ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 12–22

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.853

УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОЙ МИНИМИЗАЦИИ С НЕРАВНОМЕРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫМ ГРАДИЕНТНЫМ МЕТОДОМ[1)]

© 2022 г. Л. А. Артемьева[1,*], А. А. Дряженков[1,], М. М. Потапов[1,***]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

**e-mail: artemieva.luda@gmail.com*

***e-mail: andrja@yandex.ru*

****e-mail: mmpotapovrus@gmail.com*

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.
Переработанный вариант 23.03.2021 г.
Принята к публикации 17.09.2021 г.

Предложен вариант регуляризованного градиентного метода для устойчивого решения задачи квадратичной минимизации в нетрадиционных информационных условиях, когда уровни погрешностей в задании точного линейного оператора известны лишь в ослабленных нормах. Доказана сходимость предложенного метода по аргументу в норме исходного пространства. Приведен пример, поясняющий, в каких именно ситуациях возможно обоснованное применение предложенного метода. Библ. 20.

Ключевые слова: задача квадратичной минимизации, градиентный метод, регуляризация, приближенные данные.

DOI: 10.31857/S0044466922010033

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается следующая задача квадратичной минимизации без ограничений:

$$\|\mathcal{A}u - f\|_F \to \min, \quad u \in H, \tag{1.1}$$

где пространства F и H предполагаются гильбертовыми, элемент $f \in F$ фиксирован, а оператор $\mathcal{A}$ линеен и ограничен: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H \to F)$. Основной целью является поиск нормального решения u_* задачи (1.1):

$$u_* = \arg\min_{u \in U_*} \|u\|_H, \quad U_* = \operatorname{Arg}\min_{u \in H} \|\mathcal{A}u - f\|_F.$$

Предполагается, что известны некоторые приближения $\mathcal{A}_n \in \mathcal{L}(H \to F)$, $f_n \in F$, сходящиеся к точным данным $\mathcal{A}$, f при $n \to \infty$, и по ним требуется построить соответствующую последовательность элементов $u_n \in H$, сильно сходящуюся в пространстве H к нормальному решению u_*.

Задачи такого типа исследовались ранее во множестве работ и, вообще говоря, относятся к классу некорректных задач, в которых малые возмущения исходных данных могут приводить к значительным возмущениям решения. Такое свойство задачи делает невозможным ее устойчивое численное решение без привлечения дополнительной априорной информации (см. [1]) и специальных численных методов, использующих эту информацию. Так, например, в случае, если известно компактное множество, содержащее точное решение u_*, элементы u_n можно строить

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики, гранта Президента РФ МК 3539.2019.1, гранта РФФИ № 18-31-00391.

с помощью метода квазирешений В.К. Иванова (см. [2]). В случае, когда известны уровни погрешностей h_n, σ_n из оценок

$$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(H\to F)} \le h_n, \quad \|f_n - f\|_F \le \sigma_n, \tag{1.2}$$

можно использовать метод регуляризации А.Н. Тихонова (см. [3]), метод М.М. Лаврентьева (см. [4]), обобщенный метод невязки (см. [5]), обобщенный принцип невязки (см. [6]), методы итеративной регуляризации (см. [7]) и многие другие (см. [8]–[11]). При этом одним из обязательных требований при обосновании сходимости $\|u_n - u_*\|_H \to 0$ является сходимость последовательностей $\{h_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ к нулю при $n \to \infty$.

Однако при решении прикладных задач далеко не всегда легко найти компакт, которому принадлежит искомое решение u_*, и нередко приходится иметь дело с такими приближенными операторами, для которых $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \not\to 0$ при $n \to \infty$. Данное явление наблюдается в случае, когда оператор $\mathcal{A}$ является некомпактным, а вычислитель должен оперировать лишь с конечномерными операторами $\mathcal{A}_n$, как, например, при решении задачи граничного управления для волнового уравнения (см. [12], [13]). Одним из возможных методов решения задач такого вида является вариационный метод М.М. Потапова (см. [14]), для обоснованного применения которого требуется априорная информация об истокопредставимости точного нормального решения $u_* = \mathcal{A}^* v_*$ с известным значением r_* из оценки нормы источника: $\|v_*\| \le r_*$. Для реализации вариационного метода не требуется знание уровней погрешностей h_n и σ_n, однако отыскание правильных и приемлемых для вычислений, т.е. не сильно завышенных значений оценочной константы r_*, является достаточно трудной проблемой. В настоящей работе предлагается подход, использующий информацию об уровнях погрешностей, подобную (1.2), но которая по сравнению с (1.2) может быть доступна для более широкого класса задач из-за изменения операторных норм.

