначно определить функцию $c(x)$ в уравнении (4.1). Уравнение (4.13) с любой правой частью имеет не более одного решения.

Замечание 2. Оператор левой части (4.13) описывает широкий класс нелокальных нелинейных возмущений оператора М.М. Лаврентьева $L_{0,0}$, сохраняющих инъективность $L_{0,0}$.

В следующем разделе приведем некоторые результаты численных экспериментов по решению уравнения М.М. Лаврентьева.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Выше показано, что решение различных коэффициентных обратных задач для уравнений волнового типа сводится к решению интегральных уравнений вида (1.9) с одним и тем же оператором в левой части и различными правыми частями. Эти уравнения имеют вид

$$\int_D \frac{\xi(x') dx'}{|x - x'| |x' - q|} = f(x, q), \quad (x, q) \in X \times Y, \quad (5.1)$$

с соответствующей функцией $f(x, q)$. В прикладных задачах зачастую искомая функция ξ описывает одну или несколько локализованных неоднородностей типа всплесков на плавно меняющемся фоне, которую удобно моделировать постоянной, равной нулю. В дальнейшем для определенности считаем, что X — прямоугольник, Y — отрезок, параллельные одной и той же координатной плоскости, зондируемая область $D = [0, 1]^3$. Согласно теореме 1, уравнение (5.1) с фиксированной правой частью имеет не более одного решения. Целью численного эксперимента является изучение возможности определения местоположения локализованных возмущений в D с использованием при дискретизации сеток умеренных размеров. На D, X, Y вводятся равномерные сетки $\{\bar{x}_{ijk}\}, \{\bar{x}_{pq}\}, \{\bar{y}_r\}$, $0 \leq i, j, k; p, q, r \leq N$. Дискретизация интегрального уравнения (5.1) с использованием схемы прямоугольников приводит к линейной системе

$$\sum_{i,j,k=0}^{N-1} a_{pqr,ijk} \xi_{ijk} = f(\bar{x}_{pq}, \bar{y}_r); \quad (5.2)$$

$$0 \leq p, q, r \leq N - 1.$$

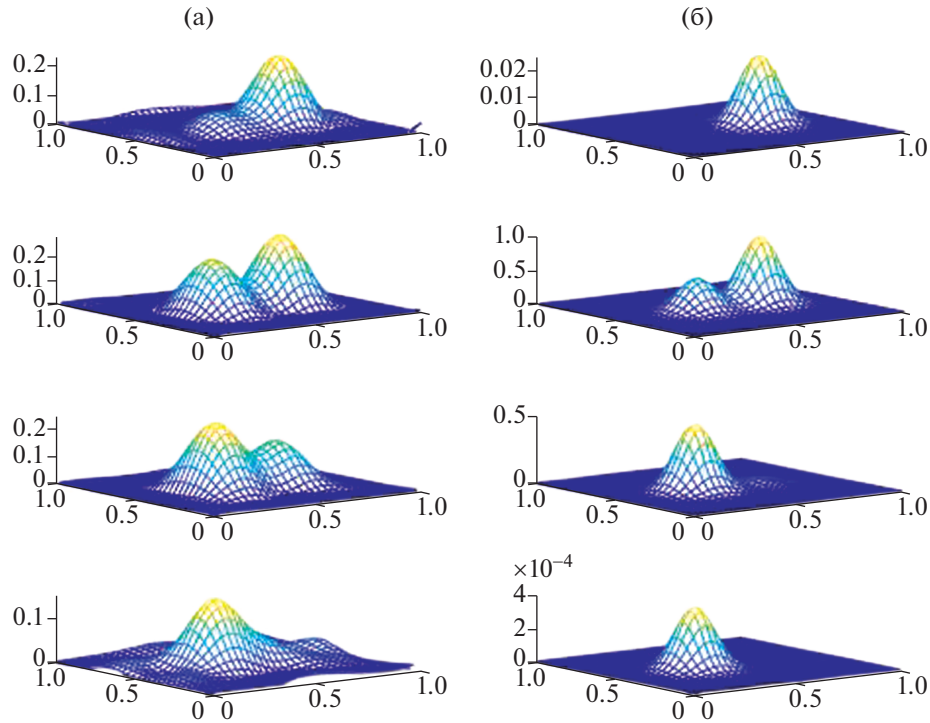
Здесь ξ_{ijk} есть искомая аппроксимация для $\xi(\bar{x}_{ijk})$, $0 \leq i, j, k \leq N - 1$,

