ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 166–174

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.634

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕРАВНОВЕСНОГО ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОМ СЛОЕ ОКОЛО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА[1)]

А. Л. Анкудинов

140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ФГУП ЦАГИ, Россия

e-mail: ankudin2@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.12.2019 г.
Переработанный вариант 27.07.2021 г.
Принята к публикации 16.09.2021 г.

Предложена математическая модель неравновесного (по внутренним и поступательным степеням свободы) обтекания равномерно вращающегося вокруг своей оси затупленного осесимметричного тела соосно направленным высокоскоростным потоком однокомпонентного многоатомного газа, основанная на известном приближении макрокинетического тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) для тел конечной толщины. Указано на важную корреляцию течения в рассмотренном кинетическом ТВУС с течением в навье-стоксовском ТВУС; корреляция позволяет существенным образом упростить учет неравновесности по внутренним и поступательным степеням свободы в обтекающем тело потоке, сводя кинетическую проблему к навье-стоксовской. Описан механизм построения решения кинетической задачи ТВУС вблизи вращающегося тела полностью на базе соответствующего решения для навье-стоксовского ТВУС. Получено, что учет кинетики неравновесного течения молекулярного газа в ТВУС около вращающегося тела не сказывается на трении и теплообмене на поверхности (эти данные совпадают для обеих – кинетической и навье-стоксовской – задач ТВУС). Показано, что решение для окрестности критической точки (т.е. вдоль нормали к поверхности в передней критической точке) в кинетическом ТВУС идентично с решением навье-стоксовского ТВУС для этой же области. Библ. 7.

Ключевые слова: гиперзвуковое двумерное течение, кинетический тонкий вязкий ударный слой, нетонкое затупленное осесимметричное тело, вращение тела вокруг оси, однокомпонентный многоатомный газ, неравновесность по внутренним и поступательным степеням свободы.

DOI: 10.31857/S0044466922010021

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Начиная от периода ранней гидроаэродинамики (см., например, [1]) и кончая современной аэротермодинамикой высоких скоростей (см., например, [2], [3]), проблеме обтекания вращающихся тел посвящено немалое количество работ, исследующих такого рода течения для различных условий, с разных позиций, в разных аспектах и постановках. Целью приводимого ниже анализа с использованием приближения гиперзвукового тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) является не решение востребованной практикой собственно задачи обтекания вращающегося нетонкого тела высокоскоростным потоком вязкого сжимаемого газа, но изучение таких важных, сопутствующих проблеме вопросов, как

1) корреляция течения в кинетическом ТВУС около вращающегося тела с течением в соответствующем навье-стоксовском ТВУС,

2) влияние учета неравновесности течения в ТВУС около вращающегося тела (учет осуществляется с применением кинетической ТВУС-модели обтекания) на характеристики обтекания его поверхности (т.е. на результат, получаемый в аналогичной задаче средствами навье-стоксовского приближения ТВУС).

Макроскопическая модель ТВУС, построенная на основе общего вида 13-моментных уравнений кинетической теории газов, была сформулирована для молекулярных (многоатомных) газов

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-08-00790А).

в [4] (см. также [7]); позднее для случая одноатомного газа – на основе кинетических, так называемых 13-моментных, уравнений Греда (см. [5], [6]).

Уравнения гиперзвукового кинетического ТВУС около нетонких осесимметричных тел, вращающихся вокруг оси, для случая многоатомного газа, согласно [4], имеют следующий вид:

$$\frac{\partial r\rho u}{\partial x}+\frac{\partial r\rho v}{\partial y}=0,$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}-\rho w^2\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial P_{22}}{\partial y}-\frac{\rho u^2}{R_1}-\frac{\rho w^2}{R_2}=0,$$

$$\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho uw\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial w}{\partial y}=0, \qquad (1)$$

$$\rho u\frac{\partial H}{\partial x}+\rho v\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial y}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[H+(\mathrm{Pr}-1)\frac{(u^2+w^2)}{2}\right]=0,$$

$$p=2\varepsilon\rho h,\quad \mu=\mu(h),\quad H=h+\frac{u^2+w^2}{2},$$

$$\frac{p}{P_{22}}=1+\frac{2}{3\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mu}{p}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{2}{3\alpha}\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mu}{p}\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

