ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 23–35

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.626

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОДВИЖНЫМ ПРАВЫМ КОНЦОМ ТРАЕКТОРИЙ

А. И. Калинин[1,*], Л. И. Лавринович[1,]**

[1] 220030 Минск, пр-т Независимости, 4, Белорусский гос. ун-т, ФПМИ, Беларусь

**e-mail: kalininai@bsu.by*

***e-mail: lavrinovich@bsu.by*

Поступила в редакцию 12.11.2020 г.
Переработанный вариант 09.01.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Рассматривается задача минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной сингулярно возмущенной системы с линейными терминальными ограничениями. Строятся асимптотические приближения в виде программы и обратной связи к оптимальному управлению в этой задаче. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их реализации происходит декомпозиция исходной задачи на две невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности. Библ. 18.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейная система, квадратичный функционал, сингулярные возмущения, асимптотические приближения, субоптимальный синтез.

DOI: 10.31857/S0044466921110107

ВВЕДЕНИЕ

В рамках математической теории оптимальных процессов задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных, уделяется значительное внимание (см. обзоры в [1]–[4]). Интерес к таким задачам вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи с большим числом фазовых переменных. Кроме того, при применении асимптотического подхода удается избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими (см. [5]).

Цель настоящей статьи – построение асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с линейными терминальными ограничениями на траектории. Суть предлагаемых вычислительных процедур состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа – конечномерных элементов, соответствующих в силу принципа максимума (см. [6]) оптимальному управлению.

Сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число публикаций (см., например, [7]–[11]), в большинстве из которых рассматривались задачи без ограничений на траектории. Настоящая статья обобщает результаты, полученные в [11] для сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального с фиксированным правым концом траекторий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \\ \mu\dot{z} &= A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u, \quad z(t_*) = z_*, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$H_1 y(t^*) = g_1, \quad H_2 z(t^*) = g_2, \tag{1.2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}\left(y^{\mathrm{T}}M(t)y + \mu z^{\mathrm{T}}L(t)z + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min, \tag{1.3}$$

где μ — малый положительный параметр, t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$), y есть n-вектор медленных переменных, z есть m-вектор быстрых переменных, g_1, g_2 — векторы размерностей n_1, m_1 соответственно ($n_1 \le n$, $m_1 \le m$), H_1 и H_2 — матрицы полного ранга, $M(t)$, $L(t)$ — неотрицательно-определенные симметрические матрицы, а $P(t)$ — положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

Предположение 1. Действительные части всех собственных значений матрицы $A_4(t)$, $t \in T$, отрицательны.

Предположение 2. Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.

Управление с кусочно-непрерывными компонентами принято называть допустимым, если для порожденной им траектории системы (1.1) выполнены терминальные ограничения (1.2). Допустимое управление, на котором критерий качества (1.3) принимает наименьшее значение, называют оптимальным. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим то, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем *(программным) асимптотически субоптимальным управлением* N-го порядка ($N = 0, 1, 2, \ldots$), в задаче (1.1)–(1.3), если оно отклоняется по критерию качества (1.3) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $y(t,\mu)$, $z(t,\mu)$, $t \in T$, системы (1.1) удовлетворяет терминальным ограничениям (1.2) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(y,z,t,\mu)$ назовем *асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка*, если для любого начального состояния (y_*, z_*, t_*), $t_* < t^*$, имеет место

$$u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu),$$

где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, — асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

В настоящей статье предлагается и обосновывается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче. Его суть состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра множителей Лагранжа, которые в силу принципа максимума (см. [6]) соответствуют оптимальному управлению. В работе также показывается, как можно построить асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка.

2. ПЕРВАЯ БАЗОВАЯ ЗАДАЧА

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения вырожденной задачи

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u, \quad y(t_*) = y_*, \ H_1 y(t^*) = g_1, \\ &J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*}\left(y^{\mathrm{T}}M(t)y + u^{\mathrm{T}}P(t)u\right)dt \to \min, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \quad B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t), \tag{2.2}$$

которая является предельной для медленной переменной. В дальнейшем эту задачу будем называть *первой базовой*.

Предположение 3. Динамическая система в задаче (2.1) является управляемой на отрезке $[\tau, t^*]$ относительно подпространства $H_1 y = 0$ при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ (см. [12]).

Это предположение выполняется тогда и только тогда (см., например, [13]), когда при любом $\tau \in [t_*, t^*)$ и любом ненулевом векторе l размерности n_1 выполняется соотношение

$$l^{\mathrm{T}} H_1 F_0(t) B_0(t) \neq 0, \quad \tau \le t \le t^*, \tag{2.3}$$

где $F_0(t)$, $t \in T$, есть $(n \times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0 = -F_0 A_0(t), \quad F_0(t^*) = E_n,$$

с единичной матрицей E_n. Условие (2.3), которое называют неявным критерием управляемости на подпространство, для стационарной динамической системы эквивалентно требованию (см. [13])

$$\operatorname{rank}\left(H_1 B_0, H_1 A_0 B_0, \ldots, H_1 A_0^{n-1} B_0\right) = n_1.$$

При таком предположении в первой базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение (см. [14]), которое является нормальной экстремалью. Последнее означает, что принцип максимума (см. [6]) в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $y^0(t)$, $t \in T$, – оптимальные управление и траектория в задаче (2.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа λ_0 размерности n_1, что выполняется условие

$$\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t) B_0(t) u^0(t) - \frac{1}{2} u^{0^{\mathrm{T}}}(t) P(t) u^0(t) = \max_{u \in R^r} \left(\psi^{0^{\mathrm{T}}}(t) B_0(t) u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P(t) u\right), \quad t \in T,$$

где $\psi^0(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A_0^{\mathrm{T}}(t)\psi + M(t) y^0(t), \quad \psi(t^*) = H_1^{\mathrm{T}} \lambda_0.$$

