ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 45–70

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.626

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ВОЛЬТЕРРОВА ТИПА[1)]

© 2022 г. В. И. Сумин[1,2,*], М. И. Сумин[2,1,**]

[1] 603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия

[2] 392000 Тамбов, ул. Интернациональная, 33, ТГУ им. Г.Р. Державина, Россия

*e-mail: v_sumin@mail.ru

**e-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.
Переработанный вариант 21.03.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) – принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина – в выпуклой задаче оптимального управления с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства. Управляемая система задается линейным функционально-операторным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Целевой минимизируемый функционал задачи является сильно выпуклым. Получение регуляризованных КУО основано на использовании метода двойственной регуляризации. Основное предназначение регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина – устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений с одновременным конструктивным представлением этих решений; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов – своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних; 4) "преодолевают" свойства некорректности КУО и дают регуляризирующие алгоритмы для решения оптимизационных задач. В качестве приложения результатов для задачи оптимального управления линейным функционально-операторным уравнением II рода общего вида рассматриваются два примера конкретных задач оптимального управления, связанных с системой уравнений с запаздыванием и с интегродифференциальным уравнением типа уравнения переноса. Библ. 35.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, распределенная система, функционально-операторное уравнение вольтеррова типа, некорректность, регуляризация, двойственность, минимизирующее приближенное решение, регуляризирующий оператор, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина.

DOI: 10.31857/S0044466921110144

1. ВВЕДЕНИЕ

Принцип Лагранжа (ПЛ) и принцип максимума Понтрягина (ПМП) в их различных вариантах представляют собой классические условия оптимальности (КУО), вопросам формулировки и обоснования которых в теории оптимального управления распределенными системами посвящено большое число публикаций. Хорошо известно, что как ПЛ, так и ПМП были открыты благодаря, прежде всего, необходимости решения различных практических оптимизационных (экстремальных) задач (см., например, [1, гл. 1]–[5]. Однако возможности непосредственного применения ПЛ и ПМП для практического решения многих важных оптимизационных задач сильно ограничивают присущие этим КУО "от природы" свойства некорректности. Это, прежде всего, связано с тем, что различные проявления некорректности свойственны самим задачам оптимизации. К таким хорошо известным свойствам некорректности оптимизационных задач относятся свойства несуществования их решений и решений двойственных к ним задач, а также

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00199_a).

свойства неустойчивости решений как по аргументу, так и по функции (содержательные примеры такой некорректности можно найти, например, в [6, гл. 9]). Естественно, различные проявления некорректности характерны и для КУО. Говоря о некорректности КУО, в первую очередь мы имеем в виду такие ее проявления, как неустойчивость и невыполнимость КУО. Поясним смысл, который мы вкладываем в термины “неустойчивость” и “невыполнимость”. Мы говорим о неустойчивости КУО, если выделяемые ими в задачах, “близких” к исходной (невозмущенной) задаче элементы, формально удовлетворяющие КУО в этих возмущенных задачах, фактически не являются реальными приближениями к точному решению исходной задачи. Другими словами, при сколь угодно малых возмущениях оптимизационных задач эти удовлетворяюшие “возмущенным” КУО элементы могут сколь угодно сильно отличаться как по аргументу, так и по функции, от оптимальных элементов невозмущенных задач (см., например, [7], [8]). В свою очередь, невыполнимость КУО в той или иной конкретной задаче условной оптимизации мы понимаем как принципиальную невозможность записать их для этой задачи в той привычной (классической) форме, в которой принято записывать условия оптимальности в других задачах данного класса. Простейший пример невыполнимости принципа Лагранжа в задаче выпуклого, а точнее говоря, линейного программирования с ограничением-равенством в бесконечномерном пространстве, можно найти в [1, с. 260], другие содержательные примеры см. в [7], [8]. Указанные и многие подобные им примеры говорят о том, что КУО в каждой конкретной задаче условной оптимизации, в том числе и оптимального управления, априори следует считать математическими объектами, которым в полной мере присущи проявления некорректности, если не доказано обратное.

Настоящая статья посвящена методам преодоления свойств некорректности ПЛ и ПМП в линейно-выпуклых задачах оптимизации распределенных систем с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства и способам получения для таких задач регуляризованных ПЛ и ПМП в форме теорем существования обобщенных минимизирующих последовательностей – минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги [9] (в математическом программировании такие последовательности получили название обобщенных планов [10]). Основное предназначение этих регуляризованных ПЛ и ПМП – устойчивое генерирование МПР в задачах оптимального управления для целей непосредственного практического устойчивого решения таких задач. Таким образом, указанные теоремы существования МПР дают регуляризирующие алгоритмы решения задач оптимального управления.

С общей точки зрения, рассматриваемая в работе задача оптимального управления может быть отнесена к классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Так как в подобных задачах, ввиду конечномерности образа оператора, задающего ограничения, проблема невыполнимости условий оптимальности в разрешимой задаче, по сути дела, снимается, то главное внимание в статье уделяется проблеме преодоления неустойчивости ПЛ и ПМП для таких задач. Неустойчивость КУО в задачах с ограничениями проявляет себя уже в самых простейших конечномерных задачах выпуклого программирования как с ограниченными, так и неограниченными множествами допустимых элементов (см., в частности, [7, пример 3]).

Наличие совсем простых примеров неустойчивости оптимизационных задач и соответствующих им КУО хорошо объясняет постоянный на протяжении многих лет интерес к проблеме неустойчивости в задачах условной оптимизации с функциональными ограничениями. В частности, подробное изложение основных существующих в настоящее время подходов к регуляризации в задачах с функциональными ограничениями типа равенства и неравенства может быть найдено в [6, гл. 9] (там же см. обширную библиографию).

Укажем две существенные, на наш взгляд, особенности настоящей работы. Во-первых, подчеркнем, что в данной работе мы занимаемся, по сути дела, не регуляризацией “самой задачи” условной минимизации, как это обычно принято в теории регуляризации [6], [11], [12]. Речь идет о регуляризации непосредственно КУО в оптимизационной задаче, которые при этом естественным образом трансформируются нами в теоремы существования МПР и одновременно в регуляризирующие алгоритмы для решения задач оптимального управления. Мы опираемся при этом на предложенный ранее в наших работах (см. данный журнал за 2007 г.) и основанный на теории двойственности подход к регуляризации в задачах условной оптимизации.

Во-вторых, регуляризация КУО нацелена здесь на преодоление их неустойчивости в задачах оптимизации распределенных систем, описываемых линейными функциональными (иначе, функционально-операторными) уравнениями II рода общего вида в пространствах L_2^m. Отличительная черта рассматриваемых нами уравнений – квазинильпотентность основного линейного оператора правой части. Подобным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы. Начиная с работ L.Tonelli [13] и А.Н.Тихонова [14] название “вольтерровы операторы” (операторы типа Вольтерра) присваивалось разными авторами различным семействам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы (см., например, [9, с. 233]) и др.). Подобные семейства выделялись как в классах интегральных (см., например, [15], [16]) и функциональных (см., например, [17]–[19]) операторов, так и в классах разного рода абстрактных операторов (см., например, [20]–[24]); краткий обзор определений вольтеррововсти см. в [25]. В случае линейных операторов определения вольтерровости обычно так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [20, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение [18] функционального оператора, “вольтеррова на системе множеств”, являющееся многомерным обобщением определения А.Н. Тихонова [14], и опирающийся на него цепочечный признак квазинильпотентности [26, теорема 2]). Поэтому рассматриваемые нами в данной статье функциональные уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова типа. К таким уравнениям естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегродифференциальных, систем таких уравнений, уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, [25], разд. 5 данной статьи, обзор в [27]). Это позволило в настоящей работе получить регуляризованные ПЛ и ПМП единообразно для широкого класса распределенных оптимизационных задач. В качестве конкретных иллюстрирующих примеров рассматриваются задачи оптимального управления, связанные с системой дифференциальных уравнений с запаздыванием и с интегродифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Отметим, что в настоящей работе используется иное, нежели в [6, гл. 9], понятие регуляризирующего алгоритма для задачи условной оптимизации (см. определение 3.2), введенное ранее в [28]. Оно, как и производное от него понятие МПР-образующего алгоритма (см. определение 3.3) нацелено прежде всего на устойчивое построение МПР в задаче и “жестко привязано” именно к понятию МПР, органично учитывающему, как запросы строгой математической оптимизационной теории [9, гл. IV–VIII], так и потребности инженерной практики [9, гл. III], предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых “зазоров” как по выполнению ограничений задачи, так и по близости к значению (нижней грани) задачи. Понятие МПР-образующего алгоритма в совокупности с двойственным подходом позволяет получать регуляризованные КУО при очень общих предположениях об исходных данных задачи. Одновременно оно естественным образом “встраивается” в их формулировки. Используемое в статье понятие регуляризирующего алгоритма (определение 3.2) можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между применяемыми в [6, гл. 9] понятиями регуляризирующих алгоритмов первого типа (сходимость нижних граней, см. определение 1 [6, гл. 9, § 2, с. 802]) и второго типа (сходимость по аргументу, см. определение 1 [6, гл. 9, § 6, с. 837, 838]). Такое понятие регуляризирующего алгоритма позволяет конструировать соответствующие ему конкретные реализации путем естественной трансформации КУО при минимальных, на наш взгляд, дополнительных предположениях о задаче. Последнее связано с тем, что применяемый в работе подход к получению регуляризованных КУО (основанный на двойственности) не использует в своих конструкциях ни штрафные функции, ни расширение допустимого множества, ни стабилизацию исходной задачи. Отметим однако, что в отличие от регуляризирующих алгоритмов второго типа, применяемых в [6, гл. 9], предлагаемые нами конкретные реализации регуляризирующих алгоритмов сами по себе не гарантируют сильной сходимости приближенных решений к точному. Здесь тип сходимости (сильная, слабая) приближенных решений, т.е. элементов, составляющих МПР, к точному решению определяется дополнительными свойствами рассматриваемой оптимизационной задачи. Так, в условиях данной работы, ввиду сильной выпуклости функционала цели, в случае его субдифференцируемости можно говорить о сильной сходимости элементов МПР к точному решению задачи.

Ранее различные варианты регуляризованных КУО для задач оптимизации распределенных систем в случае параболических уравнений рассматривались в ряде наших работ (см., например, работу [8], а также библиографию в ней). В данной работе результаты регуляризации КУО представляются сразу для широкого класса распределенных систем, описываемых, как сказано выше, линейными функциональными уравнениями второго рода общего вида в пространствах типа L_2 при весьма общих условиях на правые части уравнений (предполагается лишь квазинильпотентность основного оператора правой части уравнения). В этом состоит принципиальное отличие ее результатов от результатов упомянутых работ: применяемый здесь подход позволяет единообразно получить регуляризованные КУО для обширного класса оптимизационных задач, существенно отличающихся от рассмотренных ранее в наших работах по регуляризации КУО в задачах оптимизации распределенных систем.

Работа состоит из введения и четырех основных разделов. Первый из них посвящен постановке задачи оптимального управления системой вольтеррова типа, описываемой линейным функционально-операторным уравнением II рода общего вида в пространстве L_2^m, с функциональными ограничениями. Здесь, в частности, вводятся необходимые далее понятия точной и приближенной оптимизационных задач, определения МПР и МПР-образующего алгоритма. Во втором разделе исходная задача оптимального управления переписывается в терминах эквивалентной задачи выпуклого программирования с сильно выпуклым целевым функционалом. Для этой вспомогательной задачи на основе результатов работ [7], [28] формулируется и доказывается соответствующий регуляризованный ПЛ. Третий раздел посвящен расшифровке результатов второго раздела в терминах исходной задачи оптимального управления, поставленной в первом разделе. Здесь в терминах исходной задачи последовательно формулируются теорема сходимости метода двойственной регуляризации, регуляризованный ПЛ и, в качестве следствия последнего, регуляризованный ПМП. Наконец, в последнем, четвертом разделе, в качестве приложения общих результатов третьего раздела рассматриваются два примера конкретных задач оптимального управления, связанных с системой дифференциальных уравнений с запаздыванием и с интегро-дифференциальным уравнением типа уравнения переноса.

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbf{R}^n$ — пространство n-векторов-столбцов; $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ и $\|\cdot\|_n$ — евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbf{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; * — знак сопряжения и транспонирования; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных, элементы которого обозначаем через $t \equiv \{t^1,\ldots,t^n\}$; $L_p(\Pi)$ — лебегово пространство со стандартной нормой $(1 \le p \le \infty)$; $L_p^m \equiv L_p^m(\Pi) \equiv (L_p(\Pi))^m$ $(1 \le p \le \infty)$; $\|\cdot\|_{p,m}$ — стандартная норма прямого произведения в L_p^m; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,m}$ — стандартное скалярное произведение в L_2^m; $L_p^{m\times l} \equiv L_p^{m\times l}(\Pi)$ — пространство $(m\times l)$-матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m\times l}$ — стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m\times l}$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Базовая оптимизационная задача

Пусть заданы: натуральные числа m, n, s; $\Pi \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченное и измеримое по Лебегу множество; $c(t)$, $t \in \Pi$, — функция класса $L_2^m \equiv L_2^m(\Pi)$; $A : L_2^m \to L_2^m$ — линейный ограниченный оператор (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B : L_2^s \to L_2^m$. Рассмотрим линейное функциональное уравнение II рода

$$z(t) = A[z](t) + B[u](t) + c(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{2.1}$$

считая $u(.)$ управляющей функцией (управлением). Ввиду квазинильпотентности A, уравнение (2.1) имеет для каждого $u(.) \in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, и справедлива формула

$$z(t) = S[B[u] + c](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \tag{2.2}$$

в которой $S : L_2^m \to L_2^m$ — ЛОО — сумма ряда Неймана: $S[y] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} A^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(.) \in L_2^s$ и задаваемое формулой (2.2) решение $z(.)$ уравнения (2.1) обозначаем $z_u(.)$.