Условия на (неизвестной, вычисляемой) внешней границе ударного слоя y_e (т.е. при $y = y_e(x)$) следующие:

$$\rho v=\rho_\infty v_\infty,\quad \rho_\infty v_\infty(u-u_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$P_{22}=\rho_\infty v_\infty^2,\quad \rho_\infty v_\infty w=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$\rho_\infty v_\infty(H-H_\infty)=\frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{P_{22}}{p}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[H+(\mathrm{Pr}-1)\frac{(u^2+w^2)}{2}\right].$$

Условия на поверхности тела (т.е. при $y = 0$)

$$u=0,\quad w=\omega r,\quad H=H_w. \qquad (3)$$

Обезразмеривание переменных задачи

$$u=\frac{u^*}{U_\infty^*},\quad v=\frac{v^*}{U_\infty^*},\quad w=\frac{w^*}{U_\infty^*},\quad H=\frac{H^*}{U_\infty^{*2}},\quad p=\frac{p^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}},\quad h=\frac{h^*}{U_\infty^{*2}},\quad T=\frac{T^*}{(U_\infty^{*2}/c_p^*)},$$

$$x=\frac{x^*}{L^*},\quad y=\frac{y^*}{L^*},\quad \rho=\frac{\rho^*}{\rho_\infty^*},\quad \mu=\frac{\mu^*}{\mu_0^*},\quad r=\frac{r^*}{L^*},\quad P_{22}=\frac{P_{22}^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}},\quad R_1=\frac{R_1^*}{L^*},\quad R_2=\frac{R_2^*}{L^*}.$$

Для исходного представления задачи ТВУС в (1)–(3) используется связанная с поверхностью криволинейная ортогональная система координат, обычно применяемая в теории пограничного слоя, т.е. продольная координата x здесь отсчитывается вдоль образующей поверхности от носка тела (от передней критической точки), поперечная координата y отсчитывается вдоль нормали к поверхности тела.

Введем обозначения: u, v, w – компоненты скорости течения в продольном (x), поперечном (y) и азимутальном направлениях соответственно; ω – угловая скорость вращения тела; h, H – статическая и полная энтальпии соответственно; $\mathrm{Re} = U_\infty^* L^* \rho_\infty^*/\mu_0^*$ – число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = \mu^* c_p^*/\lambda^*$ – число Прандтля; L^* – характерный линейный размер; U_∞^*, ρ_∞^* – скорость и плотность в набегающем невозмущенном потоке; M_∞ – число Маха набегающего потока; p – давление; ρ — плотность; T — температура; T_0^* — температура торможения; γ — отношение удельных теплоемкостей, т.е. $\gamma = c_p^*/c_v^*$, где c_p^* и c_v^* — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно; $\varepsilon = (\gamma - 1)/2\gamma$; μ^* — коэффициент вязкости; μ_0^* — значение коэффициента вязкости μ^* при температуре торможения T_0^*; λ^* — коэффициент теплопроводности; α — отношение времен релаксации при упругих (τ_{el}) и неупругих (τ_{in}) столкновениях молекул газа, $\alpha = \tau_{el}/\tau_{in} = \alpha(T)$; R_1, R_2 — радиусы кривизны поверхности в продольном и азимутальном направлениях соответственно; rL^* — расстояние от оси симметрии тела до его поверхности; $P_{22} = p + p_{22}$, где $p_{22}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ — компонента девиаторной части тензора напряжений $p_{ij}\rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ при индексах 1, 2 и 3, ассоциируемых с продольным, поперечным и азимутальным направлениями соответственно; $q_i\rho_\infty^* U_\infty^{*3}$ — вектор теплового потока. Индексы характеризуют: e — внешнюю границу ТВУС, w — стенку, ∞ — набегающий (невозмущенный) поток. Индекс в виде звездочки $*$ относится к размерным величинам.