Пусть наряду с H и F имеется еще одна пара гильбертовых пространств H^- и F^+ таких, что имеют место непрерывные и плотные вложения $H^- \subset H$ и $F \subset F^+$. Соответствующие операторы вложения обозначим через $\mathcal{B}^-$ и $\mathcal{B}^+$:

$$\mathcal{B}^- : H^- \to H, \quad \mathcal{B}^- h = h \quad \forall h \in H^-, \quad \mathcal{B}^+ : F \to F^+, \quad \mathcal{B}^+ f = f \quad \forall f \in F. \tag{1.3}$$

Пусть вместо (1.2) известны уровни h_n^+, h_n^-, σ_n, σ_n^+ следующих погрешностей:

$$\|\mathcal{B}^+(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(H\to F^+)} \le h_n^+, \quad \|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A})\mathcal{B}^-\|_{\mathcal{L}(H^-\to F)} \le h_n^-, \tag{1.4}$$

$$\|f_n - f\|_F \le \sigma_n, \quad \|\mathcal{B}^+(f_n - f)\|_{F^+} \le \sigma_n^+. \tag{1.5}$$

Понятно, что условия (1.4), (1.5) являются более мягкими по сравнению с (1.2) и совпадают с (1.2) в случае $H^- = H$ и $F^+ = F$. При наличии априорной информации вида (1.4), (1.5) для построения элементов u_n можно воспользоваться модификацией обобщенного метода невязки (см. [15]) или модификацией обобщенного принципа невязки (см. [16]). В данной работе будет предложен метод, являющийся модификацией регуляризованного градиентного метода (см. [17]), настроенной на информационные условия (1.3)–(1.5). Этот метод, на наш взгляд, более удобен для численной реализации при решении задач квадратичной минимизации вида (1.1), чем подходы, предложенные ранее в [15], [16].

Изложение будет организовано следующим образом: сначала будет описана предлагаемая вычислительная процедура, затем мы сформулирем основные предположения, необходимые для доказательства сходимости, и приведем это доказательство. Наконец, будет приведен пример задачи граничного управления волновым уравнением, при конечномерной аппроксимации которой возникают серьезные затруднения с обоснованием сходимости классического регуляризованного градиентного метода (см. [17]), поскольку $h_n \not\to 0$ в условиях (1.2). В то же время при соответствующем выборе вспомогательных пространств H^- и F^+ для тех же самых аппроксимаций в этом примере будут выполняться условия (1.3)–(1.5), а также и предположения H1–H4, достаточные для сходимости представленного в данной работе итерационного процесса.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

В качестве начальных приближений выбираются произвольные элементы $g_0 \in H^-$ и $w_0 = (u_0, \psi_0) \in H \times F$. Следующие приближения $g_n \in H^-$, $w_n = (u_n, \psi_n) \in H \times F$, $n = 1, 2, \ldots$, строятся по правилам

$$g_{n+1} = g_n - \beta_n^-(T_n^-)'(g_n), \quad T_n^- : H^- \to \mathbb{R}, \quad T_n^-(g) = \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g - f_n\right\|_F^2 + \alpha_n^- \|g\|_{H^-}^2, \tag{2.1}$$

$$\mu_n = \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - f_n\right\|_F + h_n^- \|g_n\|_{H^-} + \sigma_n, \tag{2.2}$$

$$w_{n+1} = w_n - \beta_n^+(T_n^+)'(w_n), \quad T_n^+ : H \times F \to \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

$$T_n^+(w) = T_n^+(u,\psi) = \left\|\mathcal{B}^+[\psi - (\mathcal{A}_n u - f_n)]\right\|_{F^+}^2 + \Theta_n P_n(\psi) + \alpha_n^+ \|(u,\psi)\|_{H\times F}^2, \tag{2.4}$$

$$P_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \|\psi\|_F \le \mu_n, \\ (\|\psi\|_F - \mu_n)^2, & \|\psi\|_F > \mu_n. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь $\|(u,\psi)\|_{H\times F}^2 = \|u\|_H^2 + \|\psi\|_F^2$, а градиенты $(T_n^-)'(g)$ и $(T_n^+)'(u,\psi)$ функционалов А.Н. Тихонова $T_n^-(g)$ и $T_n^+(u,\psi)$ вычисляются по обычным правилам:

$$(T_n^-)'(g) = 2(\mathcal{B}^-)^* \mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g - f_n) + 2\alpha_n^- g, \tag{2.6}$$

$$(T_n^+)'(u,\psi) = ((T_n^+)'_u(u,\psi), (T_n^+)'_\psi(u,\psi)),$$

$$(T_n^+)'_u(u,\psi) = 2(\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^* \mathcal{B}^+ \left(\mathcal{A}_n u - f_n - \psi\right) + \alpha_n^+ u), \tag{2.7}$$

$$(T_n^+)'_\psi(u,\psi) = 2((\mathcal{B}^+)^* \mathcal{B}^+ \left(\psi - (\mathcal{A}_n u - f_n)\right) + 0.5\Theta_n P_n'(\psi) + \alpha_n^+\psi),$$

$$P_n'(\psi) = \begin{cases} 0, & \|\psi\|_F \le \mu_n, \\ 2\psi(1 - \mu_n\|\psi\|_F^{-1}), & \|\psi\|_F > \mu_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Параметрами метода (2.1)–(2.8) являются шаги $\beta_n^\mp > 0$ градиентного спуска, штрафные коэффициенты $\Theta_n > 0$ и параметры регуляризации $\alpha_n^\mp > 0$. Элементы g_n, ψ_n и величины μ_n играют вспомогательную роль, а главный интерес для нас будут представлять предельные свойства компонент u_n при $n \to \infty$.

3. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Сформулируем требования к исходным и приближенным данным задачи (1.1) и параметрам метода (2.1)–(2.8).

H1. Задача (1.1) имеет решение, т.е. $U_* \ne \varnothing$.