Из этого условия непосредственно следует

$$u^0(t) = P^{-1}(t) B_0^{\mathrm{T}}(t) \psi^0(t), \quad t \in T. \tag{2.4}$$

Пусть $\psi_* = \psi^0(t_*)$, тогда $y^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T$, есть решение следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered} \dot{y} = A_0(t) y + B_0(t) P^{-1}(t) B_0^{\mathrm{T}}(t) \psi, \quad y(t_*) = y_*, \\ \dot{\psi} = M(t) y - A_0^{\mathrm{T}}(t) \psi, \ \psi(t^*) = \psi_*. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t, t_*)$, $t \in T$, системы (2.5) как решение начальной задачи

$$\dot{F} = \bar{A}(t) F, \quad F(t_*) = E_{2n}, \tag{2.6}$$

в которой

$$\bar{A}(t) = \begin{pmatrix} A_0(t) & B_0(t) P^{-1}(t) B_0^{\mathrm{T}}(t) \\ M(t) & -A_0^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix},$$

а E_{2n} – единичная матрица. Разобьем матрицу F на блоки размеров $n \times n$:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

Привлекая для записи решения начальной задачи (2.5) в момент времени t^* фундаментальную матрицу, получаем

$$\begin{gathered} H_1F_{11}\left(t^*,t_*\right)y_* + H_1F_{12}\left(t^*,t_*\right)\psi_* = g_1, \\ F_{21}\left(t^*,t_*\right)y_* + F_{22}\left(t^*,t_*\right)\psi_* = H_1^{\mathrm{T}}\lambda_0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

В [13] показано, что при выполнении предположения 3 матрицы $F_{22}\left(t^*,t_*\right)$ и $H_1C_1H_1^{\mathrm{T}}$, где

$$C_1 = F_{12}\left(t^*,t_*\right)F_{22}^{-1}\left(t^*,t_*\right), \tag{2.8}$$

будут невырожденными. Тогда из системы (2.7) следует

$$H_1C_1H_1^{\mathrm{T}}\lambda_0 = g_1 - H_1\left(F_{11}\left(t^*,t_*\right) - C_1F_{21}\left(t^*,t_*\right)\right)y_*.$$

Отсюда видно, что вектор λ_0, а следовательно, и решение сопряженной системы определены однозначно.

3. ВТОРАЯ БАЗОВАЯ ЗАДАЧА

На втором этапе алгоритма построения асимптотических субоптимальных управлений решается следующая линейно-квадратичная задача оптимального управления с бесконечной длительностью процесса:

$$\begin{gathered} \frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u, \quad H_2z(0) = H_2A_4^{-1}(t^*)\left(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)u^0(t^*)\right) + g_2, \\ z(-\infty) = 0, \quad J_2(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}}(s)P(t^*)u(s)ds \to \min, \end{gathered} \tag{3.1}$$

которая является предельной для быстрой переменной. Задачу (3.1) будем называть *второй базовой*.

Предположение 4. Выполнен критерий управляемости на подпространство

$$\operatorname{rank}\left(H_2B_2(t^*),\, H_2A_4(t^*)B_2(t^*),\, \ldots,\, H_2A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)\right) = m_1.$$

Это предположение гарантирует существование допустимых управлений во второй базовой задаче, а тогда задача (3.1) имеет единственное решение (см. [14]) и является нормальной. В этом случае принцип максимума (см. [6]) для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $z^*(s)$, $s \le 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (3.1), тогда существует такой вектор множителей Лагранжа σ_0 размерности m_1, что выполняется условие

$$\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s)B_2(t^*)u^*(s) - \frac{1}{2}u^{*\mathrm{T}}(s)P(t^*)u^*(s) = \max_{u\in R^r}\left(\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s)B_2(t^*)u - \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}P(t^*)u\right), \quad s \le 0,$$

где $\Pi\psi(s)$, $s \le 0$, – решение сопряженной системы

$$\frac{d}{ds}\Pi\psi = -A_4^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi, \quad \Pi\psi(0) = H_2^{\mathrm{T}}\sigma_0.$$

Отсюда непосредственно следует

$$u^*(s) = P^{-1}(t^*)B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi\psi(s), \quad s \le 0. \tag{3.2}$$

Заметим, что

$$\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s) = \sigma_0^{\mathrm{T}}H_2G(s), \quad \Pi\psi^{\mathrm{T}}(s)B_2(t^*) = \sigma_0^{\mathrm{T}}H_2\Pi\Phi(s), \quad s \le 0, \tag{3.3}$$

где

$$\Pi\Phi(s) = G(s)B_2(t^*), \quad s \le 0, \tag{3.4}$$

а $G(s)$, $s \le 0$, есть $(m\times m)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\frac{dG}{ds} = -GA_4(t^*), \quad G(0) = E_m. \tag{3.5}$$

Замечание 1. Подчеркнем, что единственная информация о решении второй базовой задачи, которая используется в дальнейшем при построении асимптотически субоптимальных управлений, — это значение σ_0 вектора множителей Лагранжа. Нет необходимости строить оптимальное управление $u^*(s)$, $s \le 0$, что, впрочем, и невозможно, если задача решается численно. Во второй базовой задаче гамильтониан вдоль оптимального управления равен нулю. Воспользовавшись этим свойством при $s = 0$, получаем условие, которому удовлетворяет вектор σ_0:

$$\frac{1}{2}\sigma_0^{\mathrm{T}} H_2 B_2(t^*) P^{-1}(t^*) B_2^{\mathrm{T}}(t^*) H_2^{\mathrm{T}} \sigma_0 + \sigma_0^{\mathrm{T}} H_2 B_2(t^*) u^0(t^*) = 0.$$

После решения базовых задач формируются матрица

$$I_0 = \begin{pmatrix} H_1 C_1 H_1^{\mathrm{T}} & 0_{n_1 \times m_1} \\ H_2 C_2 H_1^{\mathrm{T}} & H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

размеров $(n_1 + m_1) \times (n_1 + m_1)$ и вектор

$$\nu_0 = \sigma_0 - \left(H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}}\right)^{-1} H_2 C_3 \left(A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*)\right)^{\mathrm{T}} H_1^{\mathrm{T}} \lambda_0 \tag{3.7}$$

размерности m_1. Матрица C_1 определена ранее формулой (2.8),

$$C_2 = -A_4^{-1}(t^*)\left(A_3(t^*) C_1 + B_2(t^*) P^{-1}(t^*) B_0^{\mathrm{T}}(t^*)\right) + C_3 (A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*))^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

$$C_3 = \int_{-\infty}^{0} \left(\Pi\Phi(s) P^{-1}(t^*) \Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\right) ds. \tag{3.9}$$

Предположения 3, 4 гарантируют соответственно невырожденность матриц $H_1 C_1 H_1^{\mathrm{T}}$, $H_2 C_3 H_2^{\mathrm{T}}$, а тогда $\det\, I_0 \ne 0$.