Модель (1)—(3) описывает течение газа около поверхности тела, обтекаемого высокоскоростным (гиперзвуковым) набегающим потоком. Модель построена в рамках концепции гиперзвукового двуслойного ТВУС около тел конечной толщины на базе моментных уравнений кинетической теории газов, т.е. при выводе модели течения газа в ударном слое (из полных общего вида макрокинетических моментных уравнений) использованы критерии приближения ТВУС. Считается, что газ многоатомный (молекулярный) и однокомпонентный (однородный). Предполагается быстрый (легкий, незатрудненный) обмен энергией между внутренними и поступательными степенями свободы частиц (молекул) газа, чему соответствует $\alpha = O(1)$, где α — отношение времен упругой и неупругой релаксации ($\alpha \sim 1$ означает равнопорядковость времен упругой и неупругой релаксации).

Укажем ряд присущих модели особенностей. Асимптотический анализ в [4] (по формулированию тонкослоевой версии макрокинетической моментной задачи) проводится на основе кинетического уравнения для газа с внутренними степенями свободы частиц, что обусловливает учет внутренних степеней свободы в моментном ТВУС-описании течения (такой учет весьма важен в случае молекулярных газов).

ТВУС-принцип интерпретации течения в ударном слое, примененный к общего вида полным кинетическим уравнениям моментов, позволил создать замкнутую систему уравнений, описывающую течение газа в макрокинетическом ТВУС (в то время, как полная общего вида моментная система содержит бесконечную, т.е. незамкнутую, цепочку уравнений для моментов функции распределения) — эффект тонкослоевого замыкания полной кинетической моментной системы в рамках приближения ТВУС (ТВУС-замыкание).

Модель дает возможность описывать течения молекулярного газа при условиях сильного нарушения равновесия по внутренним и поступательным степеням свободы молекул. В рассматриваемом варианте модель адаптирована к проблеме обтекания вращающегося тела.

Концепция ТВУС полагает $M_\infty \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon^{-1}M_\infty^{-2} \to 0$, что является общепринятыми критериями гиперзвуковых течений.

Идеология тонкости слоя (приближение ТВУС) заложена в предположении о малости отнесенных толщин как собственно ударного слоя, так и головного скачка уплотнения, сопоставленных с малостью параметра ε, а также в мотивированных допущениях об асимптотическом порядке основных потоковых величин, представляемых в виде разложения по малому параметру; модель композитно собирает главные члены во всех характерных областях ударного слоя.

Модель ТВУС ориентирована на диапазон режимов, характерных для переходной (от свободномолекулярной к континуальной) области течения и реализуемых при обтекании летательных объектов, движущихся с высокими скоростями на больших высотах $O(\varepsilon) \le \varepsilon K^2 \le O(1)$ по классификации из [5], [6], где $K^2 = \varepsilon\,\mathrm{Re}$ является одним из основных параметров приближения ТВУС (величина его определяет тип течения в ударном слое), представляющим собой комбинацию числа Кнудсена Kn ($\mathrm{Kn} = \mathrm{Re}^{-1}$ — важный критерий движения разреженных газов) и малого параметра ε теории тонкого слоя.

В указанных условиях (т.е. с ростом скоростей и высот полета) становятся некорректными традиционные приемы анализа течений, ориентированные на континуальные представления о среде обтекания (уравнения Навье—Стокса), поскольку ожидаемые эффекты, сопровождающие такие течения, не могут быть макроскопически описаны. Данные вопросы должны решаться в рамках молекулярно-кинетической теории газов с применением набора средств, позволяющих реализовать такой анализ. Среди этого набора должен быть прежде всего упомянут, как видимо наиболее соответствующий проблеме, метод прямого статистического моделирования. Однако метод прямого статистического моделирования, будучи по существу достаточно ограниченным в диапазоне применения и чрезвычайно трудоемким, не дает возможности быстрого анализа, малопригоден в практике инженерных приложений; используется он чаще для оценки адекватности и эффективности других подходов к проблематике.

ТВУС-версия макроскопического моментного способа анализа привлекает способностью рассматривать течения газа со значительной степенью неравновесности (т.е. при сильном отклонении от равновесия по внутренним и поступательным степеням свободы молекул) и широкой возможностью привлечения высокоразвитого вычислительного аппарата исследования континуальных течений. Соединение продвинутых континуальных вычислительных средств с кинетическим моментным описанием течения, использующим тонкослоевое замыкание моментной задачи (модель ТВУС), может представлять интерес как эффективный инструмент исследования переходных режимов.