H2. Пространства H, H^-, F, F^+ являются гильбертовыми и имеют место непрерывные и всюду плотные вложения $H^- \subset H$ и $F \subset F^+$, реализуемые в (1.3) операторами $\mathcal{B}^\mp$.

H3. Справедливы оценки погрешностей (1.4), (1.5) с известными уровнями погрешностей h_n^+, h_n^-, σ_n, σ_n^+, причем

$$h_n^+ \to 0, \quad h_n^- \to 0, \quad \sigma_n \to 0, \quad \sigma_n^+ \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

H4. Параметры метода $\beta_n^{\mp}$, Θ_n, $\alpha_n^{\mp}$ положительны и удовлетворяют следующим условиям, в том числе условиям согласования с уровнями погрешностей:

$$\alpha_n^- \geq 8(h_n^-)^2 + 2h_n^-, \quad \beta_n^- \leq \frac{1}{2\alpha_n^- + \left(\left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-\right\| + h_n^-\right)^2}, \tag{3.1}$$

$$\alpha_n^- \to 0, \quad \frac{\alpha_n^- - \alpha_{n+1}^-}{(\alpha_n^-)^{5/2}\beta_n^-} \to 0, \quad \frac{h_n^- + \sigma_n}{\alpha_n^-} \to 0, \tag{3.2}$$

$$\beta_n^+ \leq \frac{2}{4\alpha_n^+ + L_n + L_n\Theta_n}, \quad L_n = 2\max\left\{1, \left(\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + h_n^+\right)^2 + \left\|\mathcal{B}^+\right\|^2\right\}, \tag{3.3}$$

$$\alpha_n^+ \to 0, \quad \Theta_n \to +\infty, \quad \frac{\alpha_n^+ - \alpha_{n+1}^+}{(\alpha_n^+)^2\beta_n^+} \to 0, \quad \frac{\Theta_{n+1} - \Theta_n}{(\alpha_n^+)^2\beta_n^+} \to 0, \quad \frac{h_n^+ + \sigma_n^+}{\alpha_n^+} \to 0. \tag{3.4}$$

Подразумевается, что неравенства в (3.1) и (3.3) должны выполняться для всех достаточно больших номеров n.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Сначала докажем липшицевость точных функционалов и получим оценки погрешности для их градиентов.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения* H2, H3. *Тогда функционал* $J(u) = \left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^- u - f\right\|_F^2 : H^- \to \mathbb{R}$ *имеет липшицев градиент*

$$\left\|J'(u) - J'(v)\right\|_{H^-} \leq 2\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-\right\|_{\mathcal{L}(H^- \to F)}^2 \left\|u - v\right\|_{H^-} \quad \forall u, v \in H^-, \tag{4.1}$$

и справедлива следующая оценка погрешности приближения его градиента градиентом функционала $J_n(u) = \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- u - f_n\right\|_F^2 : H^- \to \mathbb{R}$:

$$\left\|J_n'(u) - J'(u)\right\|_{H^-} \leq C(h_n^- + \sigma_n)(1 + \left\|u\right\|_{H^-}) \quad \forall u \in H^-, \tag{4.2}$$

с постоянной $C > 0$, *не зависящей от* n *и* u. *Градиенты функционалов* $P_n(\psi)$ *и* $I(u, \psi) = \left\|\mathcal{B}^+[\psi - (\mathcal{A}u - f)]\right\|_{F^+}^2 : H \times F \to \mathbb{R}$ *также будут липшиц-непрерывны*:

$$\left\|P_n'(\psi) - P_n'(\varphi)\right\|_F \leq 2\left\|\psi - \varphi\right\|_F, \tag{4.3}$$

$$\left\|I'(u, \psi) - I'(z, \varphi)\right\|_{H \times F} \leq 2\left(\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}\right\|^2 + \left\|\mathcal{B}^+\right\|^2\right)\left\|(u - z, \psi - \varphi)\right\|_{H \times F}, \tag{4.4}$$

и, кроме того, будет справедлива следующая оценка погрешности приближения градиента $I'(u, \psi)$ *градиентом функционала* $I_n(u, \psi) = \left\|\mathcal{B}^+[\psi - (\mathcal{A}_n u - f_n)]\right\|_{F^+}^2 : H \times F \to \mathbb{R}$:

$$\left\|I_n'(u, \psi) - I'(u, \psi)\right\|_{H \times F} \leq C(h_n^+ + \sigma_n^+)(1 + \left\|(u, \psi)\right\|_{H \times F}), \tag{4.5}$$

с постоянной $C > 0$, *не зависящей от* n, u *и* ψ.

Доказательство. Свойства липшиц-непрерывности (4.1) и (4.4) следуют непосредственно из вида градиентов:

$$J'(u) = 2(\mathcal{A}\mathcal{B}^-)^*(\mathcal{A}\mathcal{B}^- u - f),$$
$$I'(u, \psi) = 2(\mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+((\mathcal{A}u - f) - \psi), (\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+(\psi - (\mathcal{A}u - f))).$$

Выражение для градиента $P_n'(\psi)$ приведено в (2.8). Если $\|\psi\|_F > \mu_n$, то $\mu_n\psi/\|\psi\|_F$ является проекцией $\mathcal{P}_n\psi$ точки ψ на шар $B_{\mu_n} = \{\psi \in F \mid \|\psi\|_F \le \mu_n\}$, т.е.