Чтобы поставить для управляемой системы (2.1) задачу оптимального управления, будем считать, что на прямом произведении $L_2^m \times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_k$, $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_r$ со свойствами: $\mathcal{I}_0[z,u] \equiv K[z] + M[u]$, $z \in L_2^m$, $u \in L_2^s$, где $K : L_2^m \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал, а $M : L_2^s \to \mathbf{R}$ — сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклости κ;

$\mathcal{G}_i[z,u]: L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал $(i = 1,\dots,k)$; $\mathcal{I}_i[z,u]: L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ — линейный ограниченный функционал, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i[z,u] \equiv \langle a_i, z\rangle_{2,m} + \langle b_i, u\rangle_{2,s}$, где $a_i \in L_2^m$, $b_i \in L_2^s$ $(i = 1,\dots,r)$.

Используя (2.2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы: $J_0[u] \equiv \mathcal{G}_0[z_u,u] \equiv K[z_u] + M[u]$, $J_i[u] \equiv \mathcal{G}_i[z_u,u] (i = 1,\dots,k)$, $I_i[u] \equiv \mathcal{I}_i[z_u,u] (i = 1,\dots,r)$, $u(.) \in L_2^s$. Функционал $J_0[.]$ сильно выпуклый, функционалы $J_i[.] (i = 1,\dots,k)$ выпуклые, а функционалы $I_i[.] (i = 1,\dots,r)$ аффинные на L_2^s. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s, $d_1,\dots,d_r$ — некоторые числа. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (2.1) с минимизируемым целевым функционалом $J_0[u]$ при функциональных ограничениях

$$J_1[u] \le 0,\dots, J_k[u] \le 0, \quad I_1[u] = d_1,\dots, I_r[u] = d_r \tag{2.3}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$J_0[u] \to \min, \quad (2.3), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{2.4}$$

2.2. Точная и приближенная оптимизационные задачи

Задача (2.4) полностью определяется набором своих исходных данных

$$\mathrm{f} \equiv \{A, B, c, K, M, \mathcal{G}_i (i = 1,\dots,k), \{a_i, b_i, d_i\} (i = 1,\dots,r)\}.$$

Предположим, что точные исходные данные

$$\mathrm{f}^0 \equiv \left\{A^0, B^0, c^0, K^0, M^0, \mathcal{G}_i^0 (i = 1,\dots,k), \left\{a_i^0, b_i^0, d_i^0\right\} (i = 1,\dots,r)\right\}$$

нам не известны, но мы можем оперировать с приближенными исходными данными

$$\mathrm{f}^\delta \equiv \left\{A^\delta, B^\delta, c^\delta, K^\delta, M^\delta, \mathcal{G}_i^\delta (i = 1,\dots,k), \left\{a_i^\delta, b_i^\delta, d_i^\delta\right\} (i = 1,\dots,r)\right\},$$

где δ — меняющийся в некотором полуинтервале $(0, \delta_0]$ числовой параметр (δ_0 — фиксированное число), характеризующий близость приближенных данных f^δ к точным данным f^0 в указанном ниже условиями Б и В смысле (в соответствии с традициями теории некорректных задач положительным значениям параметра δ соответствует приближенная оптимизационная задача вида (2.4) с данными f^δ, а значению $\delta = 0$ — точная оптимизационная задача вида (2.4) с данными f^0). Таким образом, мы считаем, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ существуют следующие объекты: квазинильпотентный ЛОО $A^\delta : L_2^m \to L_2^m$; ЛОО $B^\delta : L_2^s \to L_2^m$; функция $c^\delta(.) \in L_2^m$; выпуклый функционал $K^\delta[z] : L_2^m \to \mathbf{R}$; сильно выпуклый функционал $M^\delta[u] : L_2^s \to \mathbf{R}$ с постоянной сильной выпуклости κ; выпуклый функционал $\mathcal{G}_i^\delta[z,u] : L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$; линейный ограниченный функционал $\mathcal{I}_i^\delta[z,u] : L_2^m \times L_2^s \to \mathbf{R}$, задаваемый формулой $\mathcal{I}_i^\delta[z,u] \equiv \left\langle a_i^\delta, z\right\rangle_{2,m} + \left\langle b_i^\delta, u\right\rangle_{2,s}$, где $a_i^\delta \in L_2^m$, $b_i^\delta \in L_2^s$ $(i = 1,\dots,r)$; числа $d_i^\delta (i = 1,\dots,r)$.

Предполагаем, что выполняется

Условие А. Функционалы K^δ, M^δ и каждый из функционалов $\mathcal{G}_i^\delta (i = 1,\dots,k)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, суть липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств L_2^m, L_2^s и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причем липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, т.е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем, что входные данные оптимизационных задач семейства (OC^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$, связаны с входными данными точной задачи (OC^0) следующим образом.

Условие Б. Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем

$$\begin{gathered}\left\|A^\delta - A^0\right\| \le C\delta, \quad \left\|B^\delta - B^0\right\| \le C\delta, \quad \left\|c^\delta - c^0\right\|_{2,m} \le C\delta, \quad \left\|a_i^\delta - a_i^0\right\|_{2,m} \le C\delta \quad (i = 1,\dots,r),\\ \left\|b_i^\delta - b_i^0\right\|_{2,s} \le C\delta \quad (i = 1,\dots,r), \quad \left|d_i^\delta - d_i^0\right| \le C\delta \quad (i = 1,\dots,r), \quad \left|M^\delta[u] - M^0[u]\right| \le C\delta \quad (u \in \mathcal{D}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Условие В. Существует неубывающая функция $N_1(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(.)\|_{2,m} \le l$, $u(.) \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\left|K^\delta[z] - K^0[z]\right| \le N_1(l)\delta, \quad \left|\mathcal{F}_i^\delta[z,u] - \mathcal{F}_i^0[z,u]\right| \le N_1(l)\delta \quad (i = 1,\dots,k). \tag{2.6}$$

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = A^\delta[z](t) + B^\delta[u](t) + c^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{2.7}$$

ввиду квазинильпотентности оператора A^δ, имеет для каждого $u(.) \in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, и справедлива формула

$$z(t) = S^\delta[B^\delta[u] + c^\delta](t), \quad t \in \Pi, \quad u(.) \in L_2^s, \tag{2.8}$$

где $S^\delta : L_2^m \to L_2^m$ – ЛОО – сумма ряда Неймана: $S^\delta[y] \equiv \sum_{i=0}^\infty (A^\delta)^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u(.) \in L_2^s$ и задаваемое формулой (2.8) решение $z(.)$ уравнения (2.7) будем обозначать $z_u^\delta(.)$, $\delta \in [0, \delta_0]$.

Кроме того, при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ мы имеем набор функциональных ограничений

$$J_1^\delta[u] \le 0, \dots, J_k^\delta[u] \le 0, \quad I_1^\delta[u] = d_1^\delta, \dots, I_r^\delta[u] = d_r^\delta, \tag{2.9}$$

где

$$J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{F}_i^\delta[z_u^\delta, u] \quad (i = 1,\dots,k), \quad I_i^\delta[u] \equiv \mathcal{G}_i^\delta[z_u^\delta, u] \quad (i = 1,\dots,r), \quad u(.) \in L_2^s, \tag{2.10}$$

и задачу оптимального управления

$$J_0^\delta[u] \to \min, \quad (2.9), \quad u(.) \in \mathcal{D}, \tag{OC^δ}$$

где $J_0^\delta[u] \equiv \mathcal{F}_0^\delta[z_u^\delta, u] \equiv K^\delta[z_u^\delta] + M^\delta[u]$, $u(.) \in L_2^s$. Задачу (OC^0) называем *точной* задачей, а задачи (OC^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$, – *приближенными* задачами оптимального управления.

2.3. МПР и МПР-образующий оператор

Для компактности записи введем следующие обозначения: $J^\delta[u] \equiv \left\{J_1^\delta[u], \dots, J_k^\delta[u]\right\}$, $I^\delta[u] \equiv \left\{I_1^\delta[u], \dots, I_r^\delta[u]\right\}$, $d^\delta \equiv \{d_1^\delta, \dots, d_r^\delta\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \left\{u(.) \in \mathcal{D} : \left\|I^\delta[u] - d^\delta\right\|_r \le \epsilon, \quad J_i^\delta[u] \le \epsilon \quad (i = 1,\dots,k)\right\}, \quad \text{где} \quad \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \ge 0,$$

и пусть $\mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}$.

Определим обобщенную нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \ne \emptyset$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Вообще говоря, имеет место очевидное неравенство $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (OC^0). Однако специфика этой задачи такова, что $\beta = \beta_0$, причем обе грани достигаются на ее единственном оптимальном элементе u^0 в случае его существования.

Как уже было сказано выше, центральным для нас является понятие МПР в задаче (OC^0). Напомним, что последовательность $u^k(.) \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, называется МПР задачи (OC^0), если

$J_0^0[u^k] \to \beta$ при $k \to \infty$, причем $u^k(.) \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел $\epsilon^k, k = 1,2,\ldots$.

Введем, наконец, другое центральное понятие работы, а именно, понятие МПР-образующего оператора (алгоритма) [28] в задаче (OC^0).

Определение 2.1. Пусть $\delta^k \in (0,\delta_0)$, $k = 1,2,\ldots,$ – сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k, k = 1,2,\ldots,$ оператор $R(\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (2.5), (2.6) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathrm{f}^{\delta^k},\delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (OC^0), если последовательность $u^{\delta^k}, k = 1,2,\ldots,$ есть МПР в этой задаче.

3. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

3.1. Задача выпуклого программирования

Задача оптимального управления (OC^δ) при любом $\delta \in [0,\delta_0]$ имеет форму задачи выпуклого программирования в пространстве L_2^s. Мы перепишем ее в несколько ином виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работ [7], [28], посвященных регуляризации КУО в задачах выпуклого программирования и выпуклого оптимального управления в гильбертовом пространстве. Для этого выделим в аффинных функционалах $I_j^\delta[.]$, $j = 1,\ldots,r$, линейную часть. Именно, определим функционалы

$$\mathbf{I}_j^\delta[u] \equiv I_j^\delta[u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\right\rangle_{2,s} \equiv I_j^\delta[z_u^\delta, u] - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\right\rangle_{2,s}, \quad u(.) \in L_2^s, \delta \in [0,\delta_0] \quad (j = 1,\ldots,r).$$

Для единообразия записи введем обозначения: $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ $(i = 1,\ldots,k)$, $u(.) \in L_2^s$. Функционал $\mathbf{J}_0^\delta$ – сильно выпуклый, функционалы $\mathbf{J}_i^\delta (i = 1,\ldots,k)$ – выпуклые, а $\mathbf{I}_j^\delta (j = 1,\ldots,r)$ – линейные на L_2^s. Положим $e_j^\delta \equiv d_j^\delta - \left\langle a_j^\delta, S^\delta[c^\delta]\right\rangle_{2,s}$ $(j = 1,\ldots,r)$. Очевидно, что при каждом $\delta \in [0,\delta_0]$ задача выпуклого программирования в L_2^s

$$\mathbf{J}_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \le 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad \mathbf{I}_j^\delta[u] = e_j^\delta \quad (j = 1,\ldots,r), \quad u \in \mathcal{D}, \qquad (P^\delta)$$

эквивалентна задаче оптимального управления (OC^δ): совпадают множества решений и значения этих задач. Для нас важно, что задачи (P^δ), $\delta \in [0,\delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом простанстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в работах [7], [28].

Условие А влечет за собой следующее равномерное по $\delta \in [0,\delta_0]$ свойство липшицевости функционалов $\mathbf{J}_i^\delta (i = 0,1,\ldots,k)$ на любом ограниченном множестве пространства L_2^s: существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0,\delta_0]$ для любого $l > 0$ имеем

$$\left|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]\right| \le \mathbf{N}_2(l)\|u_1 - u_2\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \|u_1\|_{2,s}, \|u_2\|_{2,s} \le l \quad (i = 0,1,\ldots,k).$$

Из условий Б и В, связывающих входные данные задачи оптимального управления (OC^0) с входными данными задач (OC^δ) при $\delta \in (0,\delta_0]$, получаем следующую связь входных данных задачи выпуклого программирования (P^0) с входными данными задач (P^δ) при $\delta \in (0,\delta_0]$.

Лемма 3.1. *Существует постоянная* Γ, *зависящая лишь от операторов* A^0, B^0, *функционалов* $K^0, \mathcal{J}_i^0$ $(i = 1,\dots,k)$, *функций* c^0, a_i^0 $(i = 1,\dots,r)$, b_i^0 $(i = 1,\dots,r)$, N_1, *чисел* C, δ_0 *и множества* $\mathcal{D}$, *такая, что для каждого* $\delta \in (0,\delta_0]$ *выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{J}_i^\delta[u] - \mathbf{J}_i^0[u]\right| \le \Gamma\delta, \quad u \in \mathcal{D} \quad (i = 0,1,\dots,k);\\ \left|\mathbf{I}_i^\delta[u] - \mathbf{I}_i^0[u]\right| \le \Gamma\delta\|u\|_{2,s}, \quad u \in L_2^s \quad (i = 1,\dots,r); \quad \left|e_i^\delta - e_i^0\right| \le \Gamma\delta \quad (i = 1,\dots,r).\end{gathered} \tag{3.1}$$

3.2. МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования

Положим: $\mathbf{J}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{J}_1^\delta[u],\dots,\mathbf{J}_k^\delta[u]\right\}$, $\mathbf{I}^\delta[u] \equiv \left\{\mathbf{I}_1^\delta[u],\dots,\mathbf{I}_r^\delta[u]\right\}$, $e^\delta \equiv \{e_1^\delta,\dots,e_r^\delta\}$. Имеем

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} = \left\{u \in \mathcal{D} : \left\|\mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta\right\|_r \le \varepsilon, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \le \varepsilon \ (i = 1,\dots,k)\right\}, \quad \delta \in [0,\delta_0], \quad \varepsilon \ge 0.$$

Так как обобщенная нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же самой формулой, что и обобщенная нижняя грань задачи (OC^0), и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней то же обозначение β. Имеем $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}}\mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \ne \emptyset$; $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset$. Как уже отмечалось, имеет место очевидное неравенство $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u\in\mathcal{D}^0}\mathbf{J}_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (P^0). Однако специфика задачи (P^0) (задача является выпуклой с сильно выпуклым функционалом цели) такова, что $\beta = \beta_0$, причем обе грани достигаются на ее единственном оптимальном элементе u^0 в случае его существования.