Для большей обозримости структуры решения новой кинетической задачи ТВУС (имеется в виду количество и состав ее зависимых переменных) имеет смысл сопоставить ее с близкой к проблеме ТВУС общеизвестной задачей классического сжимаемого пограничного слоя. Кинетическая задача ТВУС имеет такой же (как в задаче пограничного слоя) набор вычисляемых в ходе ее решения аэротермодинамических величин плюс давление p (в пограничном слое величина p – привносимая функция от x, в ТВУС – вычисляемая функция от (x, y)) и плюс еще две дополнительные неизвестные: y_e и P_{22}. Первая из них $y_e = y_e(x)$ – величина отхода скачка – является компонентом решения и кинетического, и навье-стоксовского ТВУС, вторая же – величина P_{22} – появляется только в кинетической задаче ТВУС. Вместе с тем кинетический ТВУС имеет также и два дополнительных (по сравнению с пограничным слоем) соотношения в представлении задачи, что дает возможность найти еще и эти неизвестные (т.е. величины y_e и P_{22}). Этими дополнительными соотношениями являются $\rho v = \rho_\infty v_\infty$ (как краевое условие на внешней границе), присутствующее и в навье-стоксовском, и в кинетическом ТВУС, а также уравнение для (P_{22}/p) – только в кинетическом ТВУС (последнее соотношение в (1)).

Полное представление о гиперзвуковом приближении ТВУС можно получить из [4], [5] и ключевых статей, указанных в библиографиях этих работ.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Перейдем в рассматриваемой кинетической задаче ТВУС (1)–(3) к новым переменным, в качестве которых примем так называемые переменные Мизеса (x, ψ), где величина ψ есть обезразмеренная функция тока (т.е. $\psi = \psi^* / L^{*2}\rho_\infty^* U_\infty^*$), описываемая соотношениями

$$r\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad r\rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{4}$$

Для дальнейшего изложения будет удобно ввести переменные вида

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\psi_e}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{r}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{r}; \quad \psi_e = \frac{r^2}{2}, \tag{5}$$

где ψ_e (с точностью приближения ТВУС около нетонких тел) есть значение функции тока ψ на внешней границе ударного слоя.

В переменных (5) рассматриваемая кинетическая задача ТВУС перепишется следующим образом:

– уравнения

$$r\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{dr}{dx}\tilde{u} - 2\frac{dr}{dx}\tilde{\psi}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}} - \frac{1}{\tilde{u}}\tilde{w}^2\frac{dr}{dx} = \frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}},$$

$$2^{-1}r^2\frac{\tilde{u}^2}{R_1} + 2^{-1}r^2\frac{\tilde{w}^2}{R_2} = \tilde{u}\frac{\partial P_{22}}{\partial \tilde{\psi}},$$

$$r\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}+\frac{dr}{dx}\tilde{w}-2\frac{dr}{dx}\tilde{\psi}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}}+\tilde{w}\frac{dr}{dx}=\frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}},$$

$$r\frac{\partial H}{\partial x}-2\frac{dr}{dx}\tilde{\psi}\frac{\partial H}{\partial \tilde{\psi}}=\frac{2^2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}}\left[H+(\mathrm{Pr}-1)r^2\frac{(\tilde{u}^2+\tilde{w}^2)}{2}\right], \tag{6}$$

$$p=2\varepsilon\rho h;$$

$$\mu=\mu(h),\quad H=h+\frac{r^2\tilde{u}^2}{2},$$

$$\frac{p}{P_{22}}=1+\frac{2^3}{3\alpha}r^2\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mu\rho\tilde{u}}{p}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}}\right)^2+\frac{2^3}{3\alpha}r^2\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\mu\rho\tilde{u}}{p}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}}\right)^2;$$

– краевые условия задачи на внешней границе, т.е. при $\tilde{\psi}=1$,

$$\rho_\infty v_\infty\left(\tilde{u}-\frac{u_\infty}{r}\right)=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}},$$

$$\rho_\infty v_\infty\tilde{w}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}},\quad P_{22}=\rho_\infty v_\infty^2, \tag{7}$$

$$\rho_\infty v_\infty(H-H_\infty)=\frac{2}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial}{\partial \tilde{\psi}}\left[H+(\mathrm{Pr}-1)r^2\frac{(\tilde{u}^2+\tilde{w}^2)}{2}\right];$$