$$P_n'(\psi) = 2(\psi - \mathcal{P}_n\psi) \quad \text{при} \quad \|\psi\|_F > \mu_n. \tag{4.6}$$

Оценка (4.3) очевидна для элементов $\psi, \varphi \in B_{\mu_n}$. Если $\psi \in B_{\mu_n}$, а $\varphi \notin B_{\mu_n}$, то $P_n'(\psi) = 0$ и с учетом определения проекции и (4.6) будем иметь

$$\left\|P_n'(\psi) - P_n'(\varphi)\right\|_F = \left\|P_n'(\varphi)\right\|_F = \|2(\varphi - \mathcal{P}_n\varphi)\|_F \le 2\|\psi - \varphi\|_F.$$

Если же оба элемента ψ и φ находятся вне шара B_{μ_n}, то

$$\begin{gathered}\left\|P_n'(\psi) - P_n'(\varphi)\right\|_F^2 = 4\|\psi - \mathcal{P}\psi - \varphi + \mathcal{P}\varphi\|_F^2 = \\ = 4\|\psi - \varphi\|_F^2 - 4\langle \psi - \varphi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle_F + 4\|\mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\|_F^2.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Преобразуем второе слагаемое из правой части (4.7):

$$\begin{gathered}4\langle \varphi - \psi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle_F = 4\langle \varphi \mp \mathcal{P}\varphi \mp \mathcal{P}\psi - \psi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle_F = \\ = 4\langle \varphi - \mathcal{P}\varphi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle_F - 4\|\mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\|_F^2 + 4\langle \mathcal{P}\psi - \psi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle.\end{gathered} \tag{4.8}$$

Заметим, что в силу характеристического свойства проекции каждое из двух скалярных произведений, присутствующих в правой части (4.8), неположительно, поэтому

$$4\langle \varphi - \psi, \mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\rangle_F \le -4\|\mathcal{P}\psi - \mathcal{P}\varphi\|_F^2,$$

а тогда из (4.7) получаем искомое свойство (4.3).

Для получения оценки погрешности (4.2) используем неравенство треугольника и условия (1.4), (1.5):

$$\begin{gathered}\left\|J_n'(u) - J'(u)\right\|_{H^-} = 2\left\|(\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}_n^*(\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-u - f_n) - (\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathcal{B}^-u - f)\right\|_{H^-} \le \\ \le 2\left\|(\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}_n^*\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-u - (\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}_n^*\mathcal{A}\mathcal{B}^-u\right\|_{H^-} + 2\left\|(\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}_n^*\mathcal{A}\mathcal{B}^-u - (\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}^*\mathcal{A}\mathcal{B}^-u\right\|_{H^-} + \\ + 2\left\|(\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}_n^*f_n - (\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}^*f_n\right\|_{H^-} + 2\left\|(\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}^*f_n - (\mathcal{B}^-)^*\mathcal{A}^*f\right\|_{H^-} \le \\ \le 2\left\|(\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-)^*\right\|_{\mathcal{L}(F\to H^-)}\left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-u - \mathcal{A}\mathcal{B}^-u\right\|_F + \\ + 2\left\|(\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- - \mathcal{A}\mathcal{B}^-)^*\right\|_{\mathcal{L}(F\to H^-)}\left(\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-u\right\|_F + \|f_n\|_F\right) + 2\left\|(\mathcal{A}\mathcal{B}^-)^*\right\|_{\mathcal{L}(F\to H^-)}\|f_n - f\|_F \le \\ \overset{(1.4),(1.5)}{\le} 2h_n^-\left(\left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-\right\| + \left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-\right\|\right)\|u\|_{H^-} + 2h_n^-\|f_n\|_F + 2\sigma_n\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-\right\| \le \delta_n^-\left(1 + \|u\|_{H^-}\right),\end{gathered}$$

где

$$\delta_n^- = \max\left\{2h_n^-\left(\left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-\right\| + \left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-\right\|\right), 2h_n^-\|f_n\|_F + 2\sigma_n\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^-\right\|\right\} \le C(h_n^- + \sigma_n)$$

для некоторой, не зависящей от n и u постоянной $C > 0$.

Докажем теперь оценку погрешности (4.5) для градиента функционала $I(u,\psi)$:

$$\begin{gathered}\left\|I_n'(u,\psi) - I'(u,\psi)\right\|_{H\times F}^2 = 4\left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+((\mathcal{A}_nu - f_n) - \psi) - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+((\mathcal{A}u - f) - \psi)\right\|_H^2 + \\ + 4\left\|(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+(\psi - (\mathcal{A}_nu - f_n)) - (\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+(\psi - (\mathcal{A}u - f))\right\|_F^2.\end{gathered}$$

При оценке второго слагаемого учитываем (1.4) и (1.5):

$$\left\|(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+(\mathcal{A}_nu - f_n - \mathcal{A}u + f)\right\|_F \le h_n^+\|u\|_H\left\|\mathcal{B}^+\right\| + \sigma_n^+\left\|\mathcal{B}^+\right\|.$$

Первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$\left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+((\mathcal{A}_n u - f_n) - \psi) - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+((\mathcal{A}u - f) - \psi)\right\|_H \le$$
$$\le \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n u - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+\mathcal{A}u\right\|_H + \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+ f_n - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+ f\right\|_H +$$
$$+ \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+\psi - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\mathcal{B}^+\psi\right\|_H \le \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\right\|\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n u - \mathcal{B}^+\mathcal{A}u\right\|_{F^+} +$$
$$+ \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^* - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\right\|\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}u\right\|_{F^+} + \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^*\right\|\left\|\mathcal{B}^+ f_n - \mathcal{B}^+ f\right\|_{F^+} + \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^* - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\right\|\left\|\mathcal{B}^+ f\right\|_{F^+} +$$
$$+ \left\|\mathcal{A}_n^*(\mathcal{B}^+)^* - \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^+)^*\right\|\left\|\mathcal{B}^+\psi\right\|_{F^+} \le$$
$$\overset{(1.4),(1.5)}{\le} h_n^+\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\|\|u\|_H + h_n^+\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}\right\|\|u\|_H + \sigma_n^+\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + h_n^+\left\|\mathcal{B}^+ f\right\|_{F^+} + h_n^+\left\|\mathcal{B}^+\right\|\|\psi\|_F .$$

Из этих двух оценок, используя неравенство $\sqrt{1+x} \le \sqrt{x} + 1$, получаем, что

$$\left\|I_n'(u,\psi) - I'(u,\psi)\right\|_{H\times F} \le 2\Big(3(h_n^+)^2\left(\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + \left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}\right\|\right)^2\|u\|_H^2 + 3\left(\sigma_n^+\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + h_n^+\left\|\mathcal{B}^+ f\right\|_{F^+}\right)^2 +$$
$$+ 3(h_n^+)^2\left\|\mathcal{B}^+\right\|^2\|\psi\|_F^2 + 2(h_n^+)^2\|u\|_H^2\left\|\mathcal{B}^+\right\|^2 + 2(\sigma_n^+)^2\left\|\mathcal{B}^+\right\|^2\Big)^{1/2} \le \delta_n^+(1 + \|(u,\psi)\|_{H\times F}),$$

где

$$\delta_n^+ = 2\max\left\{\sqrt{3(h_n^+)^2\left(\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + \left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}\right\|\right)^2 + 2(h_n^+)^2\left\|\mathcal{B}^+\right\|^2}, \sqrt{3}h_n^+\left\|\mathcal{B}^+\right\|,\right.$$
$$\left.\sqrt{3\left(\sigma_n^+\left\|\mathcal{B}^+\mathcal{A}_n\right\| + h_n^+\left\|\mathcal{B}^+ f\right\|_{F^+}\right)^2 + 2(\sigma_n^+)^2\left\|\mathcal{B}^+\right\|^2}\right\} \le C(h_n^+ + \sigma_n^+), \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем, что значения μ_n из (2.2) являются верхними аппроксимациями точной нижней грани μ_* в исходной задаче (1.1):

$$\mu_* = \min_{u\in H}\|\mathcal{A}u - f\|_F . \tag{4.9}$$

Лемма 2. *При выполнении условий* H1–H4 *справедливы соотношения*

$$\mu_n \ge \mu_* \quad \forall n = 1, 2, \ldots, \tag{4.10}$$

$$\mu_n \to \mu_* \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{4.11}$$

Доказательство. Свойство доминирования (4.10) следует из определения нижней грани (4.9), неравенства треугольника, а также (1.4), (1.5) и (2.2):

$$\begin{gathered}\mu_* \overset{(4.9)}{\le} \left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^- g_n - f\right\|_F \le \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - f_n\right\|_F + \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - \mathcal{A}\mathcal{B}^- g_n\right\|_F + \|f_n - f\|_F \overset{(1.4),(1.5)}{\le} \\ \le \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - f_n\right\|_F + h_n^-\|g_n\|_{H^-} + \sigma_n \overset{(2.2)}{=} \mu_n.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Доказательство сходимости (4.11) в целом аналогично доказательству сходимости регуляризованного градиентного метода из [18, с. 846–852], однако следует учесть, что задача минимизации (1.1), рассматриваемая на пространстве $u \in H^- \subset H$, может не иметь решения. Рассмотрим минимизаторы v_n точных аналогов функционалов $T_n^-(g)$ из (2.1):

$$v_n = \arg\min_{v\in H^-}\left(\left\|\mathcal{A}\mathcal{B}^- v - f\right\|_F^2 + \alpha_n^-\|v\|_{H^-}^2\right), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.13}$$

Заметим, что существует последовательность элементов $v_n^- \in H^-$ такая, что

$$\left\|v_n^- - u_*\right\|_H \to 0, \quad \alpha_n^-\left\|v_n^-\right\|_{H^-}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.14}$$

Для доказательства существования таких элементов достаточно рассмотреть вспомогательные задачи минимизации

$$\|v - u_*\|_H \to \min, \quad v \in H^-, \quad \|v\|^2_{H^-} \le 1/\sqrt{\alpha_n^-}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и взять в качестве v_n^- их решения. При этом, используя плотность вложения $H^- \subset H$ и сходимость $\alpha_n^- \to 0$, получаем соотношения (4.14).