Определение 3.1. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty$ элементов множества $\mathcal{D}$, для которой существует такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, что $u^j \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^j}$ $(j = 1,2,\dots)$ и $\mathbf{J}_0^0[u^j] \to \beta = \inf\limits_{u\in\mathcal{D}^0}\mathbf{J}_0^0[u]$ при $j \to \infty$, называется минимизирующим приближенным решением (МПР) задачи (P^0).

Лемма 3.2. *В силу ограниченности* $\mathcal{D}$ *существование МПР в задаче* (P^0) *равносильно неравенству* $\beta < +\infty$. *Если* $\beta < +\infty$ *и сильно выпуклый функционал* $\mathbf{J}_0^0$ *является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках* $\mathcal{D}$, *то для любого МПР* $u^k, k = 1,2,\dots$, *в разрешимой единственным образом в этом случае задаче* (P^0) *справедливо предельное соотношение* $u^k \to u^0$, $k \to \infty$.

Доказательство. Во-первых, можно заметить, что, так как $\beta < +\infty$, а функционал $\mathbf{J}_0^0$ непрерывный и сильно выпуклый, то последовательность $u^k, k = 1,2,\dots$, о которой идет речь в лемме, является ограниченной. Во-вторых, благодаря единственности решения u^0 и слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u]$, $\mathbf{J}_i^0[u]$ $(i = 1,\dots,k)$, $\mathbf{I}_i^0[u]$ $(i = 1,\dots,r)$, $u \in \mathcal{D}$, получаем, что элементы u^k при $k \to \infty$ сходятся слабо к решению u^0 задачи (P^0). И, наконец, в-третьих, так как одновременно $\mathbf{J}_0^0[u^k] \to \mathbf{J}_0^0[u^0]$ при $k \to \infty$, то в случае субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$ получаем сильную сходимость u^k к u^0 при $k \to \infty$.

Введем для задачи (P^0) согласованное с понятием МПР понятие регуляризирующего оператора [28]. Набором исходных данных задачи (P^δ) является набор $\hat{\mathrm{f}}^\delta \equiv \{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$.

Определение 3.2. Зависящий от $\delta \in (0,\delta_0)$ оператор $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$, удовлетворяющих условиям (3.1), элемент $R(\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta, \delta) = u^\delta \in \mathcal{D}$, называется регуляризирующим в задаче (P^0), если $u^\delta \in \mathcal{D}^{0,\epsilon(\delta)}$ при $\delta \in (0,\delta_0)$, $\mathbf{J}_0^0[u^\delta] \to \beta$, $\epsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Введем понятие МПР-образующего оператора в задаче (P^0) как задаче выпуклого программирования.

Определение 3.3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, – сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}\}$, удовлетворяющих условиям (3.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k}, \mathbf{J}^{\delta^k}, \mathbf{I}^{\delta^k}, e^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (P^0), если последовательность u^{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть МПР в этой задаче.

3.3. Двойственная задача

Определим двойственную задачу к задаче выпуклого программирования (P^δ). Введем с этой целью регулярную функцию Лагранжа задачи (P^δ)

$$L^\delta(u, \lambda, \mu) \equiv \mathbf{J}_0^\delta[u] + \left\langle \lambda, \mathbf{I}^\delta[u] - e^\delta \right\rangle_r + \left\langle \mu, \mathbf{J}^\delta[u] \right\rangle_k, \tag{3.2}$$

где $u \in L_2^s$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$. При любых $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$ и каждом $\delta \in (0, \delta_0]$ функция $L^\delta(u, \lambda, \mu)$ сильно выпукла и непрерывна как функция переменной u в L_2^s, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причем в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu)$, $\lambda \in \mathbf{R}^r$, $\mu \in \mathbf{R}_+^k$ (см., например, [6, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче выпуклого программирования (P^δ) является задача

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k. \tag{3.3}$$

Лемма 3.3. *Ввиду ограниченности $\mathcal{D}$ справедлива оценка*

$$\left| V^\delta(\lambda, \mu) - V^0(\lambda, \mu) \right| \le \mathbf{K}\delta\left(1 + \|\lambda\|_k + \|\mu\|_r\right), \tag{3.4}$$

в которой постоянная $\mathbf{K} > 0$ зависит от $\sup_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}$, но не зависит от δ, λ, μ.

Доказательство этой леммы проводится так же, как и доказательство оценки (2.32) в [28].

3.4. Двойственная регуляризация

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}, \mu^{\delta,\alpha})$ единственную точку, дающую на $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|_r^2 - \alpha\|\mu\|_k^2, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k, \quad \alpha \in \mathbf{R}_+, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Пусть $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta \in (0, \delta_0]$ и выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{3.5}$$

В задаче (P^δ) выполняются все условия, при которых к ней может быть применена теорема сходимости метода двойственной регуляризации работ [7], [28] (это теорема 3.1 в [7] и теорема 1 в [28]), опирающиеся на предложенный ранее в наших работах (см. данный журнал за 2007 г.) и основанный на теории двойственности подход к регуляризации в задачах условной оптимизации. Задача (P^δ) является частным случаем задачи (P^δ) этих работ: набор исходных данных $\{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$ данной работы соответствует набору исходных данных $\{f^\delta, g^\delta, A^\delta, h^\delta\}$ в [7], [28].

Применяя теорему 3.1 из [7] или, что одно и то же, теорему 1 разд. 2.1 из [28], сформулируем в случае задачи (P^δ) теорему сходимости метода двойственной регуляризации. Введем с этой целью соответствующие обозначения. Пусть задача (P^0) имеет решение u^0. Положим

$$\psi(\delta) \equiv \delta \cdot \Gamma \cdot \left\{ \left(1 + \|u^0\|_{2,s}^2\right) + \left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_r \left(2 + \|u^0\|_{2,s}\right) + \left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_k \left(1 + \|u^0\|_{2,s}^2\right) \right\},$$

$$K(\delta) \equiv \mathbf{J}_0^\delta \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] - \mathbf{J}_0^0[u^0] - \delta \cdot \Gamma \cdot \left(1 + \|u^0\|_{2,s}^2\right),$$

$$\mathbf{C}_1 \equiv (3/2)\Gamma, \quad \mathbf{C}_2 \equiv \sqrt{2}\mathbf{C}_1 \cdot \left(1 + \|u^0\|_{2,s}^2\right),$$

$$\phi(\delta, \alpha) \equiv \mathbf{C}_2 \delta + \sqrt{\mathbf{C}_2^2 \delta^2 - 8\alpha K(\delta)}, \quad \delta \in (0, \delta_0].$$

Замечание 3.1. Во-первых, заметим, что теорема 1 в [28] представляет собой уточнение теоремы 3.1 в [7] (см. замечание 3 в разд. 2.1 в [28], а также замечание 3.3 ниже). Во-вторых, для удобства читателя укажем на соответствие обозначений данной работы и работ [7], [28]. Постоянная Γ соответствует постоянной C из разд. 3.1 в [7] и из разд. 2 в [28], постоянная $\mathbf{C}_1$ соответствует постоянной C_1, определенной в формуле (3.15) в [7] и после формулы (2.8) в [28], постоянная $\mathbf{C}_2$ соответствует постоянной C_2, определенной в формулах (3.16), (3.18) в [7] и после формулы (2.8) в [28]. Величина $\psi(\delta)$ определена в формуле (3.23) в [7] и в равенстве (2.5) в [28], величина $K(\delta)$ соответствует величине $K(\delta)$, определенной в неравенстве (3.16) в [7] и в неравенстве (2.8) в [28], величина $\phi(\delta, \alpha(\delta))$ определена в формуле (3.18) в [7] и равенством (2.13) в [28].

Теорема 3.1. Сходимость алгоритма двойственной регуляризации в задаче (P^0). *Пусть задача* (P^0) *имеет решение* u^0. *Если выполняется условие согласования* (3.5), *то* (*вне зависимости от того*, *разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача* (*задача* (3.3) *при* $\delta = 0$)) *имеют место предельные соотношения*

$$\alpha(\delta)\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_r \to 0, \quad \alpha(\delta)\left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_k \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{3.6}$$

$$\left\langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mathbf{I}^\delta \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] - e^\delta \right\rangle_r + \left\langle \mu^{\delta,\alpha(\delta)}, \mathbf{J}^\delta \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] \right\rangle_k \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{3.7}$$

и на полуинтервале $(0, \delta_0]$ *существуют неотрицательные функции* $\Psi_1(\delta)$, $\Psi_2(\delta)$, $\Psi_3(\delta)$, *стремящиеся к нулю при* $\delta \to 0$, *такие, что выполняются неравенства*

$$\mathbf{J}_0^0 \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] \le \mathbf{J}_0^0[u^0] + \Psi_1(\delta), \quad \delta \in (0, \delta_0], \tag{3.8}$$

$$\left\| \mathbf{I}^0 \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] - e^0 \right\|_r \le \Psi_2(\delta), \quad \delta \in (0, \delta_0], \tag{3.9}$$

$$\mathbf{J}_i^0 \left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] \right] \le \Psi_3(\delta), \quad (i = 1, \ldots, k), \quad \delta \in (0, \delta_0]. \tag{3.10}$$

Если же сильно выпуклый функционал $\mathbf{J}_0^0$ *субдифференцируем* (*в смысле выпуклого анализа*) *в точках множества* $\mathcal{D}$, *то имеем*

$$\left\| u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - u^0 \right\|_{2,s} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3.11}$$

В любом случае $u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ *слабо сходится к* u^0 *в пространстве* L_2^s *при* $\delta \to 0$.

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) *задача, алгоритм* $R(\cdot, \delta)$, *задаваемый равенством* $R(\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta, \delta) = u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ *для каждого набора исходных данных* $\{\mathbf{J}_0^\delta, \mathbf{J}^\delta, \mathbf{I}^\delta, e^\delta\}$, *удовлетворяющих оценкам* (3.1) *леммы* 3.1, *является регуляризирующим в смысле определения* 3.2, *причем в случае субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (3.11). *Если же такой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, можно гарантировать лишь слабую сходимость* $u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ *к* u^0 *при* $\delta \to 0$.

Замечание 3.2. Заметим, во-первых, что предельные соотношения (3.6) являются следствием первого предельного соотношения теоремы 3.1 в [7] и одновременно являются следствием оценки (2.14) в [28]. В обозначениях данной работы эта оценка имеет вид

$$\alpha(\delta)\sqrt{\left\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_k^2 + \left\|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\right\|_r^2} \le \mathbf{C}_2\delta + \sqrt{\mathbf{C}_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)\left(K - \mathbf{J}_0^0(u^0) - \Gamma\delta\left(1 + \left\|u^0\right\|_{2,s}^2\right)\right)}, \tag{3.12}$$

где K – величина, ограничивающая снизу значения $\mathbf{J}_0^\delta(u)$ для всех $u \in \mathcal{D}$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Во-вторых, в качестве $\Psi_1(\delta)$, $\Psi_2(\delta)$, $\Psi_3(\delta)$ в (3.8)–(3.10) подходят, например, использовавшиеся в [7], [28] величины (в [7], [28] вместо Θ использовалась буква L) $\Psi_1(\delta) \equiv \psi(\delta) + \delta \cdot \Gamma \cdot (1 + \Theta^2)$, $\Psi_2(\delta) \equiv \phi(\delta, \alpha(\delta)) + \delta \cdot \Gamma \cdot (2 + \Theta)$, $\Psi_3(\delta) \equiv \phi(\delta, \alpha(\delta)) + \delta \cdot \Gamma \cdot (1 + \Theta^2)$, где $\Theta = \sup_{u \in \mathcal{D}} \|u\|_{2,s}$ (см. разд. 2 в [28]). Эти оценки в совокупности с оценкой (3.12) можно трактовать как явные оценки отклонения приближенных решений, о которых идет речь в теореме 3.1, от точного решения u^0 по функции и "по ограничениям".

Замечание 3.3. В формулировке теоремы 3.1 в [7] были, к сожалению, пропущены полученные при ее доказательстве некоторые слагаемые: слагаемое $\psi(\delta)$ (см. неравенства (3.23), (3.26) в [7]) – в выражении для $\psi_1(\delta)$ в формуле, соответствующей (3.8); слагаемое $C\delta(2 + L)$ – в правой части неравенства, соответствующего (3.9); слагаемое $C\delta(1 + L^2)$ – в правой части неравенства, соответствующего (3.10). В формулировке теоремы 1 в [28], а также в приводимой здесь формулировке все указанные слагаемые восстановлены.

3.5. Регуляризованный принцип Лагранжа

Сформулируем и докажем регуляризованный принцип Лагранжа в задаче (P^0).