– краевые условия задачи на поверхности, т.е. при $\tilde{\psi}=0$,

$$\tilde{u}=0,\quad \tilde{w}=\omega,\quad H-H_w(x)=0. \tag{8}$$

СВЯЗЬ РЕШЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКОГО И НАВЬЕ-СТОКСОВСКОГО ТВУС

Заметим предварительно, что система уравнений (6) с краевыми условиями (7) и (8), рассматриваемая без последнего уравнения в (6) и с повсеместной формальной заменой в задаче (6)–(8) величины P_{22} на p (т.е. при задании $(P_{22}/p)=1$), описывает задачу навье-стоксовского ТВУС, представленную в переменных $(x,\tilde{\psi})$.

Система (6) кинетического ТВУС, будучи рассмотрена без последнего уравнения, вводящего величину p/P_{22}, оказывается замкнутой, и при граничных условиях (7), (8) имеет решение в виде набора функций u, w, H, P_{22}. Значит, эта часть решения кинетического ТВУС, т.е. блок величин (u, w, H, P_{22}), не зависит от того, как вводится в задаче величина p/P_{22}. И она, величина p/P_{22}, может быть описана, например, как $p/P_{22}=1$, без какого-либо влияния на (u, w, H, P_{22}).

В то же время, как указывалось ранее (в начале данного раздела), задача навье-стоксовского ТВУС может быть математически представлена, как и кинетический ТВУС, теми же равенствами (6)–(8), но после формальной замены последнего уравнения системы (6) соотношением $p/P_{22}=1$. Этот же блок функций (т.е. u, w, H, P_{22}), таким образом, составляет и решение для навье-стоксовского ТВУС.

Отсюда

$$(u,w,H,P_{22})_k=(u,w,H,P_{22})_n. \tag{9}$$

А так как в навье-стоксовском ТВУС величина $\dfrac{p}{P_{22}}=1$, то $(P_{22})_n=p_n$ и, следовательно, $(P_{22})_k=p_n$ (так как $(P_{22})_k=(P_{22})_n$).

Здесь (и далее) индекс k относится к решению задачи кинетического ТВУС, индекс n – к решению навье-стоксовской задачи ТВУС .

Связь же неохваченных в (9) величин давления p и плотности ρ, как решения кинетической задачи ТВУС, с соответствующими величинами навье-стоксовского ТВУС в результате задается равенствами

$$p_k=\theta p_n,\quad \rho_k=\theta\rho_n, \tag{10}$$

где

$$\theta \equiv 1 + \frac{2^3}{3\alpha} r^2 \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\mu\rho\tilde{u}}{p} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\psi}} \right)^2 + \frac{2^3}{3\alpha} r^2 \left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\mu\rho\tilde{u}}{p} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{\psi}} \right)^2. \tag{11}$$

Соотношения (10), (11) получаются из уравнений состояния для кинетической и навье-стоксовской задач ТВУС и последнего соотношения кинетической системы (6).

Важно, что утверждение, аналогичное (9), относится также к компонентам тензора напряжений p_{12}, p_{32} и составляющей q_2 вектора теплового потока соответственно для решений обеих (кинетической и навье-стоксовской) задач ТВУС. Эти величины (p_{12}, p_{32} и q_2) прежде всего отвечают за трение и тепловой поток на обтекаемой поверхности (последние же – пристеночные трение и тепловой поток – представляют основной интерес для практики).