Применяя неравенство треугольника и условие (1.4), запишем соотношения

$$\left(\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- v_n - f_n\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n\right)^2 \overset{(1.4)}{\le} \left(\|\mathcal{A}\mathcal{B}^- v_n - f\|_F + 2h_n^- \|v_n\|_{H^-} + 2\sigma_n\right)^2 = \\ = \|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_n\|^2_{H^-} + Q_n, \tag{4.15}$$

где

$$Q_n = 4\|\mathcal{A} v_n - f\|_F \left(h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n\right) + 4\left(h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n\right)^2 - \alpha_n^- \|v_n\|^2_{H^-}.$$

Оценим Q_n с помощью неравенств $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ и $2ab \le a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} Q_n &\le 4\sqrt{\max\{h_n^-, \sigma_n\}}\|\mathcal{A} v_n - f\|_F \frac{h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n}{\sqrt{\max\{h_n^-, \sigma_n\}}} + 8(h_n^-)^2 \|v_n\|^2_{H^-} + 8\sigma_n^2 - \alpha_n^- \|v_n\|^2_{H^-} \le \\ &\le 4\max\{h_n^-, \sigma_n\}\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + \frac{(h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n)^2}{\max\{h_n^-, \sigma_n\}} + 8\sigma_n^2 + (8(h_n^-)^2 - \alpha_n^-)\|v_n\|^2_{H^-} \le \\ &\le 4\max\{h_n^-, \sigma_n\}\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + (\sqrt{h_n^-}\|v_n\|_{H^-} + \sqrt{\sigma_n})^2 + 8\sigma_n^2 + (8(h_n^-)^2 - \alpha_n^-)\|v_n\|^2_{H^-} \le \\ &\le 4\max\{h_n^-, \sigma_n\}\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + 2\sigma_n + 8\sigma_n^2 + (8(h_n^-)^2 + 2h_n^- - \alpha_n^-)\|v_n\|^2_{H^-}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Заметим, что последнее слагаемое в правой части (4.16) является неположительным в силу первого условия из (3.1). Кроме того, из оптимальности элемента v_n в задаче (4.13) следует неравенство $\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 \le \|f\|_F^2$, поэтому

$$Q_n \le 4\max\{h_n^-, \sigma_n\}\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + 2\sigma_n + 8\sigma_n^2 \le 4\max\{h_n^-, \sigma_n\}\|f\|_F^2 + 2\sigma_n + 8\sigma_n^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{4.17}$$

Элементы v_n^- в задаче (4.13) являются допустимыми, поэтому

$$\|\mathcal{A} v_n - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_n\|^2_{H^-} \le \|\mathcal{A} v_n^- - f\|_F^2 + \alpha_n^- \|v_n^-\|^2_{H^-}. \tag{4.18}$$

В силу (4.14) правая часть (4.18) при $n \to \infty$ стремится к $\|\mathcal{A} u_* - f\|_F^2 = \mu_*^2$, следовательно, из (4.15), (4.17) и (4.18) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\|\mathcal{A}_n v_n - f_n\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n\right) \le \mu_*. \tag{4.19}$$

В то же время верна аналогичная (4.12) оценка

$$\|\mathcal{A}_n v_n - f_n\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n \ge \mu_*,$$

которая вместе с (4.19) влечет сходимость

$$\|\mathcal{A}_n v_n - f_n\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n \to \mu_* \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.20}$$

Далее по той же схеме, что и в [18, с. 846–852], проводится доказательство сходимости $\|v_n - g_n\|_{H^-} \to 0$. При этом используются условия согласования параметров (3.1), (3.2), оценки для констант Липшица и погрешностей из леммы 1, а также теорема 16 из [18, с. 197].

Для завершения доказательства сходимости (4.11) запишем следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\mu_n = \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - f_n\right\|_F + h_n^- \|g_n\|_{H^-} + \sigma_n \le \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- v_n - f_n\right\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n + \left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^- g_n - \mathcal{A}_n\mathcal{B}^- v_n\right\|_F + \\ + h_n^- \|g_n - v_n\|_{H^-} \le \left(\|\mathcal{A}_n v_n - f_n\|_F + h_n^- \|v_n\|_{H^-} + \sigma_n\right) + \left(\left\|\mathcal{A}_n\mathcal{B}^-\right\| + h_n^-\right)\|g_n - v_n\|_{H^-}.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Правая часть (4.21) при $n \to \infty$ стремится к μ_* в силу (4.20) и имеющейся сходимости $\|v_n - g_n\|_{H^-} \to 0$, поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \mu_n \le \mu_*,$$

что вместе с (4.10) приводит к (4.11). Лемма 2 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ МЕТОДА

Сформулируем основное утверждение о сходимости метода.

Теорема. *Пусть выполняются условия* H1–H4. *Тогда компоненты u_n элементов $w_n = (u_n, \psi_n)$, построенных с помощью итерационного процесса* (2.1)–(2.5), *сильно сходятся к нормальному решению u_* задачи* (1.1):

$$\|u_n - u_*\|_H \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{5.1}$$

Доказательство. Рассмотрим минимизаторы $q_n = (z_n, \varphi_n)$ функционала Тихонова с точными данными $\mathcal{A}$ и f, аналогичного функционалу (2.4):

$$q_n = (z_n, \varphi_n) = \arg \min_{(u,\psi)\in H\times F} \left(\|\psi - (\mathcal{A}u - f)\|_{F^+}^2 + \Theta_n P_n(\psi) + \alpha_n^+ \|(u,\psi)\|_{H\times F}^2\right). \tag{5.2}$$