Теорема 3.2. Регуляризованный принцип Лагранжа для задачи (P^0). *МПР в задаче (P^0) существует тогда и только тогда, когда существуют стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и последовательность пар векторов двойственных переменных $\{\lambda^j, \mu^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ такие, что*

$$\delta^j \left\|\{\lambda^j, \mu^j\}\right\|_{k+r} \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty \tag{3.13}$$

и выполняются включения

$$u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \gamma^j} \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{3.14}$$

а также предельное соотношение

$$\left\langle \lambda^j, \mathbf{I}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] - e^{\delta^j}\right\rangle_r + \left\langle \mu^j, \mathbf{J}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right]\right\rangle_k \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty. \tag{3.15}$$

Если указанные последовательности $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\lambda^j, \mu^j\}_{j=1}^\infty$ существуют, то последовательность $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \ldots$, является МПР задачи (P^0), т.е. помимо (3.14) выполняется и предельное соотношение

$$\mathbf{J}_0^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] \to \mathbf{J}_0^0[u^0] \quad \textit{при} \quad j \to \infty. \tag{3.16}$$

Как следствие соотношений (3.13)–(3.15), выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\lambda^j, \mu^j) \to \sup_{\{\lambda, \mu\} \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = \mathbf{J}_0^0[u^0] \quad \textit{при} \quad j \to \infty. \tag{3.17}$$

В случае субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ на $\mathcal{D}$ имеет место и предельное соотношение

$$\left\|u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j] - u^0\right\|_{2,s} \to 0 \quad \textit{при} \quad j \to \infty. \tag{3.18}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, алгоритм $R(\cdot, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$ для каждого набора исход-

ных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^j}, \mathbf{J}^{\delta^j}, \mathbf{I}^{\delta^j}, e^{\delta^j}\}$, *удовлетворяющих оценкам* (3.1) *леммы* 3.1 *при* $\delta = \delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения* 3.3, *причем в случае субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (3.18). *Если же такой субдифференцируемости нет*, *то*, *строго говоря*, *можно гарантировать лишь слабую сходимость* $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$ *к* u^0 *при* $\delta^j \to 0$, $j \to \infty$.

В качестве конкретной последовательности $\{\lambda^j, \mu^j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *можно взять*, *например*, *последовательность* $\{\lambda^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}, \mu^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots$, *если* $\delta / \alpha(\delta) \to 0, \alpha(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$, т.е., *если выполняется условие согласования* (3.5) (*здесь* $\{\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, \mu^{\delta, \alpha(\delta)}\}$ – *точка*, *о которой идет речь в теореме* 3.1).

Доказательство. Для доказательства необходимости, прежде всего, заметим, что выпуклая задача (P^0), все функционалы которой непрерывны, разрешима благодаря ограниченности $\mathcal{D}$ и существованию МПР. По этой причине мы можем воспользоваться теоремой 3.1. Включение (3.14) и предельное соотношение (3.15), а также предельное соотношение (3.15) доказываемой теоремы вытекают из (3.9), (3.10), (3.7), с учетом ограниченности $\mathcal{D}$, и (3.6), если в качестве точек $\{\lambda^j, \mu^j\}$, $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$ взять соответственно точки $\{\lambda^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}, \mu^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}\}$, $u^{\delta^j}[\lambda^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}, \mu^{\delta^j, \alpha(\delta^j)}]$, $j = 1, 2, \ldots$, с $\delta^j \to 0$, $j \to \infty$. Следствием (3.8), (3.9) и (3.10) является предельное соотношение (3.16). То есть последовательность $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \ldots$, есть МПР. Наконец, тот факт, что предельное соотношение (и одновременно равенство) (3.17) есть следствие предельного соотношения (3.13) и соотношений (3.14), (3.15), будет доказан в процессе доказательства достаточности условий теоремы 3.2 для существования МПР.

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что выпуклая задача (P^0), все функционалы которой непрерывны, разрешима ввиду включений (3.14) и ограниченности $\mathcal{D}$. Далее, так как $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$ минимизирует функционал $L^{\delta^j}(\cdot, \lambda^j, \mu^j)$, можем записать

$$\mathbf{J}_0^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] + \left\langle \lambda^j, \mathbf{I}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] - e^{\delta^j}\right\rangle_r + \left\langle \mu^j, \mathbf{J}^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right]\right\rangle_k \le$$
$$\le \mathbf{J}_0^{\delta^j}[u] + \left\langle \lambda, \mathbf{I}^{\delta}[u] - e^{\delta}\right\rangle_r + \left\langle \mu, \mathbf{J}^{\delta}[u]\right\rangle_k \quad \forall u \in \mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, с учетом ограниченности $\mathcal{D}$, что

$$\mathbf{J}_0^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] \le \mathbf{J}_0^{\delta^j}[u] + \left\langle \lambda, \mathbf{I}^{\delta}[u] - e^{\delta}\right\rangle_r + \left\langle \mu, \mathbf{J}^{\delta}[u]\right\rangle_k + \psi^j \quad \forall u \in \mathcal{D}, \quad \psi^j \to 0, \quad j \to \infty.$$

Положив здесь $u = u^0$, из условия согласования (3.13) получаем $\mathbf{J}_0^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] \le \mathbf{J}_0^0[u^0] + \tilde{\psi}^j$, где $\tilde{\psi}^j \to 0$, $j \to \infty$. Так как одновременно мы имеем включения $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \gamma^j}$, то используя свойства слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, получаем, что $\mathbf{J}_0^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]\right] \to \mathbf{J}_0^0[u^0]$, $j \to \infty$, т.е. последовательность $u^{\delta^j}[\lambda^j, \mu^j]$, $j = 1, 2, \ldots$, является МПР в задаче (P^0). Последнее предельное соотношение в совокупности с (3.15) приводят, в свою очередь, к предельному соотношению $V^{\delta^j}(\lambda^j, \mu^j) \to \mathbf{J}_0^0[u^0]$, $j \to \infty$. Далее, так как благодаря оценке (3.4) и предельному соотношению (3.15), можно утверждать, что справедливо предельное соотношение $V^{\delta^j}(\lambda^j, \mu^j) - V^0(\lambda^j, \mu^j) \to 0$, $j \to \infty$, то получаем, окончательно, предельное соотношение (и одновременно равенство) (3.17).

4. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

4.1. Переформулировка теорем 3.1, 3.2 *в терминах исходной задачи оптимального управления*

Функция Лагранжа задачи оптимального управления (OC^{δ}), совпадающая с функцией Лагранжа задачи выпуклого программирования (P^{δ}), имеет вид

$$L^{\delta}(u, \lambda, \mu) \equiv J_0^{\delta}[u] + \left\langle \lambda, I^{\delta}[u] - d^{\delta}\right\rangle_r + \left\langle \mu, J^{\delta}[u]\right\rangle_k, \quad u \in L_2^s, \quad \lambda \in \mathbf{R}^r, \quad \mu \in \mathbf{R}_+^k,$$

где $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u],\ldots,J_k^\delta[u]\}$, $I^\delta[u] \equiv \{I_1^\delta[u],\ldots,I_r^\delta[u]\}$, $d^\delta \equiv \{d_1^\delta,\ldots,d_r^\delta\}$. Соответственно задача

$$V^\delta(\lambda,\mu) \equiv \min_{u\in\mathcal{D}} L^\delta(u,\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k,$$

является двойственной к задаче (OC^δ). Пусть $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k$ – решение регуляризованной двойственной задачи

$$V^\delta(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|\lambda\|_r^2 - \alpha(\delta)\|\mu\|_k^2 \to \max, \quad (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}_+^k,$$

$\delta \in (0,\delta_0]$, считаем выполненным условие согласования (3.5). "Расшифровка" теорем 3.1, 3.2 в терминах исходной задачи оптимального управления приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному принципу Лагранжа в задаче оптимального управления (OC^0).

Теорема 4.1. Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления. *Пусть выполняется условие согласования* (3.5). *Тогда оператор* $R(\cdot,\delta^j)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^j}, *удовлетворяющих оценкам* (2.5), (2.6) *условий Б, В при* $\delta = \delta^j$, *управление* $R(\mathrm{f}^{\delta^j},\delta^j) \equiv u^{\delta^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}]$, *является МПР-образующим в задаче оптимального управления* (OC^0) *в смысле определения* 2.1. *Более того, имеют место следующие оценки отклонения приближенных решений от точного по функции и ограничениям*

$$J_0^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}]\right] \le J_0^0[u^0] + \Psi_1(\delta^j),$$

$$\left\|I^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}]\right] - d^0\right\|_r \le \Psi_2(\delta^j),$$

$$J_i^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}]\right] \le \Psi_3(\delta^j), \quad (i = 1,\ldots,k),$$

и в качестве $\Psi_1(\delta)$, $\Psi_2(\delta)$, $\Psi_3(\delta)$ *можно взять, например* (см. замечание 3.2), $\Psi_1(\delta) \equiv \psi(\delta) + \delta\cdot\Gamma\cdot(1+\Theta^2)$, $\Psi_2(\delta) \equiv \phi(\delta,\alpha(\delta)) + \delta\cdot\Gamma\cdot(2+\Theta)$, $\Psi_3(\delta) \equiv \phi(\delta,\alpha(\delta)) + \delta\cdot\Gamma\cdot(1+\Theta^2)$, *с* $\Theta = \sup_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,s}$, *где*

$$\psi(\delta) \equiv \delta\cdot\Gamma\cdot\left\{\left(1+\|u^0\|_{2,s}^2\right) + \|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|_r\left(2+\|u^0\|_{2,s}\right) + \|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\|_k\left(1+\|u^0\|_{2,s}^2\right)\right\},$$

$$\phi(\delta,\alpha(\delta)) \equiv \mathbf{C}_2\delta + \sqrt{\mathbf{C}_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)K(\delta)} \le \mathbf{C}_2\delta + \sqrt{\mathbf{C}_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)K},$$

$$K(\delta) \equiv J_0^\delta\left[u^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\right] - J_0^0[u^0] - \delta\cdot\Gamma\cdot\left(1+\|u^0\|_{2,s}^2\right), \quad \delta\in(0,\delta_0];$$

$$\mathbf{C}_1 \equiv (3/2)\Gamma, \quad \mathbf{C}_2 \equiv \sqrt{2}\mathbf{C}_1\cdot\left(1+\|u^0\|_{2,s}^2\right),$$

а $K > 0$ – *величина, ограничивающая снизу значения* $J_0^\delta[u]$ *для всех* $u\in\mathcal{D}$, $\delta\in[0,\delta_0]$. *Одновременно имеет место оценка*

$$\delta\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|_k^2 + \|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\|_r^2} = \frac{\delta}{\alpha(\delta)}\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|_k^2 + \|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}\|_r^2} \le$$
$$\le \frac{\delta}{\alpha(\delta)}\left(\mathbf{C}_2\delta + \sqrt{\mathbf{C}_2^2\delta^2 - 8\alpha(\delta)\left\{K - J_0^0[u^0] - \Gamma\delta\left(1+\|u^0\|_{2,s}^2\right)\right\}}\right).$$

Теорема 4.2. Регуляризованный принцип Лагранжа для задачи (OC^0). *МПР в задаче* (OC^0) *существует тогда и только тогда, когда существуют стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел* $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ *и последовательность пар векторов двойственных переменных* $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{R}^r\times\mathbf{R}_+^k$ *такие, что*

$$\delta^j\left\|\{\lambda^j,\mu^j\}\right\|_{k+r} \to 0 \quad \textit{при} \quad j\to\infty \tag{4.1}$$

и выполняются включения

$$u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]\in\mathcal{D}^{\delta^j,\gamma^j}\quad (j=1,2,\ldots),\tag{4.2}$$

а также предельное соотношение

$$\left\langle\lambda^j, I^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]\right]-d^{\delta^j}\right\rangle_r+\left\langle\mu^j, J^{\delta^j}\left[u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]\right]\right\rangle_k\to 0\quad \text{при}\quad j\to\infty.\tag{4.3}$$

Если указанные последовательности $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ *и* $\{\lambda^j,\mu^j\}_{j=1}^\infty$ *существуют, то последовательность* $u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]$, $j=1,2,\ldots$, *является МПР задачи* (OC^0), *т.е. помимо* (4.2) *выполняется и предельное соотношение*

$$J_0^0\left[u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]\right]\to J_0^0[u^0]\quad \text{при}\quad j\to\infty.$$

Как следствие соотношений (4.1)–(4.3) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^j,\mu^j)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}_+^k}V^0(\lambda,\mu)=J_0^0[u^0]\quad \text{при}\quad j\to\infty.$$

В случае субдифференцируемости J_0^0 *на* $\mathcal{D}$ *имеет место и предельное соотношение*

$$\left\|u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]-u^0\right\|_{2,s}\to 0\quad \text{при}\quad j\to\infty.\tag{4.4}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) *задача, алгоритм* $R(\cdot,\delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathrm{f}^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]$ *для каждого набора исходных данных* f^{δ^j}, удовлетворяющих оценкам (2.5), (2.6) *условий Б, В при* $\delta=\delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения* 2.1, *причем в случае субдифференцируемости* J_0^0 *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (4.4). *Если же такой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, можно гарантировать лишь слабую сходимость* $u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]$ *к* u^0 *при* $\delta^j\to 0$, $j\to\infty$.

В качестве конкретной последовательности $\{\lambda^j,\mu^j\}$, $j=1,2,\ldots$, *например, можно взять последовательность* $\{\lambda^{\delta^j,\alpha(\delta^j)},\mu^{\delta^j,\alpha(\delta^j)}\}$, $j=1,2,\ldots$, *о которой идет речь в теореме* 4.1.

Заметим, что в силу ограниченности $\mathcal{D}$ *условие* (4.2) *со стремящимися к нулю последовательностями положительных чисел* $\{\delta^j\}_{j=1}^\infty$, $\{\gamma^j\}_{j=1}^\infty$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j,]\in\mathcal{D}^{0,\tilde\gamma^j}$ $(j=1,2,\ldots)$ *для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел* $\{\tilde\gamma^j\}_{j=1}^\infty$.

Пользуясь свойством компактности единичной сферы пространства $\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k$ и переходя очевидным образом к пределу при $j\to\infty$ в соотношениях (4.2), (4.3), в случае субдифференцируемости J_0^0 на $\mathcal{D}$ получаем следующее классическое условие оптимальности в задаче (OC^0) в форме недифференциального принципа Лагранжа как следствие регуляризованного принципа Лагранжа теоремы 4.2.