$$a_{pqr,ijk} = \frac{h^3}{|\bar{x}_{ijk} - \bar{x}_{pq}| |\bar{x}_{ijk} - \bar{y}_r|}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Регуляризация задачи (5.2) по схеме Тихонова приводит к линейной системе

$$(A^*A + \alpha E)\xi_\alpha = A^*f + \alpha \xi^0.$$

Здесь $A = (a_{pqr,ijk}) \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$, $f = (f_{pqr}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, ξ^0 — начальная оценка искомого вектора $(\xi_{ijk}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. В расчетах полагаем $N = 32$, $\alpha = 10^{-11}$, вектор ξ^0 выбираем нулевым.



Фиг. 1. Тест 1. Пример 1. Неоднородности одного размера на разных высотах. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.

Тест 1. В этом тесте решаются два примера по реконструкции неоднородностей, находящихся на разных высотах в D . В примере 1 модельное решение выбрано в виде

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.4)^2)).$$

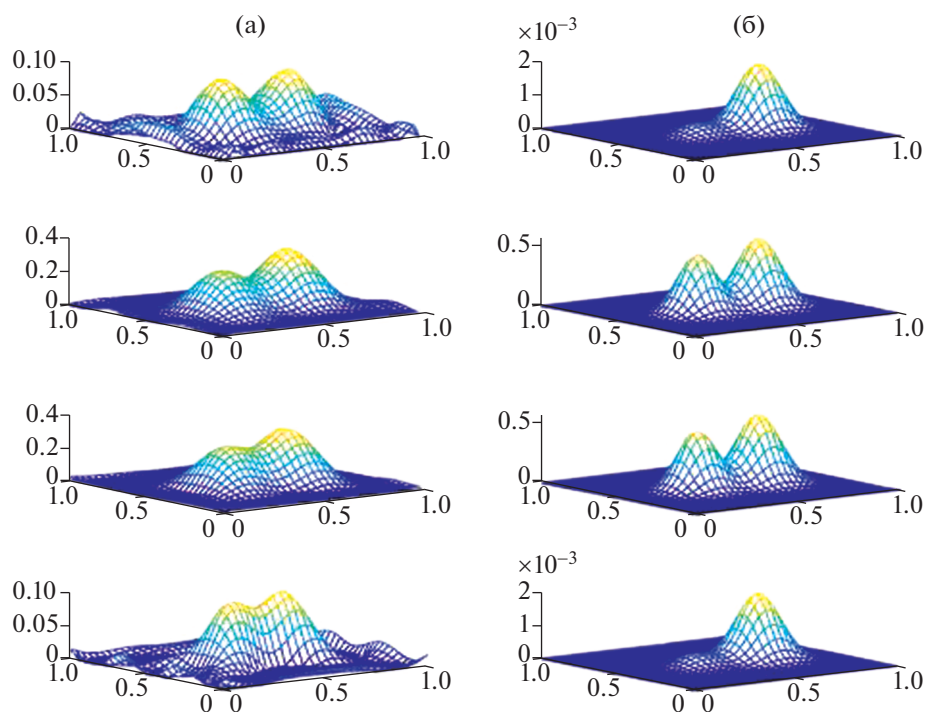
Функция ξ^* описывает две неоднородности одинаковой геометрии, расположенные на высотах $x^{(3)} = 0.4, 0.5$ с центрами в точках $Z_1 = (0.5, 0.7, 0.4)$ и $Z_2 = (0.5, 0.4, 0.5)$. Множества детекторов и источников имеют вид $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : 0 \leq x^{(1)}, x^{(2)} \leq 1\}$ и $Y = \{(0.5, x^{(2)}, 1.0001) : 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. После дискретизации указанные множества принимают соответственно вид $X_N = \{(rh, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, $Y_N = \{(0.5, ph, 1.0001) : 0 \leq p \leq N\}$. В примере 2 тестовое решение

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \exp(-64((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.4)^2))$$