Отметим, что

$$H_2^{\mathrm{T}} \nu_0 = H_2^{\mathrm{T}} \sigma_0 - \left(A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*)\right)^{\mathrm{T}} H_1^{\mathrm{T}} \lambda_0. \tag{3.10}$$

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Прежде, чем продолжить изложение алгоритма построения асимптотически субоптимальных управлений, сформулируем и докажем теорему, на которую опираются дальнейшие вычисления.

Из результатов, полученных в [15], следует, что в задаче (1.1)–(1.3) при выполнении предположений 1–4 существуют допустимые управления. Тогда эта задача имеет единственное решение (см. [14]), которое является нормальной экстремалью. Пусть $u^0(t,\mu)$, $y^0(t,\mu)$, $z^0(t,\mu)$, $t \in T$, — оптимальные управление и траектория в задаче (1.1)–(1.3). Из принципа максимума (см. [6]) следует, что оптимальное управление представимо в виде

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1^0(t,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2^0(t,\mu)\right), \quad t \in T, \tag{4.1}$$

где $\left(\psi_1^0(t,\mu), \psi_2^0(t,\mu)\right)$, $t \in T$, — вектор сопряженных переменных, который вместе с оптимальной траекторией является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \dot y = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2\right), \quad y(t_*) = y_*, \\ \mu\dot z = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2\right), \quad z(t_*) = z_*, \\ \dot\psi_1 = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - A_3^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 + M(t)y, \quad \psi_1(t_*) = H_1^{\mathrm{T}}\lambda, \\ \mu\dot\psi_2 = -A_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_1 - A_4^{\mathrm{T}}(t)\psi_2 + \mu L(t)z, \quad \psi_2(t_*) = H_2^{\mathrm{T}}\nu. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Векторы множителей Лагранжа λ, ν, разумеется, зависят от малого параметра: $\lambda = \lambda(\mu)$, $\nu = \nu(\mu)$. Покажем, что эти вектор-функции определены однозначно и допускают асимптотические разложения по целым степеням малого параметра со старшими коэффициентами λ_0, ν_0, которые найдены в результате решения базовых задач. Доказательство будет конструктивным и предопределит дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Теорема. *При выполнении предположений* 1–4 *решению задачи* (1.1)–(1.3) *с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор множителей Лагранжа* $(\lambda(\mu), \nu(\mu))$, *допускающий асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k, \quad \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \nu_k, \tag{4.3}$$

в которых ν_0 *задается формулой* (3.7), а λ_0, σ_0 – *векторы множителей Лагранжа в первой и второй базовых задачах.*

Доказательство. Для сокращения записи введем в рассмотрение векторы $\eta = (\lambda, \nu)$, $\eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$.

В силу теоремы, доказанной в [16], при выполнении сделанных предположений существуют такие положительные числа μ_0, ε_0, что краевая задача (4.2) имеет единственное решение $y(t, \eta, \mu)$, $z(t, \eta, \mu)$, $\psi_1(t, \eta, \mu)$, $\psi_2(t, \eta, \mu)$, $t \in T$, если только $0 < \mu < \mu_0$, $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$. При этом имеют место асимптотические разложения

$$\begin{gathered} y(t, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(y_k(t, \eta) + \Pi_k y(s, \eta) + Q_k y(\tau, \eta) \right), \\ z(t, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(z_k(t, \eta) + \Pi_k z(s, \eta) + Q_k z(\tau, \eta) \right), \\ \psi_i(t, \eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \left(\psi_{ik}(t, \eta) + \Pi_k \psi_i(s, \eta) + Q_k \psi_i(\tau, \eta) \right), \quad i = 1, 2, \\ s = (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t_*)/\mu, \end{gathered} \tag{4.4}$$

коэффициенты которых могут быть найдены с помощью метода пограничных функций (см. [16], [17]). Подчеркнем, что это равномерные по $t \in T$ асимптотические разложения, а для пограничных членов справедливы оценки

$$\begin{gathered} \left\| \left(\Pi_k y(s, \eta), \Pi_k z(s, \eta), \Pi_k \psi_1(s, \eta), \Pi_k \psi_2(s, \eta) \right) \right\| \le \alpha_k \exp(\beta_k s), \quad s \le 0, \\ \left\| Q_k y(\tau, \eta), Q_k z(\tau, \eta), Q_k \psi_1(\tau, \eta), Q_k \psi_2(\tau, \eta) \right\| \le \gamma_k \exp(-\delta_k \tau), \quad \tau \ge 0, \end{gathered} \tag{4.5}$$

где α_k, β_k, γ_k, δ_k, $k = 0, 1, \ldots,$ – положительные постоянные.

Приведем старшие коэффициенты разложений (4.4), которые понадобятся при доказательстве теоремы. Прежде всего, отметим, что

$$\Pi_0 y(s, \eta) \equiv 0, \quad \Pi_0 \psi_1(s, \eta) \equiv 0, \quad Q_0 y(\tau, \eta) \equiv 0, \quad Q_0 \psi_i(\tau, \eta) \equiv 0, \quad i = 1, 2. \tag{4.6}$$

Вектор-функции $y_0(t, \eta)$, $\psi_{10}(t, \eta)$, $t \in T$, $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, есть решение краевой задачи

$$\begin{gathered} \dot{y} = A_0(t) y + B_0(t) P^{-1}(t) B_0^{\mathrm{T}}(t) \psi, \quad y(t_*) = y_*, \\ \dot{\psi} = M(t) y - A_0^{\mathrm{T}}(t) \psi, \quad \psi(t^*) = H_1^{\mathrm{T}} \lambda. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Однозначная разрешимость этой задачи при векторах λ, достаточно близких к λ_0, гарантируется предположением 3.