Следствие 4.1. Пусть $u^0\in\mathcal{D}^0$ – оптимальное управление в задаче (OC^0). Тогда существует невырожденный набор множителей Лагранжа (ν,λ,μ), $\nu\ge 0$, $\lambda\in\mathbf{R}^r$, $\mu\in\mathbf{R}_+^k$, такой что выполняются соотношения

$$\nu J_0^0[u^0]+\left\langle\lambda, I^0[u^0]-d^0\right\rangle_r+\left\langle\mu, J^0[u^0]\right\rangle_k\le\nu J_0^0[u]+\left\langle\lambda, I^0[u]-d^0\right\rangle_r+\left\langle\mu, J^0[u]\right\rangle_k\quad\forall u\in\mathcal{D},$$

$$\mu_i J_i^0[u^0]=0\quad (i=1,\ldots,k).$$

4.2. О минимизации функции Лагранжа

Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближенного решения задачи (OC^0), а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимального управления является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$, $\{\lambda,\mu\}\in\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^k_+$, задачи (OC^δ)

$$L^\delta(u,\lambda,\mu)\to\min,\quad u\in\mathcal{D},\tag{4.5}$$

решение которой мы обозначили через $u^\delta[\lambda,\mu]$. От "качества" решения этой "простейшей" задачи напрямую зависит и "качество" решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Для упрощения изложения предположим, что при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функционалы $K^\delta[z]:L_2^m\to\mathbf{R}$, $M^\delta[u]:L_2^s\to\mathbf{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbf{R}$ $(i=1,\dots,k)$ дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u]:L_2^s\to\mathbf{R}$ $(i=0,1,\dots,k)$ и функционал Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$. В этом случае решение $u^\delta[\lambda,\mu]$ выпуклой задачи на минимум (4.5) удовлетворяет критерию минимума

$$L_u^{\delta\prime}(u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu)[u-u^\delta[\lambda,\mu]]\ge 0,\quad u\in\mathcal{D},\tag{4.6}$$

где $L_u^{\delta\prime}(\overline{u},\lambda,\mu)[.]$ – производная Фреше функционала $L^\delta(u,\lambda,\mu)$ по переменной u в точке $\overline{u}\in L_2^s$ при фиксированных λ,μ. Пусть $\Psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu](.)\in L_2^s$ – функция Рисса линейного непрерывного функционала $L_u^{\delta\prime}(\overline{u},\lambda,\mu)[.]\in(L_2^s)^*$. Критерий (4.6) можно записать в виде

$$\left\langle\Psi^\delta[u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu],u-u^\delta[\lambda,\mu]\right\rangle_{2,s}\ge 0,\quad u\in\mathcal{D}.\tag{4.7}$$

Найдем представление функции $\Psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu](t)$, $t\in\Pi$, в терминах приближения (OC^δ), $\delta>0$, к точной задаче оптимального управления (OC^0), а точнее – в терминах уравнения (2.7) и функционалов $K^\delta[z]$, $M^\delta[u]$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]$ $(i=1,\dots,k)$, $\mathcal{I}_j^\delta[z,u]$ $(j=1,\dots,r)$, $\delta>0$. Непосредственно из (2.8), (2.10) и (3.2) следует, что в терминах (OC^δ) производную $L_u^{\delta\prime}(\overline{u},\lambda,\mu)$ можно записать в виде

$$\begin{gathered}L_u^{\delta\prime}(\overline{u},\lambda,\mu)[v]=K_z^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta)S^\delta B^\delta[v]+M_u^{\delta\prime}(\overline{u})[v]+\\+\sum_{i=1}^k\mu_i\mathcal{J}_{i\,z}^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta,\overline{u})S^\delta B^\delta[v]+\sum_{i=1}^k\mu_i\mathcal{J}_{i\,u}^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta,\overline{u})[v]+\\+\sum_{i=1}^r\lambda_i\left\langle a_i^\delta,S^\delta B^\delta v\right\rangle_{2,m}+\sum_{i=1}^r\lambda_i\left\langle b_i^\delta,v\right\rangle_{2,s},\quad v\in L_2^s,\quad\overline{u}\in L_2^s.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Пусть $\Gamma^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^m$, $\Upsilon^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^s$, $\Theta_i^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^m$, $\Xi_i^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^s$, $\Lambda_j^\delta(.)\in L_2^m$ – функции Рисса функционалов $K_z^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta)S^\delta\in(L_2^m)^*$, $M_u^{\delta\prime}(\overline{u})\in(L_2^s)^*$, $\mathcal{J}_{i\,z}^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta,\overline{u})S^\delta\in(L_2^m)^*$, $J_{i\,u}^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta,\overline{u})\in(L_2^s)^*$, $\left\langle a_j^\delta,S^\delta[.]\right\rangle_{2,m}\in(L_2^m)^*$ $(i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,r)$ соответственно. Формулу (4.8) перепишем следующим образом:

$$L_u^{\delta\prime}(\overline{u},\lambda,\mu)[v]=-\left\langle\psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu],B^\delta[v]\right\rangle_{2,m}+\left\langle\phi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu],v\right\rangle_{2,s},\quad v\in L_2^s,\tag{4.9}$$

$$\psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu]\equiv-\Gamma^\delta[\overline{u}]-\sum_{i=1}^k\mu_i\Theta_i^\delta[\overline{u}]-\sum_{j=1}^r\lambda_j\Lambda_j^\delta,\tag{4.10}$$

$$\phi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu]\equiv\Upsilon^\delta[\overline{u}]+\sum_{i=1}^k\mu_i\Xi_i^\delta[\overline{u}]+\sum_{j=1}^r\lambda_j b_j^\delta.\tag{4.11}$$

Пусть $\Phi^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^m$ и $\Omega_i^\delta[\overline{u}](.)\in L_2^m$ – функции Рисса функционалов $K_z^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta)\in(L_2^m)^*$ и $\mathcal{J}_{i\,z}^{\delta\prime}(S^\delta B^\delta\overline{u}+S^\delta c^\delta,\overline{u})\in(L_2^m)^*$ $(i=1,\dots,k)$ соответственно. По определению сопряженного оператора имеем $\Gamma^\delta[\overline{u}]=(S^\delta)^*\Phi^\delta[\overline{u}]$, $\Theta_i^\delta[\overline{u}]=(S^\delta)^*\Omega_i^\delta[\overline{u}]$ $(i=1,\dots,k)$, $\Lambda_j^\delta=(S^\delta)^*a_j^\delta$ $(j=1,\dots,r)$. Так как $(S^\delta)^*\equiv((E-A^\delta)^{-1})^*=((E-A^\delta)^*)^{-1}=(E-(A^\delta)^*)^{-1}$ (см., например, [29, гл. VI, § 2, п. 7], [30, гл. I,

§ 5, п. 6]), где E – единичный оператор в L_2^m, то определяемая формулой (4.10) функция $\psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ есть (единственное в L_2^m) решение уравнения

$$\psi(t)-(A^\delta)^*[\psi](t)=-\Phi^\delta[\bar{u}](t)-\sum_{i=1}^{k}\mu_i\Omega_i^\delta[\bar{u}](t)-\sum_{j=1}^{r}\lambda_j a_j^\delta(t),\quad t\in\Pi,\quad \psi\in L_2^m, \tag{4.12}$$

правая часть которого записана в терминах задачи (OC^δ). Таким образом, из (4.9) получаем такое представление производной функционала Лагранжа $L_u^{\delta\prime}(\bar{u},\lambda,\mu)$ в терминах этой задачи:

$$L_u^{\delta\prime}(\bar{u},\lambda,\mu)[v]=\left\langle -(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]]+\phi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu],v\right\rangle_{2,s},\quad v\in L_2^s. \tag{4.13}$$

Первый сомножитель правой части (4.13) и дает искомое представление функции $\Psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ из формулы (4.7) в терминах задачи (OC^δ):

$$\Psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu](t)=-(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]](t)+\phi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu](t),\quad t\in\Pi, \tag{4.14}$$

где $\psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ – единственное в L_2^m решение (4.12), $\phi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ задается формулой (4.11), $\bar{u}\in L_2^s$.

4.3. Случай ограниченных управлений

Рассмотрим задачу оптимального управления (OC^0) в ситуации, когда допустимые управления принимают значения из некоторого ограниченного замкнутого и выпуклого множества $U\subset\mathbf{R}^s$ (т.е. $\mathcal{D}\equiv\{u(.)\in L_\infty^s : u(t)\in U,\ t\in\Pi\}$). В этом случае получаем из (4.7) критерий минимума функционала Лагранжа в виде следующего линеаризованного поточечного принципа максимума.

Лемма 4.1. *Функция* $\bar{u}(.)\in\mathcal{D}$ *является решением задачи* (4.5) *тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle\Psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu](t),\bar{u}(t)\right\rangle_s=\max_{w\in U}\left\langle\Psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu](t),w\right\rangle_s\quad \text{при почти всех}\ t\in\Pi, \tag{4.15}$$

где $\Psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ *задается формулой* (4.14), *в которой* $\psi^\delta[\bar{u},\lambda,\mu]$ – *решение сопряженного уравнения* (4.12).

Доказательство. Необходимость выполнения для решения $\bar{u}$ задачи (4.5) условия (4.15) доказывается простейшим игольчатым варьированием, а достаточность получается стандартным применением теоремы А.А. Ляпунова (см., например, [31, § 2.4, § 8.2]).

Обозначим через $U_m^\delta[\lambda,\mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости) принципу максимума леммы 4.1. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество $U_m^\delta[\lambda,\mu]$ состоит из одного элемента, обозначим его через $u_m^\delta[\lambda,\mu]$, и справедливо равенство $u_m^\delta[\lambda,\mu]=u^\delta[\lambda,\mu]$. То есть непосредственным следствием теоремы 4.2 и леммы 4.1 является регуляризованный ПМП для задачи (OC^0).

Теорема 4.3. Регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0). *При сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости все утверждения теоремы* 4.2 *останутся справедливыми, если в них* $u^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]$ *заменить везде на* $u_m^{\delta^j}[\lambda^j,\mu^j]$.

5. ПРИМЕРЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В КОНКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению II рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегродифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [25] (см. также обзор в [27]). Из огромного множества самых различных подобных начально-краевых задач мы для иллюстрации изложенной выше теории выбрали две: начальную задачу для системы с запаздыванием и начально-краевую задачу для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. В конце каждого примера выписываются те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция, сопряженное уравнение, ...). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО – конкретные реализации теорем 4.1, 4.2, 4.3 читателю не составит большого труда.

Пример 1. Оптимизационная задача с терминальными ограничениями для системы с запаздыванием. Пусть $n = 1$, $\Pi = [0,1]$; $\rho \in (0,1)$ – фиксированное число; $\eta \in \mathbf{R}^m$ – фиксированный вектор; $\alpha(.), \beta(.) \in L_2^{m\times m}$, $\gamma(.) \in L_\infty^{m\times s}$, $\xi(.) \in L_\infty^m[-\rho,0]$ – фиксированные функции. Рассмотрим начальную задачу для линейной управляемой системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом ($x(.)$ – это m-вектор-функция)

$$\dot{x} = \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t-\rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0,1]; \tag{5.1}$$

$$x(t) = \xi(t), \quad t \in [-\rho, 0); \quad x(0) = \eta, \tag{5.2}$$

где $u(.) \in L_2^s$ – управление. Решение начальной задачи (5.1), (5.2) понимаем как решение в смысле "почти всюду" из пространства $(W_2^1[0,1])^m$ абсолютно непрерывных функций, рассматривая первое из условий (5.2) как требуемое в (5.1) условие доопределения $x(t)$ слева от $t = 0$: $x(t-\rho) = \xi(t-\rho)$ при $t - \rho < 0$. Приведем задачу (5.1), (5.2) к эквивалентному уравнению вида (2.1), показав тем самым, что каждому $u(.) \in L_2^s$ отвечает единственное в классе W функций $x(.) \in (W_2^1[0,1])^m$, удовлетворяющих второму условию (5.2), решение этой задачи. Для этого сделаем в (5.1), (5.2) замену по формуле

$$x(t) = \eta + \int_0^t z(\zeta)d\zeta, \quad t \in [0,1], \tag{5.3}$$

устанавливающей взаимно однозначное соответствие между классом W функций $x(.)$ и пространством L_2^m функций $z(.)$. "Подставляя" (5.3) в (5.1) (с учетом при $t \in [0,\rho)$ первого условия (5.2)), получаем

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t)\int_0^t z(\zeta)d\zeta + \beta(t)\eta + \beta(t)\int_0^{t-\rho} z(\zeta)d\zeta + \gamma(t)u(t), \quad t \in [\rho,1], \tag{5.4}$$

$$z(t) = \alpha(t)\eta + \alpha(t)\int_0^t z(\zeta)d\zeta + \beta(t)\xi(t-\rho) + \gamma(t)u(t), \quad t \in [0,\rho). \tag{5.5}$$

Положим $\omega(t) \equiv \{\xi(t-\rho),\, t \in [0,\rho); \eta,\, t \in [\rho,1]\}$, $t \in [0,1]$; $\Sigma_1[z](t) \equiv \int_0^t z(\zeta)d\zeta$, $\Sigma_2[z](t) \equiv \equiv \left\{0_m, t \in [0,\rho]; \int_0^{t-\rho} z(\zeta)d\zeta, t \in (\rho,1]\right\}$, $z(.) \in L_2^m$, где 0_m – ноль в $\mathbf{R}^m$. Используя введенные обозначения, запишем систему (5.4), (5.5) в виде

$$\begin{gathered} z(t) = \alpha(t)\{\eta + \Sigma_1[z](t)\} + \beta(t)\{\omega(t) + \Sigma_2[z](t)\} + \gamma(t)u(t) \equiv \\ \equiv \{\alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t)\} + \gamma(t)u(t) + \{\alpha(t)\eta + \beta(t)\omega(t)\}, \quad t \in \Pi. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Уравнение (5.6) и есть уравнение вида (2.1), эквивалентное начальной задаче (5.1), (5.2). Здесь $\Pi \equiv [0,1]$; $A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t)$, $z(.) \in L_2^m$, $t \in \Pi$ (квазинильпотентность оператора $A[.] : L_2^m \to L_2^m$ легко проверяется, например, с помощью цепочечного признака [26]); $B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t)$, $u(.) \in L_2^s$, $t \in \Pi$; $c(t) \equiv \alpha(t)\eta + \beta(t)\omega(t)$, $t \in \Pi$. Если $x(.) \in W$ – решение задачи (5.1), (5.2) при некотором $u(.) \in L_2^s$, то связанная с $x(.)$ формулой (5.3) функция $z(.) \in L_2^m$ есть решение уравнения (5.6) при том же $u(.)$. И наоборот, если $z(.) \in L_2^m$ – решение уравнения (5.6) при данном

$u(.) \in L_2^s$, то функция $x(.)$, связанная с $z(.)$ формулой (5.3), есть решение класса W задачи (5.1), (5.2) при этом $u(.)$. Отвечающие управлению $u(.) \in L_2^s$ решения задачи (5.1)–(5.2) и уравнения (5.6) обозначим через x_u и z_u соответственно.