Итак, еще помимо (9) имеют место равенства

$$(p_{12})_k = (p_{12})_n, \quad (p_{32})_k = (p_{32})_n, \quad (q_2)_k = (q_2)_n. \tag{12}$$

Равенства (12) следуют непосредственно из определений величин p_{12}, p_{32} и q_2, принимаемых в рамках приближения кинетического ТВУС (тонкослойной версии моментных уравнений кинетической теории газов). Выражения для этих величин в макрокинетическом ТВУС отличаются от их представления в навье-стоксовском ТВУС множителем P_{22}/p; например, для p_{12} в физических переменных будет $(p_{12})_k = (p_{12})_n \left(\frac{P_{22}}{p} \right)_k$. В переменных Мизеса величина p_{12} представится следующим образом:

– для навье-стоксовского ТВУС

$$-p_{12} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} r\rho u = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} r\rho u = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} ru \frac{\rho}{p} p;$$

– для кинетического ТВУС

$$-p_{12} = \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{P_{22}}{p} \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} r\rho u = \mu \frac{\partial u}{\partial \psi} ru \frac{\rho}{p} P_{22}.$$

Учитывая, что $\left(\frac{\rho}{p} \right)_k = \left(\frac{\rho}{p} \right)_n$ и $(P_{22})_k = (p)_n$, получаем $(p_{12})_k = (p_{12})_n$.

Аналогично выводятся и другие равенства в (12).

Для установления связи кинетического ТВУС-решения, полученного в переменных Мизеса $(x, \tilde{\psi})$, с физическими координатами (x, y), следует рассмотреть обращенное уравнение, вводящее в анализ задачи поперечную переменную Мизеса (см. (4)), т.е. уравнение вида

$$\frac{\partial y}{\partial \tilde{\psi}} = (2\rho_k \tilde{u})^{-1}, \quad y(\tilde{\psi} = 0) = 0. \tag{13}$$

Соотношения (9)–(12) дают возможность в переменных $(x, \tilde{\psi})$ полностью выстроить решение рассматриваемой кинетической задачи ТВУС на базе решения аналогичной задачи для навье-стоксовского ТВУС, а с присоединением к ним (т.е. к (9)–(12)) соотношения (13) – полностью выстроить решение кинетической задачи ТВУС на базе решения аналогичной задачи для навье-стоксовского ТВУС и в физических переменных (x, y).

Будучи рассмотрены при $\tilde{\psi} = 0$ (т.е. на линии, соответствующей поверхности обтекаемого тела) равенства, содержащиеся в формуле (12), свидетельствуют о том, что величины напряжения трения и теплового потока на поверхности совпадают с соответствующими величинами в аналогичном навье-стоксовском ТВУС. Таким образом, данные по трению и теплообмену на поверхности вращающегося тела при высокоскоростном неравновесном обтекании многоатомным газом могут быть получены непосредственно из результатов решения такой же задачи ТВУС (около вращающегося тела) в навье-стоксовском приближении. Такого же рода вывод (о совпадении результатов по трению и теплообмену на стенке в задачах кинетического и навье-стоксовского ТВУС) применительно к одноатомному газу (поступательная неравновесность) при использовании модели ТВУС, сформулированной на основе кинетических 13-моментных уравнений Греда, для общего вида задачи ТВУС (без вращения обтекаемого тела) был сделан в [5], [6].

Результат, показанный в (12), несет важную информацию общего свойства: учет кинетики высокоскоростного течения многоатомного газа в ТВУС не сказывается на таких важных характеристиках обтекания, как напряжение трения и тепловой поток на стенке.

Кинетическая задача ТВУС математически существенно усложнена по сравнению с навье-стоксовской задачей ТВУС (увеличение нелинейности коэффициентов перед старшей производной в основных уравнениях, усиление связей между уравнениями системы, дополнительная неизвестная функция). В то же время проблема навье-стоксовского ТВУС вычислительно хорошо освоена и апробирована (имеется большой опыт решения этой задачи и эффективный вычислительный аппарат). Таким образом, существование корреляции, реализуемой соотношениями (9)–(13) и позволяющей в полном объеме выстраивать кинетическое решение на базе навье-стоксовского ТВУС, существенно упрощает анализ кинетического ТВУС вблизи вращающегося тела.

Удобная для проведения вычислений форма (6)–(8) рассматриваемой задачи может быть квалифицирована как вычислительная математическая модель. Основные особенности (достоинства) данной модели (сравнение с исходной формой задачи): корреляционное свойство (корреляция с задачей навье-стоксовского ТВУС); сниженный высший порядок (производных) системы (2-й порядок взамен общепринятого 3-го: традиционное использование функции тока ψ в качестве зависимой переменной задачи повышает уровень высшей производной системы ТВУС из-за появления $\dfrac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$ взамен $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ вследствие связи (4)); уменьшенное количество неизвестных (из числа неизвестных исключается вычислительно неудобная величина отхода скачка); классическая краевая задача в заданной области независимых переменных (в исходной формулировке это задача с неизвестной границей).