Коэффициенты $z_0(t, \eta)$, $\psi_{20}(t, \eta)$, $t \in T$, $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} z_0(t, \eta) = -A_4^{-1}(t) \left(A_3(t) y_0(t, \eta) + B_2(t) P^{-1}(t) B_0^{\mathrm{T}}(t) \psi_{10}(t, \eta) \right), \\ \psi_{20}(t, \eta) = -\left(A_2(t) A_4^{-1}(t) \right)^{\mathrm{T}} \psi_{10}(t, \eta). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Вектор-функции $\Pi_0 \psi_2(s, \eta)$, $\Pi_0 z(s, \eta)$, $s \le 0$, $Q_0 z(\tau, \eta)$, $\tau \ge 0$, $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, суть решения следующих начальных задач:

$$d\Pi_0 \psi_2 / ds = -A_4^{\mathrm{T}}(t^*) \Pi_0 \psi_2, \quad \Pi_0 \psi_2(0) = H_2^{\mathrm{T}} \nu + \left(A_2(t^*) A_4^{-1}(t^*) \right)^{\mathrm{T}} H_1^{\mathrm{T}} \lambda, \tag{4.9}$$

$$
\begin{gathered}
d\Pi_0 z/ds = A_4^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_0 z + B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_0\psi_2(s,\eta),\\
\Pi_0 z(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(s)B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_0\psi_2(s,\eta)ds, \qquad (4.10)\\
dQ_0 z/d\tau = A_4^{\mathrm{T}}(t_*)Q_0 z_0, \quad Q_0 z(0) = z_* - z_0(t_*,\eta),
\end{gathered}
$$

где $G(s)$, $s \le 0$, – решение дифференциального уравнения (3.5).

Заметим, что $y^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t \in T$, есть решение краевой задачи (4.7) с $\lambda = \lambda_0$, а в силу (3.10) имеет место $\Pi_0\psi_2(0,\eta_0) = H_2^{\mathrm{T}}\sigma_0$. Тогда

$$
y_0(t,\eta_0) = y^0(t), \quad \psi_{10}(t,\eta_0) = \psi^0(t), \quad t \in T, \quad \Pi_0\psi_2(s,\eta_0) = \Pi\psi(s), \quad s \le 0. \qquad (4.11)
$$

Коэффициенты разложений (4.4) с номерами $k \ge 1$ находятся из систем линейных дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\dot y_k = A_1(t)y_k + A_2(t)z_k + B_1(t)P^{-1}(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_{1k} + B_1(t)P^{-1}(t)B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_{2k},\\
\dot z_{k-1} = A_3(t)y_k + A_4(t)z_k + B_2(t)P^{-1}(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_{1k} + B_2(t)P^{-1}(t)B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_{2k},\\
\dot\psi_{1k} = M(t)y_k - A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_{1k} - A_3^{\mathrm{T}}(t)\psi_{2k}, \quad \dot\psi_{2,k-1} = L(t)z_{k-1} - A_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_{1k} - A_4^{\mathrm{T}}(t)\psi_{2k},\\
\frac{d\Pi_k y}{ds} = A_1(t^*)\Pi_{k-1}y + A_2(t^*)\Pi_{k-1}z + B_1(t^*)P^{-1}(t^*)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_{k-1}\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_{k-1}\psi_2\right) + \Pi_{k-1}Y(s),\\
\frac{d\Pi_k z}{ds} = A_3(t^*)\Pi_k y + A_4(t^*)\Pi_k z + B_2(t^*)P^{-1}(t^*)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_k\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_k\psi_2\right) + \Pi_k Z(s),\\
\frac{d\Pi_k\psi_1}{ds} = M(t^*)\Pi_{k-1}y - A_1^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_{k-1}\psi_1 - A_3^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_{k-1}\psi_2 + \Pi_{k-1}\Psi_1(s),\\
\frac{d\Pi_k\psi_2}{ds} = L(t^*)\Pi_{k-1}z - A_2^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_k\psi_1 - A_4^{\mathrm{T}}(t^*)\Pi_k\psi_2 + \Pi_k\Psi_2(s),\\
\frac{dQ_k y}{d\tau} = A_1(t_*)Q_{k-1}y + A_2(t_*)Q_{k-1}z + B_1(t_*)P^{-1}(t_*)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t_*)Q_{k-1}\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t_*)Q_{k-1}\psi_2\right) + Q_{k-1}Y(\tau),\\
\frac{dQ_k z}{d\tau} = A_3(t_*)Q_k y + A_4(t_*)Q_k z + B_2(t_*)P^{-1}(t_*)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t_*)Q_k\psi_1 + B_2^{\mathrm{T}}(t_*)Q_k\psi_2\right) + Q_k Z(\tau),\\
\frac{dQ_k\psi_1}{d\tau} = M(t_*)Q_{k-1}y - A_1^{\mathrm{T}}(t_*)Q_{k-1}\psi_1 - A_3^{\mathrm{T}}(t_*)Q_{k-1}\psi_2 + Q_{k-1}\Psi(\tau)_1,\\
\frac{dQ_k\psi_2}{d\tau} = L(t_*)Q_{k-1}z - A_2^{\mathrm{T}}(t_*)Q_k\psi_1 - A_4^{\mathrm{T}}(t_*)Q_k\psi_2 + Q_k\Psi_2(\tau),
\end{gathered}
$$