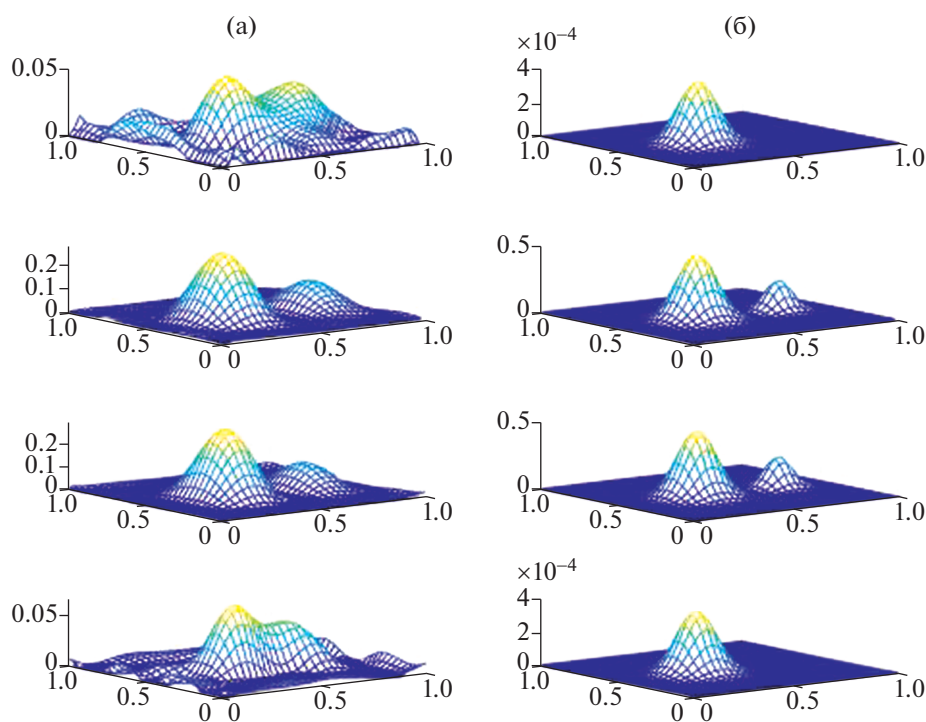
описывает две неоднородности разных размеров, локализованные в окрестности точек Z_1, Z_2 . В этом примере множество источников Y выбрано как в примере 1, а множество детекторов взято более протяженным: $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : -0.5 \leq x^{(1)} \leq 1.5, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. После дискретизации получаем $X_N = \{(-0.5 + rh_x, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, где $h_x = 0.0625$.

Тест 2. В примерах этого теста неоднородности располагаются на одной высоте. В примере 3 неоднородности сосредоточены в окрестности точек $(0.5, 0.4, 0.5)$ и $(0.5, 0.7, 0.5)$ и имеют различный размер,

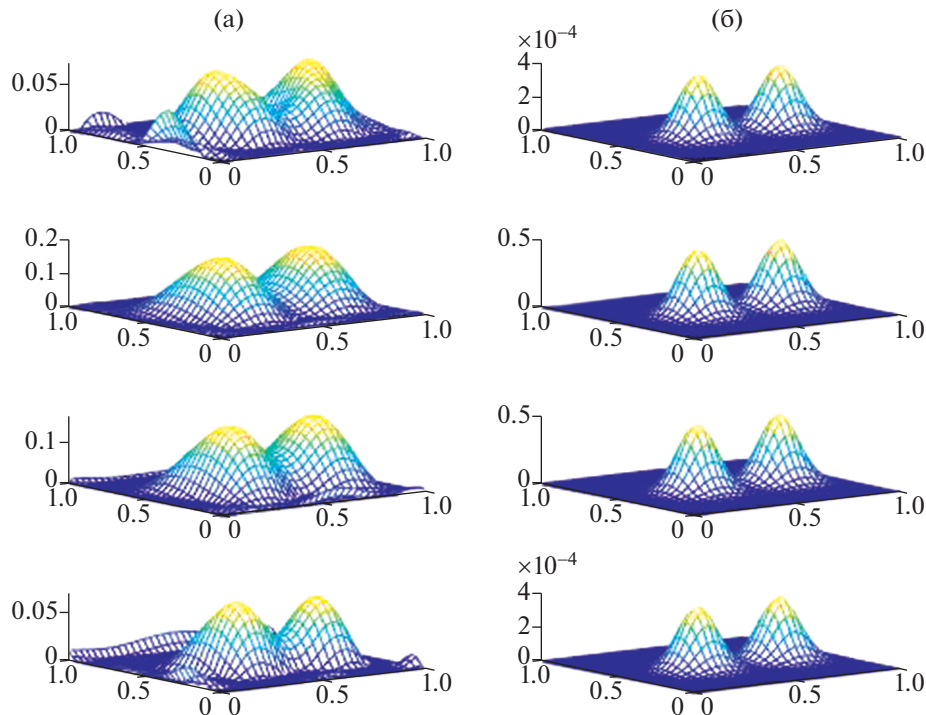
$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-81((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \exp(-169((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)).$$