Пусть задано следующее: выпуклые функции $G_i(.) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, $i = 1,\dots,k$; векторы $\mathbf{a}_j \in \mathbf{R}^m$, $j = 1,\dots,r$; действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1,\dots,r$; выпуклое ограниченное и замкнутое множество $\mathcal{D}$ пространства L_2^s. Формулами $F_i[x] \equiv G_i(x(1))$, $i = 1,\dots,k$, и $Q_j[x] \equiv \langle \mathbf{a}_j, x(1)\rangle_m$, $j = 1,\dots,r$, для $x(.) \in (W_2^1[0,1])^m$ определены терминальные функционалы. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (5.1), (5.2) с минимизируемым целевым функционалом $F_0[u] \equiv \|u\|_{2,s}^2$, $u \in L_2^s$, при функциональных ограничениях

$$F_1[x] \le 0,\dots,F_k[x] \le 0, \quad Q_1[x] = \mathbf{d}_1,\dots,Q_r[x] = \mathbf{d}_r, \quad x \in (W_2^1[0,1])^m, \tag{5.7}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[u] \to \min, \quad F_i[x_u] \le 0 \quad (i = 1,\dots,k), \quad Q_j[x_u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{5.8}$$

Сделав в задаче (5.8) замену (5.3), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (5.6). При этом функциональные ограничения (5.7) преобразуются в ограничения

$$W_1[z] \le 0,\dots,W_k[z] \le 0, \quad E_1[z] = d_1,\dots,E_r[z] = d_r, \quad z \in L_2^m,$$

где $W_i[z] \equiv G_i\left(\eta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)$ $(i = 1,\dots,k)$ – выпуклые функционалы на L_2^m, $E_j[z] \equiv \langle \mathbf{a}_j, z\rangle_{2,m}$ $(j = 1,\dots,r)$ – линейные функционалы на L_2^m, $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j, \eta\rangle_m$ $(j = 1,\dots,r)$ – числа. Эту задачу оптимизации управляемой системы (5.6), эквивалентную задаче (5.8), запишем в виде

$$F_0[u] \to \min, \quad W_i[z_u] \le 0 \quad (i = 1,\dots,k), \quad E_j[z_u] = d_j \quad (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (2.4), здесь $J_0[u] \equiv F_0[u]$ $(K[z] \equiv 0,\ M[u] \equiv F_0[u])$; $J_i[u] \equiv \mathcal{G}_i[z_u,u] \equiv W_i[z_u]$ $(\mathcal{G}_i[z,u] \equiv W_i[z])$ $(i = 1,\dots,k)$; $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u,u] \equiv E_j[z_u]$ $(\mathcal{I}_j[z,u] \equiv E_j[z])$ $(j = 1,\dots,r)$.

Пусть $\mathrm{f} \equiv \{\eta,\alpha,\beta,\gamma,\xi; G_i (i = 1,\dots,k); \mathbf{a}_j, \mathbf{d}_j (j = 1,\dots,r)\}$ – набор входных данных задачи (5.8), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор $\mathrm{f}^0 \equiv \{\eta^0,\alpha^0,\beta^0,\gamma^0,\xi^0; G_i^0 (i = 1,\dots,k); \mathbf{a}_j^0, \mathbf{d}_j^0 (j = 1,\dots,r)\}$ нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами $\mathrm{f}^\delta \equiv \{\eta^\delta,\alpha^\delta,\beta^\delta,\gamma^\delta,\xi^\delta; G_i^\delta (i = 1,\dots,k); \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta (j = 1,\dots,r)\}$, $\delta \in (0,\delta_0]$ ($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями 1–3.

Условие 1. Функции $G_i^\delta(.) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0,\delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0,\delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

Заметим, что условие 1 выполняется, в частности, если функции $G_i^\delta(.) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0,\delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0,\delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^m$ (см., например, [32, теорема 8.2]).

Условие 2. Существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0,\delta_0]$ величины $\|\eta^\delta - \eta^0\|_m$, $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{2,m\times m}$, $\|\beta^\delta - \beta^0\|_{2,m\times m}$, $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{2,m\times s}$, $\|\xi^\delta - \xi^0\|_{L_\infty^m[-\rho,0]}$; $\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\|_m$, $|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0|$ $(j = 1,\dots,r)$ не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

Условие 3. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0,\delta_0]$ величина $|G_i^\delta(y) - G_i^0(y)|$ при $\|y\|_m \le l$ не превосходит величины $\mathbf{N}_1(l)\delta$ $(i = 1,\dots,k)$.

При любом $\delta \in [0,\delta_0]$ мы имеем управляемую начальную задачу

$$\dot{x} = \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t)x(t-\rho) + \gamma^\delta(t)u(t), \quad t \in [0,1]; \tag{5.9}$$

$$x(t) = \xi^\delta(t), \quad t \in [-\rho, 0); \quad x(0) = \eta^\delta, \tag{5.10}$$

набор функциональных ограничений

$$F_1^\delta[x] \le 0, \ldots, F_k^\delta[x] \le 0, \quad Q_1^\delta[x] = \mathbf{d}_1^\delta, \ldots, Q_r^\delta[x] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in (W_2^1[0,1])^m, \tag{5.11}$$

где $F_i^\delta[x] \equiv G_i^\delta(x(1))(i = 1,\ldots,k)$, $Q_j^\delta[x] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, x(1)\right\rangle_m$ $(j = 1,\ldots,r)$, и задачу оптимального управления

$$F_0[u] \to \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta] \le 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta] = \mathbf{d}_j^\delta \quad (j = 1,\ldots,r), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{5.12}$$

где $x_u^\delta(.)$ – отвечающее управлению $u(.)$ решение начальной задачи (5.9), (5.10).

Сделав в задаче (5.12) замену

$$x(t) = \eta^\delta + \int_0^t z(\zeta)d\zeta, \quad t \in [0,1],$$

получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \{\alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)\} + \gamma^\delta(t)u(t) + \{\alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)\}, \quad t \in \Pi, \tag{5.13}$$

где принято обозначение $\omega^\delta(t) \equiv \{\xi^\delta(t-\rho), t \in [0,\rho); \eta^\delta, t \in [\rho,1]\}$, $t \in \Pi$. При этом ограничения (5.11) преобразуются в функциональные ограничения

$$W_1^\delta[z] \le 0, \ldots, W_k^\delta[z] \le 0, \quad E_1^\delta[z] = d_1^\delta, \ldots, E_r^\delta[z] = d_r^\delta, \quad z \in L_2^m,$$

где $W_i^\delta[z] \equiv G_i^\delta\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)(i = 1,\ldots,k)$ – выпуклые функционалы на L_2^m, $E_j^\delta[z] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, z\right\rangle_{2,m}$ $(j = 1,\ldots,r)$ – линейные функционалы на L_2^m, $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \eta^\delta\right\rangle_m$ $(j = 1,\ldots,r)$. Эту задачу оптимизации системы (5.13) запишем в виде

$$F_0[u] \to \min, \quad W_i^\delta[z_u^\delta] \le 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad E_j^\delta[z_u^\delta] = d_j^\delta \quad (j = 1,\ldots,r), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{5.14}$$

где $z_u^\delta(.)$ – отвечающее управлению $u(.)$ решение уравнения (5.13).

Положив $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2[z](t)$, $t \in \Pi$, $z(.) \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u(.) \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\eta^\delta + \beta^\delta(t)\omega^\delta(t)$, $t \in \Pi$, переписываем уравнение (5.13) в форме (2.7). Задача (5.14) имеет вид (OC^δ), в данном случае $J_0^\delta[u] \equiv F_0[u]$ $(K^\delta[z] \equiv 0,\ M^\delta[u] \equiv F_0[u])$; $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u, u] \equiv W_i^\delta[z_u]$ $(\mathcal{J}_i^\delta[z,u] \equiv W_i^\delta[z])$ $(i = 1,\ldots,k)$; $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u, u] \equiv E_j^\delta[z_u]$ $(\mathcal{I}_j^\delta[z,u] \equiv E_j^\delta[z])$ $(j = 1,\ldots,r)$.

При сделанных относительно семейства задач (5.12), $\delta \in [0,\delta_0]$, предположениях семейство задач (5.14), $\delta \in [0,\delta_0]$, удовлетворяет условиям А–В. Действительно, условия А, Б получаются элементарными выкладками из предположений в условиях 1–3 и 2 соответственно. Чтобы доказать выполнение условия В, оценим при произвольных $l > 0$ и $z \in L_2^m$ таких, что $\|z\|_{2,m} \le l$, для $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $\delta \in [0,\delta_0]$ величину $\left|W_i^\delta[z] - W_i^0[z]\right| \equiv \left|G_i^\delta\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right) - G_i^0\left(\eta^0 + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)\right|$. Имеем

$$\begin{aligned}\left|W_i^\delta[z] - W_i^0[z]\right| \le &\left|G_i^\delta\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right) - G_i^0\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)\right| + \\ &+ \left|G_i^0\left(\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right) - G_i^0\left(\eta^0 + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right)\right|.\end{aligned} \tag{5.15}$$

В силу условия 3 и неравенства $\left\|\eta^\delta - \eta^0\right\|_m \le \mathbf{C}\delta$ из условия 2, первое слагаемое правой части (5.15) не превосходит величины $\mathbf{N}_1\left(l + \left\|\eta^0\right\|_m + \mathbf{C}\delta_0\right)\delta$. Функция $G_i^0 : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ липшицева на любом ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^m$. То есть существует неубывающая функция $\mu(.) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что $\left|G_i^0(y_1) - G_i^0(y_2)\right| \le \mu(\mathbf{l})\|y_1 - y_2\|_m$, если $\|y_1\|_m \le \mathbf{l}$, $\|y_2\|_m \le \mathbf{l}$. А так как

$$\left\|\eta^\delta + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right\|_m \le \left\|\eta^0 + \int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right\|_m + \left\|\eta^\delta - \eta^0\right\|_m, \quad \left\|\int_0^1 z(\zeta)d\zeta\right\|_m \le \|z\|_{2,m} \le l,$$

то второе слагаемое правой части (5.15) не больше величины $\mu\left(l + \mathbf{C}\delta + \left\|\eta^0\right\|_m\right)\left\|\eta^\delta - \eta^0\right\|_m$, не превосходящей величины $\mu\left(l + \mathbf{C}\delta_0 + \left\|\eta^0\right\|_m\right)\mathbf{C}\delta$. Таким образом, условие B выполняется с функцией $N_1(l) \equiv \mathbf{C}\cdot\mu\left(l + \mathbf{C}\delta_0 + \left\|\eta^0\right\|_m\right) + \mathbf{N}_1\left(l + \mathbf{C}\delta_0 + \left\|\eta^0\right\|_m\right)$, $l > 0$.

Предположив дополнительно, что функции $G_i^\delta, i = 1,\dots,k$, $\delta \in (0,\delta_0]$, гладкие, можем выписать для этого примера критерии (4.7) и (4.15) решения задачи (4.5). Прямые вычисления дают $\Phi^\delta[\overline{u}](t) \equiv 0$, $\phi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu](t) \equiv \Upsilon^\delta[\overline{u}](t) \equiv 2\overline{u}(t)$, $t \in \Pi$; $\Omega_i^\delta[\overline{u}](t) \equiv (G_i^{\delta\prime}(x_{\overline{u}}^\delta(1)))^*$, $t \in \Pi$ $(i = 1,\dots,k)$; $a_j^\delta(t) \equiv \mathbf{a}_j^\delta$, $t \in \Pi$ $(j = 1,\dots,r)$. По определению сопряженного оператора

$$(A^\delta)^*[\psi](t) \equiv \Sigma_1^*[(\alpha^\delta)^*\psi](t) + \Sigma_2^*[(\beta^\delta)^*\psi](t), \quad t \in \Pi, \quad \psi \in L_2^m,$$

где

$$\Sigma_2^*[y](t) \equiv \left\{\int_{t+\rho}^1 y(\zeta)d\zeta,\ 0 \le t \le 1-\rho;\ 0_m,\ 1-\rho < t \le 1\right\}, \quad \Sigma_1^*[y](t) \equiv \int_t^1 y(\zeta)d\zeta, \quad t \in \Pi, \quad y \in L_2^m.$$

То есть уравнение (4.12) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\psi(t) - \int_t^1 (\alpha^\delta(\zeta))^*\psi(\zeta)d\zeta = h^\delta[\overline{u},\lambda,\mu], \quad 1-\rho \le t \le 1,\\ \psi(t) - \int_t^1 (\alpha^\delta(\zeta))^*\psi(\zeta)d\zeta - \int_{t+\rho}^1 (\beta^\delta(\zeta))^*\psi(\zeta)d\zeta = h^\delta[\overline{u},\lambda,\mu], \quad 0 \le t \le 1-\rho,\end{gathered} \tag{5.16}$$

где

$$h^\delta[\overline{u},\lambda,\mu] \equiv \sum\nolimits_{i=1}^k \mu_i(G_i^{\delta\prime}(x_{\overline{u}}^\delta(1)))^* + \sum\nolimits_{j=1}^r \lambda_j\mathbf{a}_j^\delta.$$

Функция $\Psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu]$, формирующая критерии (4.7) и (4.15), которым удовлетворяет решение $u^\delta[\lambda,\mu]$ задачи (4.5), задается формулой

$$\Psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu](t) \equiv (\gamma^\delta(t))^*\,\psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu](t) + 2\overline{u}(t), \quad t \in \Pi,$$

где $\psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu]$ – решение сопряженного уравнения (5.16). Это уравнение вольтеррова типа. Единственное в L_2^m решение $\psi^\delta[\overline{u},\lambda,\mu]$ уравнения (5.16) абсолютно непрерывно на Π и принадлежит классу $(W_2^1(\Pi))^m$. Уравнение (5.16) эквивалентно системе уравнений

$$\dot\psi + (\alpha^\delta(t))^*\,\psi(t) = 0, \quad 1-\rho \le t \le 1; \quad \psi(1) = h^\delta[\overline{u},\lambda,\mu], \tag{5.17}$$

$$\dot\psi + (\alpha^\delta(t))^*\,\psi(t) + (\beta^\delta(t+\rho))^*\,\psi(t+\rho) = 0, \quad 0 \le t \le 1-\rho, \tag{5.18}$$

$$\psi(1-\rho) = \int_{1-\rho}^1 (\alpha^\delta(\zeta))^*\psi(\zeta)d\zeta + h^\delta[\overline{u},\lambda,\mu], \tag{5.19}$$

состоящей из задачи Коши (5.17) для обыкновенного дифференциального уравнения, рассматриваемого на отрезке $1-\rho \le t \le 1$, с условием Коши в точке $t = 1$, и начальной задачи (5.18), (5.19) для рассматриваемого на отрезке $0 \le t \le 1-\rho$ дифференциального уравнения с опережением (5.18), в которой условие (5.19) играет роль условия Коши в точке $t = 1-\rho$; требуемое в уравнениях (5.18) и (5.19) доопределение функции ψ справа от точки $t = 1-\rho$ обеспечивается задачей Коши (5.17).