с учетом дополнительных условий

$$
\begin{gathered}
y_k(t_*) + Q_k y(0) = 0, \quad z_k(t_*) + Q_k z(0) = 0, \quad \psi_{1k}(t_*) + Q_k\psi_1(0) = 0, \quad \psi_{2k}(t_*) + Q_k\psi_2(0) = 0,\\
y_k(t^*) + \Pi_k y(0) = 0, \quad z_k(t^*) + \Pi_k z(0) = 0, \quad \psi_{1k}(t^*) + \Pi_k\psi_1(0) = 0, \quad \psi_{2k}(t^*) + \Pi_k\psi_2(0) = 0,\\
Q_k y(\infty) = 0, \quad Q_k z(\infty) = 0, \quad Q_k\psi_1(\infty) = 0, \quad Q_k\psi_2(\infty) = 0,\\
\Pi_k y(-\infty) = 0, \quad \Pi_k z(-\infty) = 0, \quad \Pi_k\psi_1(-\infty) = 0, \quad \Pi_k\psi_2(-\infty) = 0,
\end{gathered}
$$

где функции $\Pi_k Y(s)$, $\Pi_k Z(s)$, $\Pi_k\Psi_1(s)$, $\Pi_k\Psi_2(s)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_i y(s)$, $\Pi_i z(s)$, $\Pi_i\psi_1(s)$, $\Pi_i\psi_2(s)$, $i < k$, а функции $Q_k Y(\tau)$, $Q_k Z(\tau)$, $Q_k\Psi_1(\tau)$, $Q_k\Psi_2(\tau)$ – через $Q_i y(\tau)$, $Q_i z(\tau)$, $Q_i\psi_1(\tau)$, $Q_i\psi_2(\tau)$, $i < k$.

Заметим, что вектор $\eta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu))$ множителей Лагранжа, соответствующий в силу принципа максимума оптимальному управлению, является решением системы уравнений

$$
H_1 y(t^*,\eta,\mu) = g_1, \quad H_2 z(t^*,\eta,\mu) = g_2. \qquad (4.12)
$$

С помощью теоремы о неявной функции убедимся, что эта система однозначно разрешима относительно η при достаточно малых μ. Запишем ее в виде

$$R(\eta, \mu) = 0, \tag{4.13}$$

где

$$R(\eta, \mu) = \begin{pmatrix} H_1 y(t^*, \eta, \mu) - g_1 \\ H_2 z(t^*, \eta, \mu) - g_2 \end{pmatrix}.$$

В силу (4.4) и оценок (4.5) имеет место асимптотическое разложение

$$R(\eta, \mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k R_k(\eta), \tag{4.14}$$

в котором

$$R_0(\eta) = \begin{pmatrix} H_1 \left(y_0(t^*, \eta) + \Pi_0 y(0, \eta) \right) - g_1 \\ H_2 \left(z_0(t^*, \eta) + \Pi_0 z(0, \eta) \right) - g_2 \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$R_k(\eta) = \begin{pmatrix} H_1 \left(y_k(t^*, \eta) + \Pi_k y(0, \eta) \right) \\ H_2 \left(z_k(t^*, \eta) + \Pi_k z(0, \eta) \right) \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{4.16}$$

Положим $R(\eta, 0) = R_0(\eta)$, тогда вектор-функция $R(\eta, \mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора η в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$, $0 \le \mu < \mu_0$.

Из формул (4.6), (4.11) непосредственно следует

$$H_1 \left(y_0(t^*, \eta_0) + \Pi_0 y(0, \eta_0) \right) = H_1 y^0(t^*) = g_1. \tag{4.17}$$

Отсюда и из формул (2.4), (4.8), (4.11) получаем

$$z_0(t^*, \eta_0) = -A_4^{-1}(t^*) \left(A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*) \right). \tag{4.18}$$

В силу (3.2), (3.5), (4.10), (4.11) и формулы Коши имеем

$$\Pi_0 z(0, \eta_0) = \int_{-\infty}^{0} G(s) B_2(t^*) u^*(s) ds = z^*(0).$$

Поскольку

$$H_2 z^*(0) = H_2 A_4^{-1}(t^*) \left(A_3(t^*) y^0(t^*) + B_2(t^*) u^0(t^*) \right) + g_2, \tag{4.19}$$

то из (4.15)–(4.18) следует $R(\eta_0, 0) = R_0(\eta_0) = 0$.

Непосредственным дифференцированием, учитывая формулы (4.6)–(4.11), получаем, что $\partial R_0(\eta_0, 0)/\partial \eta = \partial R_0(\eta_0)/\partial \eta = I_0$ (см. (3.6)). Как было отмечено, эта матрица Якоби является невырожденной. Тогда для системы (4.13) или, что то же самое, (4.12), выполнены все условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме, в некоторой правосторонней окрестности нуля $0 \le \mu < \mu_1$ однозначно определена непрерывная вектор-функция $\eta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu))$, удовлетворяющая уравнениям (4.12), и $\eta(0) = \eta_0 = (\lambda_0, \nu_0)$.

Поскольку асимптотические приближения, построенные с помощью метода пограничных функций, носят равномерный относительно начальных данных характер (см. [17]), то разложение (4.14) будет равномерным в области $\|\eta - \eta_0\| < \varepsilon_0$. Вектор-функции $R_k(\eta)$, $k = 0, 1, \dots$, бесконечно дифференцируемы, в чем можно убедиться, проанализировав уравнения для коэффициентов разложения по методу пограничных функций. Тогда для решения $\eta(\mu) = (\lambda(\mu), \nu(\mu))$ системы (4.13) будут иметь место асимптотические разложения (4.3). Теорема доказана.

5. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Продолжим изложение алгоритма построения асимптотических приближений к решению исходной задачи, опираясь на утверждения теоремы и формулы, полученные при ее доказательстве. Как видно из доказательства теоремы, оптимальное управление в задаче (1.1)–(1.3) представимо в виде

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1(t,\eta(\mu),\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2(t,\eta(\mu),\mu)\right), \quad t \in T.$$

Вектор-функция

$$u^{(0)}(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1(t,\eta_0,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2(t,\eta_0,\mu)\right), \quad t \in T,$$

будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Заметим, что ее можно сформировать непосредственно после решения базовых задач. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка $(N \geq 1)$ имеет вид

$$u^{(N)}(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1\left(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu\right) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2\left(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu\right)\right), \quad t \in T, \tag{5.1}$$

где

$$\eta^{(N)}(\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\eta_k, \quad \eta_k = (\lambda_k,\nu_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.2}$$