Элемент $w_* = (u_*, \mathcal{A}u_* - f)$, порожденный нормальным решением u_* задачи (1.1), является в (5.2) допустимым и, кроме того,

$$\|\mathcal{A}u_* - f\|_F \overset{(4.9)}{=} \mu_* \overset{(4.10)}{\le} \mu_n,$$

поэтому $P_n(\mathcal{A}u_* - f) \overset{(2.5)}{=} 0$, а тогда

$$\begin{gathered}\|\varphi_n - (\mathcal{A}z_n - f)\|_{F^+}^2 + \Theta_n P_n(\varphi_n) + \alpha_n^+ \|q_n\|_{H\times F}^2 \le \\ \le \|(\mathcal{A}u_* - f) - (\mathcal{A}u_* - f)\|_{F^+}^2 + \Theta_n P_n(\mathcal{A}u_* - f) + \alpha_n^+ \|w_*\|_{H\times F}^2 = \alpha_n^+ \|w_*\|_{H\times F}^2.\end{gathered} \tag{5.3}$$

Оценивая левую часть (5.3) снизу поочередно каждым из слагаемых, получаем следующие три соотношения:

$$\|\varphi_n - (\mathcal{A}z_n - f)\|_{F^+}^2 \le \alpha_n^+ \|w_*\|_{H\times F}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{5.4}$$

$$P_n(\varphi_n) \le \frac{\alpha_n^+}{\Theta_n} \|w_*\|_{H\times F}^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{5.5}$$

$$\|q_n\|_{H\times F}^2 \le \|w_*\|_{H\times F}^2. \tag{5.6}$$

В силу (5.6) последовательность $q_n = (z_n, \varphi_n)$ ограничена в пространстве $H \times F$, поэтому без ограничения общности ее можно считать слабо в $H \times F$ сходящейся к некоторому элементу (z_0, φ_0). В то же время, согласно (5.4), имеется сильная сходимость

$$\|\varphi_n - (\mathcal{A}z_n - f)\|_{F^+} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку предел единственен, из слабой сходимости в $H \times F$ следует слабая сходимость в $H \times F^+$, линейный оператор $\mathcal{A} : H \to F$ непрерывен и вложение $F \subset F^+$ также непрерывно, то в пределе получается равенство

$$\varphi_0 = \mathcal{A}z_0 - f. \tag{5.7}$$

Из (5.5), определения (2.5) штрафной функции P_n и утверждения (4.11) леммы 2 имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\|\varphi_n\|_F - \mu_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n\|_F - \lim_{n\to\infty}\mu_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n\|_F - \mu_* \le 0. \tag{5.8}$$

Используя слабую сходимость $\varphi_n \to \varphi_0$ в F и слабую полунепрерывность снизу нормы $\|\cdot\|_F$, получаем соотношения

$$\|\mathcal{A}z_0 - f\|_F \overset{(5.7)}{=} \|\varphi_0\|_F \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n\|_F \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\|\varphi_n\|_F \overset{(5.8)}{\le} \mu_*. \tag{5.9}$$

В задаче (1.1) элемент u_* является оптимальным, а z_0 — допустимым, поэтому

$$\mu_* = \|\mathcal{A}u_* - f\|_F \le \|\mathcal{A}z_0 - f\|_F, \tag{5.10}$$

а тогда из (5.9), (5.10) следует существование предела

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|_F = \|\varphi_0\|_F$$

и условие $z_0 \in U_*$, т.е. оптимальность компоненты z_0 в задаче (1.1). Отсюда в силу свойства Радона—Рисса имеем сильную сходимость $\varphi_n \to \varphi_0 = \mathcal{A}z_0 - f$ в пространстве F. Используя ортогональное разложение $f = f_R + f_N$, в котором $f_R \in \overline{R(\mathcal{A})}$, $f_N \in N(\mathcal{A}^*)$, получаем

$$\|\mathcal{A}u - f\|_F^2 = \|\mathcal{A}u - f_R\|_F^2 + \|f_N\|_F^2 \quad \forall u \in H.$$

Из плотности $R(\mathcal{A})$ в $\overline{R(\mathcal{A})}$ следует, что $\mu_*^2 = \|f_N\|_F^2$, а следовательно, будет выполняться цепочка равенств $\|\mathcal{A}z_0 - f_R\|_F^2 + \|f_N\|_F^2 = \|\mathcal{A}z_0 - f\|_F^2 = \mu_*^2 = \|f_N\|_F^2$, т.е. $\mathcal{A}z_0 - f_R = 0$ или, что то же самое,

$$\mathcal{A}z_0 - f = -f_N.$$

Поэтому $\|\varphi_n + f_N\|_F \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда после перехода к верхнему пределу в развернутой записи неравенства (5.6)

$$\|z_n\|_H^2 + \|\varphi_n\|_F^2 = \|q_n\|_{H\times F}^2 \le \|w_*\|_{H\times F}^2 = \|u_*\|_H^2 + \|\mathcal{A}u_* - f\|_F^2 = \|u_*\|_H^2 + \|f_N\|_F^2$$

получаем соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|z_n\|_F \le \|u_*\|_H. \tag{5.11}$$

Напомним, что u_* — нормальное решение задачи (1.1), $z_0 \in U_*$ — некоторое ее решение и $z_n \to z_0$ слабо в H. По этим причинам справедливы подобные (5.9) соотношения

$$\|u_*\|_H \le \|z_0\|_H \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\|z_n\|_F \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\|z_n\|_F \overset{(5.11)}{\le} \|u_*\|_H$$