ОКРЕСТНОСТЬ ЗАТУПЛЕНИЯ

В окрестности затупленного носка обтекаемого тела, т.е. при $x = 0$ (вдоль критической линии тока), кинетическая задача (6)–(8) примет следующий замкнутый вид (это замкнутая краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений в области независимых переменных $(x, \tilde\psi)$: $x = 0$, $0 \le \tilde\psi \le 1$):

– система уравнений

$$\frac{dr}{dx}\tilde u - 2\frac{dr}{dx}\tilde\psi\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde\psi} - \frac{1}{\tilde u}\tilde w^2\frac{dr}{dx} = \frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\tilde\psi}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde\psi},$$
$$\frac{\partial P_{22}}{\partial\tilde\psi} = 0,$$
$$\frac{dr}{dx}\tilde w - 2\frac{dr}{dx}\tilde\psi\frac{\partial\tilde w}{\partial\tilde\psi} + \tilde w\frac{dr}{dx} = \frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\tilde\psi}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial\tilde w}{\partial\tilde\psi}, \tag{14}$$
$$-2\frac{dr}{dx}\tilde\psi\frac{\partial H}{\partial\tilde\psi} = \frac{2^2}{\mathrm{Re\,Pr}}\frac{\partial}{\partial\tilde\psi}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial H}{\partial\tilde\psi},$$
$$p/P_{22} = 1;$$

– краевые условия на внешней границе при $\tilde\psi = 1$

$$\rho_\infty v_\infty\left(\tilde u - \frac{u_\infty}{r}\right) = \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial\tilde u}{\partial\tilde\psi},$$
$$P_{22} = \rho_\infty v_\infty^2;\quad \rho_\infty v_\infty\tilde w = \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial\tilde w}{\partial\tilde\psi}, \tag{15}$$
$$\rho_\infty v_\infty(H - H_\infty) = \frac{2}{\mathrm{Re\,Pr}}\frac{P_{22}}{p}\mu\rho\tilde u\frac{\partial H}{\partial\tilde\psi};$$

– краевые условия на стенке при $\tilde\psi = 0$

$$\tilde u = 0,\quad \tilde w = \omega,\quad H - H_w(x) = 0. \tag{16}$$

Уравнения (14) получены опусканием в (6) членов с продольной производной $\dfrac{\partial}{\partial x}$ от неизвестных функций, которые (члены) обнуляются при $x = 0$ вследствие $r(0) = 0$, где $r(x)$ – расстояние от оси обтекаемого тела до его поверхности; знак частной производной по $\tilde{\psi}$ в обыкновенных уравнениях системы (14)–(16) сохранен, чтобы подчеркнуть зависимость функций решения от обеих $(x, \tilde{\psi})$ переменных в полной области определения решения.

После исключения величины P_{22} (с учетом последнего уравнения системы (14)) кинетическая задача тонкого вязкого ударного слоя при $x = 0$ сводится к следующей:

– система уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{dr}{dx}\tilde{u} - 2\frac{dr}{dx}\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{\psi}} - \frac{1}{\tilde{u}}\tilde{w}^2\frac{dr}{dx} = \frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{\psi}},\\
\frac{\partial p}{\partial\tilde{\psi}} = 0,\\
\frac{dr}{dx}\tilde{w} - 2\frac{dr}{dx}\tilde{\psi}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{\psi}} + \tilde{w}\frac{dr}{dx} = \frac{2^2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{\psi}},\\
-2\frac{\partial r}{\partial x}\tilde{\psi}\frac{\partial H}{\partial\tilde{\psi}} = \frac{2^2}{\mathrm{Re\,Pr}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\psi}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial H}{\partial\tilde{\psi}};
\end{gathered}\tag{17}$$