Для его построения нужно найти коэффициенты λ_k, ν_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, асимптотических рядов (4.3), что можно сделать методом неопределенных коэффициентов, опираясь на разложение (4.14). Конкретнее, разложим с помощью формулы Тейлора вектор-функцию

$$\sum_{k=0}^{N}\mu^k R_k(\eta^{(N)}(\mu))$$

по степеням μ до порядка N включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате будем иметь невырожденные системы линейных алгебраических уравнений для последовательного нахождения векторов η_k, $k = 1, 2, \ldots, N$:

$$I_0\eta_1 = -R_1(\eta_0), \quad I_0\eta_k = -R_k(\eta_0) - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial R_i}{\partial\eta}(\eta_0)\eta_{k-i}, \quad k \geq 2. \tag{5.3}$$

Здесь учтено, что коэффициенты разложения (4.14) есть линейные вектор-функции. Заметим, что в силу структуры (3.6) матрицы Якоби I_0 системы (5.3) расщепляются. Последовательно решая эти системы, находим векторы η_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, и составляем полином (5.2). Как было отмечено, вектор-функция (5.1) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в исходной задаче. Чтобы построить это управление, нужно найти решение краевой задачи для прямой и сопряженной систем, которые являются сингулярно возмущенными и, следовательно, жесткими. Интегрирования жестких систем можно избежать, заменив в (5.1) вектор-функции $\psi_i(t,\eta,\mu)$, $i = 1, 2$, их асимптотическими приближениями

$$\psi_i^{(N)}(t,\eta,\mu) = \sum_{k=0}^{N}\mu^k\left(\psi_{ik}(t,\eta) + \Pi_k\psi_i(s,\eta) + \mathrm{Q}_k\psi_i(\tau,\eta)\right),$$
$$i = 1, 2, \quad s = (t - t^*)/\mu, \quad \tau = (t - t_*)/\mu.$$

Вектор-функция

$$\bar{u}^{(N)}(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1^{(N)}\left(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu\right) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2^{(N)}\left(t,\eta^{(N)}(\mu),\mu\right)\right), \quad t \in T,$$

вместе с (5.1) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3). В частности, как следует из (2.2), (2.4), (3.2), (4.6), (4.8), (4.11), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка имеет вид

$$\bar{u}^{(0)}(t,\mu) = P^{-1}(t)\left(B_0^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t) + B_2^{\mathrm{T}}(t)\Pi\psi\left((t - t^*)/\mu\right)\right) = u^0(t) + u^*\left((t - t^*)/\mu\right), \quad t \in T. \tag{5.4}$$

Заметим, что асимптотическое приближение не зависит от начального состояния z_* вектора быстрых переменных и при малом μ будет существенно отличаться от решения $u^0(t)$, $t \in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^*.

Замечание 2. Для построения асимптотически субоптимального управления N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3) достаточно найти асимптотическое приближение для $R(\eta,\mu)$ с точностью порядка μ^{N+1}, а тогда предположение 2 можно ослабить, заменив его следующим требованием (см. [17]): элементы матриц, формирующих задачу, должны иметь непрерывные производные до порядка $N+2$ включительно.

Построенные асимптотические приближения корней системы уравнений (4.13) можно использовать для нахождения оптимального управления $u^0(t,\mu)$, $t\in T$, в задаче (1.1)–(1.3) с заданным значением μ. Для этого нужно применить процедуру доводки (см. [18]), т.е. найти методом Ньютона корни системы (4.14), взяв в качестве начального приближения $\eta^{(N)}(\mu)$. Чтобы избежать интегрирования жестких систем, вместо матрицы $\partial R(\eta,\mu)/\partial\eta$ можно воспользоваться ее асимптотическим приближением I_0.

Замечание 3. При исследовании сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления традиционный подход (см. [1], [3], [4], [7]–[10]) состоит в построении асимптотики оптимальных траекторий. При этом исходная задача распадается на три невозмущенные вариационные задачи меньшей размерности. В настоящей статье строятся асимптотические приближения непосредственно к решению задачи, т.е. к оптимальному управлению. В этом случае происходит декомпозиция исходной задачи на две предельные задачи, соответственно, для медленной и быстрой переменных. Если же рассмотреть оптимальные траектории в этих двух задачах, то в первой базовой задаче (предельной для медленной переменной) в начале процесса возникает пограничный слой, который называют левым при традиционном подходе. Описывается он через решение еще одной вариационной задачи.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИ СУБОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ

Программные асимптотически субоптимальные управления, разумеется, зависят от начального состояния $\left(y_*,z_*,t_*\right)$ динамической системы. Ранее такая зависимость нами не учитывалась, поскольку начальное состояние считалось заданным. В настоящем разделе, который посвящен построению асимптотически субоптимальной обратной связи нулевого порядка, нас будет интересовать именно эта зависимость. Она будет учтена и в обозначениях. В дальнейшем будем считать, что предположение 3 выполняется для всех $t_*<t^*$. Момент t^* по-прежнему считается заданным.

Введем обозначения, используя блоки фундаментальной матрицы F (см. (2.6))

$$C_1(t)=F_{12}\left(t^*,t\right)F_{22}^{-1}\left(t^*,t\right),\quad K(t)=F_{22}^{-1}\left(t^*,t\right)F_{21}(t^*,t),\quad M_1(t)=H_1C_1(t)H_1^{\mathrm T},\quad t\in T. \tag{6.1}$$

Из (2.7) с учетом (6.1) получаем

$$\psi^0(t_*)=F_{22}^{-1}\left(t^*,t_*\right)H_1^{\mathrm T}M_1^{-1}(t_*)\Big(H_1\left(F_{12}\left(t^*,t_*\right)K(t_*)-F_{11}\left(t^*,t_*\right)\right)y_*+g_1\Big)-K(t_*)y_*, \tag{6.2}$$

$$\psi^0(t^*)=H_1^{\mathrm T}M_1^{-1}(t_*)\Big(H_1\left(F_{12}\left(t^*,t_*\right)K(t_*)-F_{11}\left(t^*,t_*\right)\right)y_*+g_1\Big). \tag{6.3}$$