и, тем самым, существует предел норм

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n\|_F = \|z_0\|_H = \|u_*\|_H.$$

В силу единственности нормального решения задачи (1.1) имеем равенство $z_0 = u_*$, а значит, и сильную сходимость $\|z_n - u_*\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, из сходимости $\|\varphi_n - \varphi_0\|_F \to 0$ и (5.7) следует, что

$$\varphi_0 = \mathcal{A}u_* - f, \quad w_0 = w_* = (u_*, \mathcal{A}u_* - f), \quad \|q_n - w_*\|_{H\times F} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Сходимость $\|q_n - w_n\|_H \to 0$ доказывается абсолютно аналогично (см. [18]). При этом используются условия согласования параметров (3.3), (3.4), оценка (4.5) из леммы 1, а также теорема 16 из [18, с. 197]. В результате получаем сильную сходимость

$$\|w_n - w_*\|_{H\times F} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и, тем более, сходимость (5.1) первых компонент u_n пар $w_n = (u_n, \varphi_n)$. Теорема доказана.

6. ПРИМЕР

Приведем пример, иллюстрирующий расширенные возможности применения предложенной модификации по сравнению с классическим регуляризованным градиентным методом. Рассмотрим управляемую систему, описываемую волновым уравнением:

$$y_{tt}(t,x) = y_{xx}(t,x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l,$$
$$y\big|_{x=0} = u(t), \quad y\big|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T,$$
$$y\big|_{t=0} = 0, \quad y_t\big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l.$$

Определим оператор, ставящий в соответствие каждому граничному управлению $u = u(t)$ следы обобщенного решения и его производной по t в конечный момент времени T:

$$\mathcal{A}u = (y\big|_{t=T}, y_t\big|_{t=T}), \quad \mathcal{A} : L^2(0,T) \to L^2(0,l) \times H^{-1}(0,l),$$

где $L^2(0,l)$ – гильбертово пространство Лебега, $H^{-1}(0,l) = (H_0^1(0,l))^*$, а $H_0^1(0,l)$ – подпространство функций из пространства Соболева $H^1(0,l) = W_2^1(0,l)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[0,l]$. Известно (см. [19]), что оператор $\mathcal{A}$ имеет замкнутый бесконечномерный образ $R(\mathcal{A})$ и, следовательно, не может быть приближен конечномерными операторами в классическом смысле (1.2), поэтому для устойчивого численного решения задачи (1.1) обоснованное применение классического регуляризованного градиентного метода не представляется возможным. В то же время при выборе пространств

$$H^- = H^1(\overset{\circ}{0},T) = \{f(t) \in H^1(0,T) \,|\, f(0) = 0\} \quad \text{и} \quad F^+ = H^{-1}(0,l) \times H^{-2}(0,l)$$

в силу компактности вложений $H^- \subset H$ и $F \subset F^+$, осуществляемых операторами $\mathcal{B}^-$ и $\mathcal{B}^+$, операторы управления $\mathcal{A}\mathcal{B}^- : H^- \to F$ и $\mathcal{B}^+\mathcal{A} : H \to F^+$ станут компактными, и их можно будет приблизить конечномерными операторами с оценками погрешностей вида (1.4). Соответствующие аппроксимации могут быть построены, например, на базе разностных схем, а оценки погрешностей во вспомогательных парах пространств можно получить, действуя по аналогии с [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бакушинский А.Б.* Замечания о выборе параметра регуляризации по критерию квазиоптимальности и отношения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 8. С. 1258 – 1259.
2. *Иванов В.К.* О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 2. С. 270–272.
3. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501–504.
4. *Лаврентьев М.М.* О постановке некоторых некорректных задач математической физики // Некоторые вопр. вычисл. и приклад. математики. Новосибирск: Наука, 1966. С. 258–276.
5. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Об одном регуляризующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Т. 12. № 6. С. 1592–1594.
6. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 2. С. 294–302.
7. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.
8. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286 с.
10. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. 322 p.
11. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Курс, 2017. 392 с.
12. *Glowinski R., Li C.-H., Lions J.-L.* A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equation (I) Dirichlet controls: Description of the numerical methods // Japan J. of Industr. a. Appl. Math. 1990. V. 7. N 1. P. 1–76.
13. *Zuazua E.* Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods // SIAM Rev. 2005. V. 47. N 2. P. 197–243.

14. *Потапов М. М.* Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Докл. АН. 1999. Т. 365. № 5. С. 596–598.
15. *Дряженков А.А.* Модифицированный обобщенный метод невязки для задач минимизации с погрешностями известного уровня в ослабленных нормах // Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. технологии. 2015. Т. 16. С. 456–463.
16. *Артемьева Л.А., Дряженков А.А.* Модификация обобщенного принципа невязки при наличии информации о погрешностях в ослабленных нормах // Оптим. упр. и дифференц. игры : материалы Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, М., 12–14 дек. 2018 г. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 27–29.
17. *Бакушинский А.Б., Поляк Б.Т.* О решении вариационных неравенств // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219. № 5. С. 1038–1041.
18. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1053 с.
19. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010. 382 с.
20. *Dryazhenkov A., Artemyeva L.* Numerical solution to the Dirichlet control problem on a part of the boundary for the Petrovsky system // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. № 32. P. 748–753.