Фиг. 2. Тест 1. Пример 2. Неоднородности разных размеров на разных высотах. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.



Фиг. 3. Тест 2. Пример 3. Неоднородности разных размеров на одной высоте. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.



Фиг. 4. Тест 2. Пример 4. Неоднородности одного размера на одной высоте. (а) Аппроксимация, (б) точное решение.

Множества источников и детекторов здесь выбираются как в Примере 2. В Примере 4 неоднородности одинаковы по размеру и сосредоточены в окрестности точек $(0.5, 0.4, 0.5)$ и $(0.5, 0.8, 0.5)$,

$$\xi^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \exp(-8l((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)) + \\ + \exp(-8l((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2)).$$

Вид и расположение множеств X и Y относительно D в этом примере изменены, $X = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) : -1 \leq x^{(1)} \leq 10, 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$, $Y = \{(0.1, x^{(2)}, 1.1) : 0 \leq x^{(2)} \leq 1\}$. При этом $X_N = \{(-1 + rh_x, sh, -0.0001) : 0 \leq r, s \leq N\}$, $h_x = 0.3438$; $Y_N = \{(0.1, ph, 1.1) : 0 \leq p \leq N\}$.

Результаты численной реконструкции модельных неоднородностей ξ^* показаны на фиг. 1–4. Результат каждого примера представлен двумя колонками графиков. В правой колонке приведены изображения точного решения ξ^* , в левой колонке — соответствующие изображения приближенных решений ξ_α . На фигурах сверху вниз представлены графики точных и приближенных функций $\xi(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ при $x^{(3)} = 0.1875, 0.4062, 0.5937, 0.8125$ соответственно. Видно, что в большинстве случаев приближенное решение достаточно точно восстанавливает место расположения источников неоднородностей и их относительные амплитуды. Заметное отклонение в относительных размерах всплесков в точном и приближенном решении наблюдается на фиг. 2, 3 в плоскостях $x^{(3)} = 0.1875, 0.8125$ (см. крайние верхние и нижние пары графиков). Это расхождение можно объяснить расположением источников и детекторов относительно реконструируемых неоднородностей в соответствующих примерах. На фиг. 1–4 также показано, что абсолютные значения амплитуд неоднородностей аппроксимируются более грубо по сравнению с местом локализации неоднородностей.

Альтернативный подход к численному решению интегрального уравнения (5.1) развивается в [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.

2. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
3. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2003. Т. 47. № 3. С. 1201–1209.
4. Вайнберг М.М. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982.
5. Романов В.Г. О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журнал. 2009. Т. 50. № 4. С. 883–889.
6. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. Рамм А.Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
8. Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцерева Е.В. Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журнал. 2004. Т. 45. № 4. С. 747–757.
9. Кокурин М.Ю., Паймеров С.К. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 1. С. 117–128.
10. Kokurin M. Yu. On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. № 1. P. 125–140.
11. Кокурин М.Ю. О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
12. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2.
13. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 561–574.
14. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
15. Ikawa M. Hyperbolic Partial Differential Equations and Wave Phenomena. Providence R.I.: AMS, 2000.
16. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
17. Бицадзе А.В. О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
18. Klibanov M., Li J., Zhang W. Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // arXiv:2010.14144v1 [math.NA] 27 Oct., 2020.