Заметим, что для всех $t_*<t^*$ имеет место равенство $F\left(t^*,t\right)=\Phi(t)$, в котором матрица

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t)\\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t)\end{pmatrix} \tag{6.4}$$

с блоками размеров $n\times n$ есть решение начальной задачи

$$\dot\Phi=-\Phi\bar A(t),\quad \Phi(t^*)=E_{2n}. \tag{6.5}$$

Соответственно с этим равенства (6.2), (6.3) можно записать в виде

$$\psi^0(t_*)=\Phi_{22}^{-1}(t_*)H_1^{\mathrm T}M_1^{-1}(t_*)\left(H_1\Phi_0(t_*)y_*+g_1\right)-K(t_*)y_*, \tag{6.6}$$

$$\psi^0(t_*)=H_1^{\mathrm T}M_1^{-1}(t_*)\left(H_1\Phi_0(t_*)y_*+g_1\right), \tag{6.7}$$

где

$$\Phi_0(t)=\Phi_{12}(t)K(t)-\Phi_{11}(t). \tag{6.8}$$

Согласно формуле Коши,

$$z^*(0) = \int_{-\infty}^{0} G(s)B_2(t^*)u^*(s)ds,$$

где $G(s)$, $s \le 0$, – решение начальной задачи (3.5). Отсюда и из формул (3.2)–(3.4), (3.9) следует $z^*(0) = C_3\Pi\psi(0)$. Вместе с тем имеет место равенство (4.19), поэтому

$$\Pi\psi(0) = H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)\left(A_3(t^*)y^0(t^*) + B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^{\mathrm{T}}(t^*)\psi^0(t^*)\right) + g_2\right), \tag{6.9}$$

где $M_3 = H_2C_3H_2^{\mathrm{T}}$. Для сокращения записи введем обозначение

$$C_0(t) = \left(A_3(t^*)C_1(t) + B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^{\mathrm{T}}(t^*)\right)H_1^{\mathrm{T}}M_1^{-1}(t), \tag{6.10}$$

что вместе с (6.7) позволяет записать равенство (6.9) в виде

$$\Pi\psi(0) = H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)\left(C_0(t^*)\left(H_1\Phi_0(t^*)y_* + g_1\right) - A_3(t^*)\Phi_0(t^*)y_*\right) + g_2\right).$$

Тогда в силу (3.3)

$$\Pi\psi(s) = G^{\mathrm{T}}(s)H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)\left(C_0(t_*)\left(H_1\Phi_0(t_*)y_* + g_1\right) - A_3(t^*)\Phi_0(t_*)y_*\right) + g_2\right), \quad s \le 0. \tag{6.11}$$

Как видно из (5.3), (6.6), (6.11), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в начальный момент времени представимо в виде

$$\begin{aligned}\overline{u}^{(0)}(t_*,\mu) = P^{-1}(t_*)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t_*)\left(\Phi_{22}^{-1}(t_*)H_1^{\mathrm{T}}M_1^{-1}(t_*)\left(H_1\Phi_0(t_*)y_* + g_1\right) - K(t_*)y_*\right) +\\ + B_2^{\mathrm{T}}(t_*)G^{\mathrm{T}}\left((t-t^*)/\mu\right)H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)\left(C_0(t_*)\left(H_1\Phi_0(t_*)y_* + g_1\right) - A_3(t^*)\Phi_0(t_*)y_*\right) + g_2\right)\Big).\end{aligned}$$

Поскольку $\left(y_*, z_*, t_*\right)$ – произвольное начальное состояние динамической системы, то по определению 2 вектор-функция

$$\begin{aligned}u^{(0)}(y,z,t,\mu) = P^{-1}(t)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t)\left(\Phi_{22}^{-1}(t)H_1^{\mathrm{T}}M_1^{-1}(t)\left(H_1\Phi_0(t)y + g_1\right) - K(t)y\right) +\\ + B_2^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}\left((t-t^*)/\mu\right)H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)\left(C_0(t)\left(H_1\Phi_0(t)y + g_1\right) - A_3(t^*)\Phi_0(t)y\right) + g_2\right)\Big)\end{aligned} \tag{6.12}$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. При ее построении используются формулы (3.9), (6.1), (6.8), (6.10). Матрица $G(s)$, $s \le 0$, является решением начальной задачи (3.5), а $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{12}(t)$, $\Phi_{21}(t)$, $\Phi_{22}(t)$ – блоки матрицы (6.4), удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.5).

Введя обозначения

$$\begin{aligned}D_1(t,\mu) = P^{-1}(t)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t)\left(\Phi_{22}^{-1}(t)H_1^{\mathrm{T}}M_1^{-1}(t)H_1\Phi_0(t) - K(t)\right) +\\ + B_2^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}\left((t-t^*)/\mu\right)H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}H_2A_4^{-1}(t^*)\left(C_0(t)H_1\Phi_0(t) - A_3(t^*)\Phi_0(t)\right)\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_2(t,\mu) = P^{-1}(t)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t)\Phi_{22}^{-1}(t)H_1^{\mathrm{T}}M_1^{-1}(t)g_1 +\\ + B_2^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}\left((t-t^*)/\mu\right)H_2^{\mathrm{T}}M_3^{-1}\left(H_2A_4^{-1}(t^*)C_0(t)g_1 + g_2\right)\Big),\end{aligned}$$

асимптотически субоптимальную связь нулевого порядка можно записать в виде

$$u^{(0)}(y,z,t,\mu) = D_1(t,\mu)y + D_2(t,\mu).$$

Отметим, что асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

7. ПРИМЕР

Рассмотрим задачу, которая моделирует процесс управления движением материальной точки малой массы по горизонтальной плоскости с учетом силы сопротивления среды, которая пропорциональна скорости точки:

$$\dot{y}_1 = z_1, \quad \dot{y}_2 = z_2, \quad \mu\dot{z}_1 = -cz_1 + bu_1, \quad \mu\dot{z}_2 = -cz_2 + bu_2,$$

$$
\begin{gathered}
y_1(t_*) = y_{*1}, \quad y_2(t_*) = y_{*2}, \quad z_1(t_*) = z_{*1}, \quad z_2(t_*) = z_{*2}, \\
y_1(t^*) = 0, \quad z_1(t^*) = 0, \quad z_2(t^*) = 0,
\end{gathered} \tag{7.1}
$$

$$
J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (a_1^2 y_1^2 + a_2^2 y_2^2 + u_1^2 + u_2^2)dt \to \min.
$$

Все постоянные положительны, при этом $\mu \ll 1$. Построим асимптотически субоптимальные управление и обратную связь нулевого порядка в этой задаче. Предположения 1, 2 в данном случае выполнены.