Пример 2. Оптимизационная задача с интегральными ограничениями для интегродифференциального уравнения типа уравнения переноса. Пусть $n = 3$, $\Pi = [0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$. Рассмотрим на Π следующую краевую задачу для линейного интегродифференциального уравнения (краевая задача (5.20) подобна смешанной задаче для простейшего линейного нестационарного интегродифференциального уравнения переноса (см., например, [33]–[35])

$$\partial x/\partial t^1 + t^3 \cdot \partial x/\partial t^2 = \alpha(t)x(t) + \beta(t)\int_{-1}^{1} Y(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)d\zeta + \gamma(t)u(t), \quad t \in \Pi;$$
$$\begin{gathered} x(0,t^2,t^3) = \varphi(t^2,t^3), \quad 0 \le t^2 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 1; \\ x(t^1,0,t^3) = \psi_1(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad 0 \le t^3 \le 1; \\ x(t^1,1,t^3) = \psi_2(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 0, \end{gathered} \tag{5.20}$$

где α, β, γ, φ, ψ_1, ψ_2, Y – фиксированные измеримые по совокупности переменных и ограниченные скалярные функции, $u(.) \in L_2$ – управление. Левую часть уравнения (5.20) понимаем как полную производную функции $x(.)$ по переменной t^1 вдоль характеристики дифференциального выражения, стоящего в левой части. Такую производную от $x(.)$ вдоль характеристики l будем обозначать $\partial x(.)/\partial l$. Пусть W – класс всех функций $x(.)$ из L_2, абсолютно непрерывных вдоль почти любой характеристики l и таких, что (перебирая все характеристики l, имеем) $\partial x(.)/\partial l \in L_2$. Функцию $x(.)$ из W назовем *решением* задачи (5.20), отвечающим управлению $u(.)$, если она почти везде (по линейной мере) на почти каждой l в Π удовлетворяет уравнению (5.20) и почти всюду удовлетворяет краевым условиям (5.20). Характеристика $l = l(\bar{t})$, проходящая через точку $\bar{t} = \{\bar{t}^1,\bar{t}^2,\bar{t}^3\}$, задается уравнениями $\{t^1 = \xi, t^2 = \bar{t}^2 + \bar{t}^3(\xi - \bar{t}^1), t^3 = \bar{t}^3\}$, где ξ – параметр. Она обязательно пересекает границу Π в одной из тех ее частей, где или $t^1 = 0$, или $t^2 = 0$, $t^3 > 0$, или $t^2 = 1$, $t^3 < 0$; значение t^1 в соответствующей точке пересечения обозначим через $\nu(\bar{t})$. Из краевых условий (5.20) следует, что $x\left(\nu(\bar{t}),\bar{t}^2 + \bar{t}^3(\nu(\bar{t}) - \bar{t}^1),\bar{t}^3\right) = \theta(\bar{t})$, где

$$\theta(\bar{t}) \equiv \begin{cases} \varphi(\bar{t}^2 - \bar{t}^3\bar{t}^1,\bar{t}^3), & \text{если} \quad \nu(\bar{t}) = 0; \\ \psi_1(\bar{t}^1 - \bar{t}^2/\bar{t}^3,\bar{t}^3), & \text{если} \quad \nu(\bar{t}) > 0, \quad \bar{t}^3 > 0; \\ \psi_2(\bar{t}^1 + (1-\bar{t}^2)/\bar{t}^3,\bar{t}^3), & \text{если} \quad \nu(\bar{t}) > 0, \quad \bar{t}^3 < 0, \end{cases} \tag{5.21}$$

$\bar{t} \in \Pi$. Формула

$$x(t) = \theta(t) + \Sigma_1[z](t), \quad t \in \Pi, \tag{5.22}$$

где

$$\Sigma_1[z](t) \equiv \int_{\nu(t)}^{t^1} z(\xi,t^2 + t^3(\xi - t^1),t^3)d\xi,$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классом L_2 функций $z(.)$ и классом удовлетворяющих краевым условиям (5.20) функций $x(.)$ из W. Задача (5.20) заменой (5.22) сводится к эквивалентному функциональному уравнению (2.1), в котором $n = 3$, $m = 1$, $s = 1$, $\Pi = [0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$;

$$B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t), u(.) \in L_2, t \in \Pi; \quad A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma_1[z](t) + \beta(t)\Sigma_2[z](t),$$

$$\Sigma_2[z](t) \equiv \int_{-1}^{1}\left\{Y(\zeta;t)\int_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1} z(\xi,t^2 + \zeta(\xi - t^1),\zeta)d\xi\right\}d\zeta, \quad z(.) \in L_2, \quad t \in \Pi;$$

$$c(t) \equiv \alpha(t)\theta(t) + \beta(t)\int_{-1}^{1} Y(\zeta;t)\theta(t^1,t^2,\zeta)d\zeta, \quad t \in \Pi.$$

Так как ЛОО $A[.]: L_2 \to L_2$ квазинильпотентен (это простое следствие признака [26]), то указанное уравнение (2.1), а вместе с ним и краевая задача (5.20), имеет единственное решение для любого $u(.) \in L_2$. Отвечающее управлению $u(.) \in L_2$ решение $x_u(.)$ задачи (5.20) связано с соответствующим решением $z_u(.)$ уравнения (2.1) формулой (5.22).

Пусть заданы: выпуклые функции $G_0(y): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G_i(y,w): \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,\dots,k$; функции $\mathbf{a}_j(.) \in L_2$ и $\mathbf{b}_j(.) \in L_2$, действительные числа $\mathbf{d}_j$, $j = 1,\dots,r$. Формулами $F_0[x,u] \equiv G_0\left(\int_\Pi x(t)dt\right) + \|u\|_{2,1}^2$, $F_i[x,u] \equiv G_i\left(\int_\Pi x(t)dt, \int_\Pi u(t)dt\right)$, $Q_j[x,u] \equiv \langle \mathbf{a}_j(.), x(.)\rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j(.), u(.)\rangle_{2,1}$ при $i = 1,\dots,k$, $j = 1,\dots,r$ для $x(.) \in W$, $u(.) \in L_2$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ — выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (5.20) с минимизируемым целевым функционалом $F_0[x,u]$ при функциональных ограничениях

$$F_1[x,u] \le 0, \dots, F_k[x,u] \le 0, \quad Q_1[x,u] = \mathbf{d}_1, \dots, Q_r[x,u] = \mathbf{d}_r, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \tag{5.23}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$. Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u,u] \to \min, \quad F_i[x_u,u] \le 0 \quad (i = 1,\dots,k), \quad Q_j[x_u,u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{5.24}$$

Сделав в задаче (5.24) замену (5.22), получим эквивалентную задачу оптимизации соответствующей управляемой системы (2.1). При этом минимизируемый функционал принимает вид $W_0[z,u] \equiv F_0[\theta + \Sigma_1[z], u]$, $z(.) \in L_2, u(.) \in L_2$, а функциональные ограничения (5.23) преобразуются в ограничения

$$W_1[z,u] \le 0, \dots, W_k[z,u] \le 0, \quad E_1[z,u] = d_1, \dots, E_r[z,u] = d_r, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

где $W_i[z,u] \equiv F_i[\theta + \Sigma_1[z], u]$ $(i = 1,\dots,k)$ — выпуклые функционалы на $L_2 \times L_2$, $E_j[z,u] \equiv \langle \mathbf{a}_j, \Sigma_1[z]\rangle_{2,1} + \langle \mathbf{b}_j, u\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\dots,r)$ — линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $d_j \equiv \mathbf{d}_j - \langle \mathbf{a}_j, \theta\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\dots,r)$. Полученную задачу оптимизации управляемой системы (2.1), эквивалентную задаче (5.24), запишем в виде

$$W_0[z_u,u] \to \min, \quad W_i[z_u,u] \le 0 \quad (i = 1,\dots,k), \quad E_j[z_u,u] = d_j \quad (j = 1,\dots,r), \quad u \in \mathcal{D}.$$

Это задача вида (2.4), здесь $J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u,u] \equiv W_i[z_u,u]$ $(i = 0,1,\dots,k)$, $I_j[u] \equiv \mathcal{I}_j[z_u,u] \equiv E_j[z_u,u]$ $(j = 1,\dots,r)$, $K[z] \equiv G_0\left(\int_\Pi (\theta(t) + \Sigma_1[z](t))\,dt\right)$, $M[u] \equiv \|u\|_{2,1}^2$.

Пусть $\mathrm{f} \equiv \{\alpha, \beta, \gamma, Y, \varphi, \psi_1, \psi_2; G_i(i = 0,1,\dots,k); \mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j, \mathbf{d}_j(j = 1,\dots,r)\}$ — набор входных данных задачи (5.24), которые могут подвергаться возмущению, и точный набор

$$\mathrm{f}^0 \equiv \left\{\alpha^0, \beta^0, \gamma^0, Y^0, \varphi^0, \psi_1^0, \psi_2^0; G_i^0(i = 0,1,\dots,k); \mathbf{a}_j^0, \mathbf{b}_j^0, \mathbf{d}_j^0(j = 1,\dots,r)\right\}$$

нам не известен, но можно оперировать с приближенными наборами

$$\mathrm{f}^\delta \equiv \left\{\alpha^\delta, \beta^\delta, \gamma^\delta, Y^\delta, \varphi^\delta, \psi_1^\delta, \psi_2^\delta; G_i^\delta(i = 0,1,\dots,k); \mathbf{a}_j^\delta, \mathbf{b}_j^\delta, \mathbf{d}_j^\delta(j = 1,\dots,r)\right\}, \quad \delta \in (0, \delta_0]$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями.

Условие 4. Функции $G_0^\delta(.): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $G_i^\delta(.,.): \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(i = 1,\dots,k)$ выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве.

Условие 5. Существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что величины $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{\infty,1}$; $\|\beta^\delta - \beta^0\|_{\infty,1}$; $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{\infty,1}$; $\|Y^\delta - Y^0\|_{\infty,1}$; $\|\varphi^\delta - \varphi^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,1])}$; $\|\psi_1^\delta - \psi_1^0\|_{L_\infty([0,1]\times[0,1])}$; $\|\psi_2^\delta - \psi_2^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,0])}$; $\|\mathbf{a}_j^\delta - \mathbf{a}_j^0\|_{2,1}$, $\|\mathbf{b}_j^\delta - \mathbf{b}_j^0\|_{2,1}$, $|\mathbf{d}_j^\delta - \mathbf{d}_j^0|$ $(j = 1,\dots,r)$ при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

Условие 6. Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(.): \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ такая, что для каждого $\mathbf{l} > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)|$, $|G_i^\delta(y,w) - G_i^0(y,w)|$ $(i = 1,\dots,k)$ при $|y|, |w| \le \mathbf{l}$ не превосходят величины $\mathbf{N}_1(\mathbf{l})\delta$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\partial x/\partial t^1 + t^3 \cdot \partial x/\partial t^2 = \alpha^\delta(t)x(t) + \beta^\delta(t)\int_{-1}^{1} Y^\delta(\zeta;t)x(t^1,t^2,\zeta)d\zeta + \gamma^\delta(t)u(t), \quad t \in \Pi;$$

$$x(0,t^2,t^3) = \varphi^\delta(t^2,t^3), \quad 0 \le t^2 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 1;$$
$$x(t^1,0,t^3) = \psi_1^\delta(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad 0 \le t^3 \le 1;$$
$$x(t^1,1,t^3) = \psi_2^\delta(t^1,t^3), \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 0$$

(ее решение, отвечающее управлению $u(.) \in L_2$, обозначаем через x_u^δ), минимизируемый функционал $F_0^\delta[x,u] \equiv G_0^\delta\left(\int_\Pi x(t)dt\right) + \|u\|_{2,1}^2$, набор функциональных ограничений

$$F_1^\delta[x,u] \le 0, \ldots, F_k^\delta[x,u] \le 0, \quad Q_1^\delta[x,u] = \mathbf{d}_1^\delta, \ldots, Q_r^\delta[x,u] = \mathbf{d}_r^\delta, \quad x \in W, \quad u \in L_2, \tag{5.25}$$

где

$$F_i^\delta[x,u] \equiv G_i^\delta\left(\int_\Pi x(t)dt, \int_\Pi u(t)dt\right), \quad Q_j^\delta[x,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta(.), x(.)\right\rangle_{2,1} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta(.), u(.)\right\rangle_{2,1},$$