– краевые условия на внешней границе при $\tilde{\psi} = 1$

$$\begin{gathered}
\rho_\infty v_\infty\left(\tilde{u} - \frac{u_\infty}{r}\right) = \frac{2}{\mathrm{Re}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{\psi}},\\
p = \rho_\infty v_\infty^2,\\
\rho_\infty v_\infty\tilde{w} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{\psi}},\\
\rho_\infty v_\infty(H - H_\infty) = \frac{2}{\mathrm{Re\,Pr}}\mu\rho\tilde{u}\frac{\partial H}{\partial\tilde{\psi}};
\end{gathered}\tag{18}$$

– краевые условия на стенке при $\tilde{\psi} = 0$

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{w} = \omega, \quad H - H_w(x) = 0. \tag{19}$$

Задача же (17)–(19) полностью идентична с задачей ТВУС (около вращающегося тела в окрестности критической точки $x = 0$), построенной для приближения Навье–Стокса. Специфически кинетическое (т.е. отсутствующее в навье-стоксовском ТВУС) уравнение, описывающее величину P_{22}, в переменных (x, ψ) при $x = 0$ выпадает и из кинетической постановки ТВУС.

Итак, рассматриваемая кинетическая проблема неравновесного ТВУС вблизи затупленного носка вращающегося тела свелась к хорошо исследованной (и успешно решаемой) чисто навье-стоксовской классической задаче тонкого вязкого ударного слоя.

Добавим, что из идентичности кинетического и навье-стоксовского решений тонкого вязкого ударного слоя вблизи затупленного носка следует и совпадение для этих двух задач соответственно величин теплового потока и напряжения трения (в последнем случае, точнее, речь идет о продольной производной от трения) в передней критической точке на стенке (наиболее интересных для практики параметров обтекания). Отсюда, в свою очередь, следует важный вывод, что эффекты неравновесности по внутренним и поступательным степеням свободы течения в окрестности критической точки затупленного тела себя не проявляют.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках приближения макрокинетического ТВУС построена удобная для численного анализа проблемы математическая модель неравновесного (по внутренним и поступательным степеням свободы) течения около вращающегося вокруг продольной оси затупленного осесимметричного тела, обтекаемого соосно направленным высокоскоростным потоком однокомпонентного многоатомного газа.

Указано на важную для практики исследования неравновесности корреляцию течения в кинетическом ТВУС около вращающегося тела с течением в навье-стоксовском ТВУС. Представлен принцип ее реализации.

Показано, что величины напряжения трения и теплового потока на поверхности вращающегося тела в задаче кинетического ТВУС совпадают с соответствующими величинами в аналогичной задаче для навье-стоксовского ТВУС, т.е. учет кинетики неравновесного течения молекулярного газа в ТВУС около вращающегося тела не оказывает влияния на трение и теплообмен на стенке.

Описан механизм построения решения новой сложной кинетической задачи ТВУС целиком на основе решения аналогичной, существенно более простой, апробированной задачи для навье-стоксовского ТВУС.

Показано, что решение рассматриваемой задачи кинетического ТВУС для окрестности передней критической точки затупленного тела идентично с решением навье-стоксовского ТВУС в этой же области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
2. *Марков А.А.* О влиянии вращения тела и внешней завихренности на теплообмен около критической точки затупленного тела в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1984. № 3. С. 179–182.
3. *Журавлева Г.С., Пилюгин Н.Н.* Гиперзвуковое обтекание вращающихся осесимметричных тел // Тр. 4-й Росс. нац. конф. по теплообмену. 2006. Т. 2. С. 112–115.
4. *Кузнецов М.М., Никольский В.С.* Кинетический анализ гиперзвуковых вязких течений многоатомного газа в тонком трехмерном ударном слое // Уч. зап. ЦАГИ. 1985. Т. 16. № 3. С. 38–49.
5. *Cheng H.K., Lee C.J., Wong E.Y., Yang H.T.* Hypersonic slip flows and issues on extending continuum model beyond the Navier–Stokes level // AIAA Paper. 1989. P. 89–1663.
6. *Cheng H.K., Wong E.Y., Dogra V.K.* A shock-layer theory based on thirteen-moment equations and DSMC calculations of rarefied hypersonic flows // AIAA Paper. 1991. P. 91–0783.
7. *Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С.* Реология течения разреженного газа в гиперзвуковом ударном и пограничном слоях // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2007. № 5. С. 189–196.