Динамическая система в первой базовой задаче

$$
\dot{y}_1 = bu_1/c, \quad \dot{y}_2 = bu_2/c, \quad y_1(t_*) = y_{*1}, \quad y_2(t_*) = y_{*2}, \quad y_1(t^*) = 0,
$$

$$
J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} (a_1^2 y_1^2 + a_2^2 y_2^2 + u_1^2 + u_2^2)dt \to \min
$$

удовлетворяет предположению 3, а оптимальное управление имеет вид

$$
u_1^0(t) = -a_1 \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a_1 b}{c}(t^* - t)\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a_1 b}{c}(t^* - t_*)\right)} y_{*1}, \quad u_2^0(t) = -a_2 \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a_2 b}{c}(t^* - t)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{a_2 b}{c}(t^* - t_*)\right)} y_{*2}, \quad t \in [t_*, t^*]. \tag{7.2}
$$

Для динамической системы во второй базовой задаче

$$
dz_1/ds = -cz_1 + bu_1, \quad dz_2/ds = -cz_2 + bu_2, \quad z_i(-\infty) = 0, \quad i = 1, 2,
$$

$$
z_1(0) = \frac{b}{c}\frac{a_1}{\operatorname{sh}\left(\frac{a_i b}{c}(t^* - t_*)\right)} y_{*1},
$$

$$
z_2(0) = 0,
$$

$$
J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (u_1^2 + u_2^2)ds \to \min
$$

выполнено предположение 4. Решением этой задачи является управление

$$
u_1^*(s) = \frac{2a_1 \exp(cs)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a_1 b}{c}(t^* - t_*)\right)} y_{*1}, \quad u_2^*(s) = 0, \quad s \le 0. \tag{7.3}
$$

Согласно (5.3), асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка в задаче (7.1) представимо в виде

$$
\overline{u}_i^{(0)}(t, \mu) = u_i^0(t) + u_i^*\left((t - t^*)/\mu\right), \quad t \in [t_*, t^*], \quad i = 1, 2. \tag{7.4}
$$

Слагаемые $u_i^0(t)$, $u_i^*\left((t - t^*)/\mu\right)$, $i = 1, 2$, задаются формулами (7.2), (7.3).

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка, которая строится по формулам (3.5), (3.9), (6.1), (6.8), (6.10), (6.12) имеет вид

$$
\begin{gathered}
u_1^{(0)}(y, z, t, \mu) = -a_1 \left(\operatorname{cth}\left(\frac{a_1 b}{c}(t^* - t)\right) - \frac{2\exp\left(c\,(t - t^*)/\mu\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a_1 b}{c}(t^* - t)\right)} \right) y_1, \\
u_2^{(0)}(y, z, t, \mu) = a_2 \operatorname{th}\left(\frac{a_2 b}{c}(t^* - t)\right) y_2.
\end{gathered} \tag{7.5}
$$

Для оценки качества построенных асимптотических приближений к решению задачи (7.1) были найдены невязки $\left(y_1(t^*,\mu), z_1(t^*,\mu), z_2(t^*,\mu)\right)$ в терминальных ограничениях при управлении (7.4) для конкретных значений малого параметра в случае, когда $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b = 4$, $c = 3$, $t_* = 0$, $t^* = 5$, $y_{*1} = 2$, $y_{*1} = 1$, $z_{*1} = 1$, $z_{*2} = 2$. В частности, оказалось, что

$$y_1(5,\,0.1) = 0.034578, \quad z_1(5,\,0.1) = 0.00338, \quad z_2(5,\,0.1) = 0,$$

$$y_1(5,\,0.01) = 0.003458, \quad z_1(5,\,0.01) = 0.000339, \quad z_2(5,\,0.01) = 0.$$

Результаты вычислений приведены с точностью до 10^{-6}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложены и обоснованы вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При применении предлагаемых алгоритмов задача распадается на две невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемехан. 2006. № 1. С. 3–51.
2. *Калинин А.И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.
3. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012 // Int. J. Information and Systems Sciences. 2014. V. 9. № 1. P. 1–36.
4. *Kokotovic P.V., Khalil H.K.* Singular perturbations in systems and control. New York: IEEE Press, 1986.
5. *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
6. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
7. *Kokotovic P.V., Jackel R.A.* Singular perturbation of linear regulators: basic theorems // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. V. 17. № 1. P. 29–37.
8. *Wilde R.R., Kokotovic P.V.* Optimal open – and closed loop control of singularly perturbed linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. V. 18. № 6. P. 616–626.
9. *Глизер В.Я., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в линейной задаче оптимального управления с квадратичным функционалом // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. № 5. С. 997–1000.
10. *O'Malley R.E., Jr.* Singular perturbation and optimal control // Lecture Notes. Math. 1978. V. 680. P. 171–218.
11. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 2. С. 194–206.
12. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
13. *Калинин А.И.* О проблеме синтеза оптимальных систем управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 397–402.
14. *Мордухович Б.Ш.* Существование оптимальных управлений // Соврем. пробл. матем. (Итоги науки и техники) М.: ВИНИТИ, 1976. Т. 6. С. 207–271.
15. *Калинин А.И., Лавринович Л.И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления с терминальными ограничениями на траектории // Автоматика и телемехан. 2020. № 6. С. 29–46.
16. *Есипова В.А.* Асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений условно устойчивого типа // Дифференц. ур-ния. 1975. Т. 11. № 11. С. 1957–1966.
17. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
18. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Минск: Университетское, 1984.