$i = 1,\ldots,k$, $j = 1,\ldots,r$, и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta,u] \to \min, \quad F_i^\delta[x_u^\delta,u] \le 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad Q_j^\delta[x_u^\delta,u] = \mathbf{d}_j \quad (j = 1,\ldots,r), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{5.26}$$

Сделав в задаче (5.26) подстановку

$$x(t) = \theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t), \quad t \in \Pi,$$

где $\theta^\delta(.)$ определяется формулой (5.21) с заменой φ, ψ_1, ψ_2 на φ^δ, ψ_1^δ, ψ_2^δ соответственно, получим эквивалентную задачу оптимизации системы (2.7), в которой $n = 3$, $m = 1$, $s = 1$, $\Pi = [0,1]\times[0,1]\times[-1,1]$; $B^\delta[u](t) \equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $u(.) \in L_2$, $t \in \Pi$;

$$A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma_1[z](t) + \beta^\delta(t)\Sigma_2^\delta[z](t),$$

$$\Sigma_2^\delta[z](t) \equiv \int_{-1}^{1}\left\{Y^\delta(\zeta;t)\int_{\nu(t^1,t^2,\zeta)}^{t^1} z(\xi, t^2 + \zeta(\xi - t^1),\zeta)d\xi\right\}d\zeta, \quad z(.) \in L_2, \quad t \in \Pi;$$

$$c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\theta^\delta(t) + \beta^\delta(t)\int_{-1}^{1} Y^\delta(\zeta;t)\theta^\delta(t^1,t^2,\zeta)d\zeta, \quad t \in \Pi.$$

При этом ограничения (5.25) преобразуются в ограничения

$$W_1^\delta[z,u] \le 0,\ldots,W_k^\delta[z,u] \le 0, E_1^\delta[z,u] = d_1^\delta,\ldots,E_r^\delta[z,u] = d_r^\delta, \quad z \in L_2, \quad u \in L_2,$$

где $W_i^\delta[z,u] \equiv F_i^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z],u]$ $(i = 1,\ldots,k)$ и $E_j^\delta[z,u] \equiv \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \Sigma_1[z]\right\rangle_{2,1} + \left\langle \mathbf{b}_j^\delta, u\right\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\ldots,r)$ — соответственно выпуклые и линейные функционалы на $L_2 \times L_2$, $d_j^\delta \equiv \mathbf{d}_j^\delta - \left\langle \mathbf{a}_j^\delta, \theta^\delta\right\rangle_{2,1}$ $(j = 1,\ldots,r)$. Эту задачу оптимизации системы (2.7) запишем в виде

$$W_0^\delta[z_u^\delta,u] \to \min, \quad W_i[z_u^\delta,u] \le 0 \quad (i = 1,\ldots,k), \quad E_j[z_u^\delta,u] = d_j^\delta \quad (j = 1,\ldots,r), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{5.27}$$

где $W_0^\delta[z,u] \equiv F_0^\delta[\theta^\delta + \Sigma_1[z],u]$. Задача (5.27) имеет вид (OC^δ), здесь $J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_i^\delta[z_u^\delta,u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta,u]$ $(i = 0,1,\ldots,k)$, $I_j^\delta[u] \equiv \mathcal{I}_j^\delta[z_u^\delta,u] \equiv E_j^\delta[z_u^\delta,u]$ $(j = 1,\ldots,r)$, $K^\delta[z] \equiv G_0^\delta\left(\int_\Pi(\theta^\delta(t) + \Sigma_1[z](t))dt\right)$, $M^\delta \equiv M$.

При сделанных относительно семейства задач (5.26), $\delta \in [0, \delta_0]$, предположениях семейство задач (5.27), $\delta \in [0, \delta_0]$, удовлетворяет условиям А–В. Действительно, условия А и Б получаются элементарными выкладками из предположений в условиях 4–6 и 5 соответственно. Чтобы доказать выполнение условия B, оценим величину $\left|J_i^\delta[z,u]-J_i^0[z,u]\right| \equiv \left|W_i^\delta[z,u]-W_i^0[z,u]\right|$ при произвольных $u(.)\in\mathcal{D}$, $l>0$ и $z(.)\in L_2$ таких, что $\|z\|_{2,1}\le l$, для $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, $\delta\in[0,\delta_0]$. Она не превосходит суммы

$$\left|F_i^\delta[\theta^\delta+\Sigma_1[z],u]-F_i^0[\theta^\delta+\Sigma_1[z],u]\right|+\left|F_i^0[\theta^\delta+\Sigma_1[z],u]-F_i^0[\theta^0+\Sigma_1[z],u]\right|. \quad (5.28)$$

Вследствие условия 5 величина $\left|\int_\Pi(\theta^\delta+\Sigma_1[z])dt\right|$ не превосходит числа $\sigma(\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0,\mathbf{C},\delta_0,l)\equiv$ $\equiv\max\left\{\|\varphi^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,0])},\|\psi_1^0\|_{L_\infty([0,1]\times[-1,1])},\|\psi_2^0\|_{L_\infty([0,1]\times[0,1])}\right\}+\mathbf{C}\delta_0+\|\Sigma_1\|l$, $\|\Sigma_1\|$ – норма ЛОО $\Sigma_1:L_2\to L_2$. Из этой оценки и условия 6 следует, что первое слагаемое (5.28) не больше $\delta\cdot\mathbf{N}_1\left(\max\left\{\sigma(\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0,\mathbf{C},\delta_0,l),\max_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,1}\right\}\right)$.

Функция $G_i^0:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ липшицева на любом ограниченном множестве. То есть существует неубывающая $\mu(.):\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ такая, что $\left|G_i^0(y_1,w_1)-G_i^0(y_2,w_2)\right|\le\mu(\mathbf{l})(|y_1-y_2|+|w_1-w_2|)$, если $|y_1|\le\mathbf{l}$, $|y_2|\le\mathbf{l}$, $|w_1|\le\mathbf{l}$, $|w_2|\le\mathbf{l}$. Следовательно, второе слагаемое правой части (5.28) не больше произведения $\mu\left(\max\left\{\sigma(\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0,\mathbf{C},\delta_0,l),\max_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,1}\right\}\right)\cdot\left|\int_\Pi(\theta^\delta-\theta^0)dt\right|$, второй сомножитель которого не превосходит числа $\mathbf{C}\delta$. Таким образом, условие B для функционалов $\mathcal{J}_1^\delta,\ldots,\mathcal{J}_k^\delta$, $0<\delta\le\delta_0$, выполняется с функцией

$$N_1(l)\equiv\mathbf{N}_1\left(\max\left\{\sigma(\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0,\mathbf{C},\delta_0,l),\max_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,1}\right\}\right)+\mathbf{C}\cdot\mu\left(\max\left\{\sigma(\varphi^0,\psi_1^0,\psi_2^0,\mathbf{C},\delta_0,l),l\right\}\right),$$

$l>0$. Аналогичные выкладки можно провести и для функционалов K^δ, $0<\delta\le\delta_0$.

Предположив дополнительно, что функции $G_i^\delta, i=0,1,\ldots,k$, $\delta\in(0,\delta_0]$, гладкие, можем выписать для данного примера критерии (4.7) и (4.15) решения задачи (4.5). Сопряженные к операторам $\Sigma_1:L_2\to L_2$ и $\Sigma_2^\delta:L_2\to L_2$ операторы имеют вид

$$\Sigma_1^*[z](t)=\int_{t^1}^{\rho(t)}z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),t^3)d\xi,$$

$$\Sigma_2^{\delta*}[z](t)=\int_{-1}^{1}\left\{\int_{t^1}^{\rho(t)}Y^\delta(t^3;\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),\zeta)z(\xi,t^2+t^3(\xi-t^1),\zeta)d\xi\right\}d\zeta,\qquad t\in\Pi,$$

$\rho(\overline{t})$ – значение переменной t^1 в точке пересечения характеристикой $l(\overline{t})$ той части границы Π, где либо $t^1=1$, либо $t^2=0$, $t^3<0$, либо $t^2=1$, $t^3>0$.

Введем следующие обозначения: $\eta_\delta(\overline{u})\equiv\int_\Pi x_{\overline{u}}^\delta(\zeta)d\zeta$, $\eta(\overline{u})\equiv\int_\Pi\overline{u}(\zeta)d\zeta$. Непосредственно вычисляя, получаем $\Phi^\delta[\overline{u}](t)\equiv\Sigma_1^*[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\overline{u}))](t)$, $\Upsilon^\delta[\overline{u}](t)\equiv 2\overline{u}(t)$,

$$\Omega_i^\delta[\overline{u}](t)\equiv\Sigma_1^*[G_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\overline{u}),\eta(\overline{u}))](t)\qquad(i=1,\ldots,k),$$

$\Xi_i^\delta[\overline{u}](t)\equiv G_{iw}^{\delta/}(\eta_\delta(\overline{u}),\eta(\overline{u}))$ $(i=1,\ldots,k)$, $t\in\Pi$; $b_j^\delta\equiv\mathbf{b}_j^\delta$ $(j=1,\ldots,r)$; $a_j^\delta\equiv\Sigma_1^*[\mathbf{a}_j^\delta]$ $(j=1,\ldots,r)$. То есть сопряженное уравнение (4.12) имеет вид

$$\begin{gathered}\psi(t)-\Sigma_1^*[\alpha^\delta\psi](t)-\Sigma_2^{\delta*}[\beta^\delta\psi](t)=-\Sigma_1^*[G_0^{\delta/}(\eta_\delta(\overline{u}))](t)-\\-\Sigma_1^*\left[\sum_{i=1}^k\mu_iG_{iy}^{\delta/}(\eta_\delta(\overline{u}),\eta(\overline{u}))+\sum_{j=1}^r\lambda_j\mathbf{a}_j^\delta\right](t),\qquad t\in\Pi,\end{gathered}\quad(5.29)$$

и является функциональным (интегральным) уравнением вольтеррова типа. Функция $\Psi^{\delta}[\overline{u},\lambda,\mu]$, формирующая критерии (4.7) и (4.15), которым удовлетворяет решение $u^{\delta}[\lambda,\mu]$ задачи (4.5), задается формулой

$$\Psi^{\delta}[\overline{u},\lambda,\mu](t) \equiv \gamma^{\delta}(t)\psi^{\delta}[\overline{u},\lambda,\mu](t) + 2\overline{u}(t) + \sum_{i=1}^{k}\mu_i G_{iw}^{\delta/}\left(\eta_{\delta}(\overline{u}),\eta(\overline{u})\right) + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j \mathbf{b}_j^{\delta}(t), \quad t \in \Pi,$$

где $\psi^{\delta}[\overline{u},\lambda,\mu]$ – решение уравнения (5.29). Единственное в L_2 решение этого уравнения принадлежит классу W. Уравнение (5.29) эквивалентно краевой задаче

$$\partial\psi/\partial t^1 + t^3 \cdot \partial\psi/\partial t^2 = -\alpha^{\delta}(t)\psi(t) - \int_{-1}^{1} Y^{\delta}(t^3;t^1,t^2,\zeta)\beta^{\delta}(t^1,t^2,\zeta)\psi(t^1,t^2,\zeta)d\zeta +$$
$$+ G_0^{\delta/}\left(\eta_{\delta}(\overline{u})\right) + \sum_{i=1}^{k}\mu_i G_{iy}^{\delta/}\left(\eta_{\delta}(\overline{u}),\eta(\overline{u})\right) + \sum_{j=1}^{r}\lambda_j \mathbf{a}_j^{\delta}(t), \quad t \in \Pi;$$
$$\psi(1,t^2,t^3) = 0, \quad 0 \le t^2 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 1;$$
$$\psi(t^1,1,t^3) = 0, \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad 0 \le t^3 \le 1;$$
$$\psi(t^1,0,t^3) = 0, \quad 0 \le t^1 \le 1, \quad -1 \le t^3 \le 0,$$

интегродифференциальное уравнение которой получается из (5.29) дифференцированием вдоль характеристик, а краевые условия – подстановками соответствующих значений независимых переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
2. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986.
3. *Гамкрелидзе Р.В.* Математические работы Л.С. Понтрягина. Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 31 августа–6 сентября 1998 г.). Том I. Оптимальное управление. 1998. Т. 60. С. 5–23.
4. *Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006.
5. *Гамкрелидзе Р.В.* История открытия принципа максимума Понтрягина // Труды матем. ин-та РАН. 2019. Т. 304. С. 7–14.
6. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011.
7. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
8. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296.
9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
10. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
11. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
12. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
13. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra // Bull. Calcutta Math. Soc. 1929. V. 20. P. 31–48 (Opere scelte 4, 198–212).
14. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.
15. *Забрейко П.П.* Об интегральных операторах Вольтерра // Успехи матем. наук. 1967. Т. 22. Вып. 1. С. 167–168.
16. *Corduneanu C.* Integral equations and applications. Cambridge.: Cambridge Univ. Press, 1991.
17. *Шрагин И.В.* Абстрактные операторы Немыцкого – локально определенные операторы // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 47–49.

18. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
19. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 9. С. 1599–1605.
20. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1967.
21. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983.
22. *Гусаренко С.А.* Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1046–1049.
23. *Väth M.* Abstract Volterra equations of the second kind // J. Equat. Appl. 1998. V. 10. № 9. P. 125–144.
24. *Жуковский Е.С., Алвеш М.Ж.* Абстрактные вольтерровы операторы // Изв. вузов. Матем. 2008. № 3. С. 3–17.
25. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992.
26. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. ур-ния. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
27. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
28. *Сумин М.И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 252–269.
29. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
30. Функциональный анализ, серия Справочная математическая библиотека // Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
31. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
32. *Дмитрук А.В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс: Учебное пособие. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ; МАКС Пресс, 2012.
33. *Jorgens K.* An asymptotic expansion in the theory of neutron transport // Comm. Pure Appl. Math. 1958. V. 11. № 2. P. 219–242.
34. *Морозов С.Ф.* Нестационарное интегродифференциальное уравнение переноса // Изв. вузов. Матем. 1969. № 1. С. 26–31.
35. *Кузнецов Ю.А., Морозов С.Ф.* Корректность постановки смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 9. С. 1639–1648.