

УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 532.5

МЕТОД ГОДОГРАФА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ОБ ОПРОКИНУТОЙ МЕЛКОЙ ВОДЕ¹⁾

© 2022 г. Т. Ф. Долгих^{1,*}, М. Ю. Жуков^{1,2,**}

¹ 344090 Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Россия

² 362027 Владикавказ, ул. Маркуса, 22, Южный математический институт, Россия

*e-mail: dolgikh@sfnu.ru

**e-mail: myuzhukov@gmail.com

Поступила в редакцию 06.11.2020 г.

Переработанный вариант 20.01.2021 г.

Принята к публикации 17.09.2021 г.

Методом годографа на основе закона сохранения исследована задача о поведении опрокинутой мелкой воды (слоя воды на потолке), которая описывается системой двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Основное отличие таких уравнений от классических уравнений мелкой воды заключается в изменении направления действия силы тяжести. Считается, что слой жидкости “приклеен” к горизонтальной твердой поверхности и ускорение силы тяжести направлено от поверхности. Это приводит к тому, что тип уравнений становится эллиптическим. Рассматриваемая эволюционная задача Коши является одной из моделей неустойчивой сплошной среды типа квазигазовой среды Чаплыгина. Развиваемый метод позволяет преобразовать решение эволюционной задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве примера рассмотрено поведение слоя жидкости в случае пространственно-периодического гладкого возмущения неподвижного плоского слоя. Показано, что за конечный интервал времени на поверхности возникает негладкая пространственно-периодическая структура, представляющая собой стоячую кноидальную волну на поверхности жидкости. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: метод годографа, опрокинутая мелкая вода, квазилинейные эллиптические уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466922010069

ВВЕДЕНИЕ

Задача о поведении опрокинутой мелкой воды (слой жидкости на потолке) представляет значительный интерес по многим причинам. Во-первых, это простейший пример неустойчивости Рэлея–Тейлора для границы раздела двух жидкостей в случае, когда тяжелый слой жидкости находится над легким слоем (см. [1]). В данном случае роль второго слоя играет воздух, давление которого удерживает слой воды на потолке. Во-вторых, опрокинутая мелкая вода является одним из простых примеров неустойчивой сплошной среды типа квазичаплыгинского газа (см. [2], более детально [2, с. 87–90]). В-третьих, с математической точки зрения – это пример эволюционной задачи Коши для эллиптических квазилинейных уравнений, общий подход к решению которых в настоящее время отсутствует. В-четвертых, несмотря на то, что подобные задачи интенсивно исследовались аналитическими (см., например, [3], [4, с. 10–136]), асимптотическими (см., например, [2, с. 87–90]) и численными (см. [5]–[7]) методами, окончательное точное решение для произвольных начальных данных не построено. Наиболее полное асимптотическое исследование задачи содержится в монографии [2, с. 87–90], в которой изучена неустойчивость слоя опрокинутой мелкой воды относительно спонтанных возмущений “горб”, “ямка”, “дублет горб–ямка” и пространственно-периодического возмущения.

Напомним, что основное отличие уравнений опрокинутой мелкой воды от классических заключается в изменении знака ускорения силы тяжести. Считается, что слой жидкости “прикле-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ (грант № 075-15-2019-1928).

ен” к горизонтальной твердой поверхности и ускорение силы тяжести направлено от поверхности. Это приводит к тому, что тип уравнений становится эллиптическим. Как правило, эллиптические уравнения в частных производных первого порядка описывают неустойчивые сплошные среды, для которых типичен рост характеристик среды (плотности, скорости) до бесконечности за конечный интервал времени (см. [2]).

Для исследования уравнений опрокинутой мелкой воды использован вариант метода годографа на основе закона сохранения, предложенный в [8]. Этот метод в дальнейшем был развит в [9]–[11], а также в [12]–[14]. В том числе, в [14] был описан способ решения задачи Коши в случае эллиптических уравнений (см. также [12], [13]). На самом деле, способ решения эллиптических уравнений описан в [14] достаточно схематично, в основном, применительно к уравнениям электрофореза. Случай электрофореза выгодно отличается от общего случая тем, что все требующиеся соотношения удается записать в явном виде (см. [10]). В ситуации общего положения приходится заново получать некоторые важные соотношения и указывать способы вычисления различных комплексных интегралов.

Как уже говорилось, уравнения опрокинутой мелкой воды имеют эллиптический тип и описывают поведение неустойчивой сплошной среды. Исследованию подобных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, в частности [2], где для построения решения применяется классический метод годографа, а также [5], [6], в которых решения получены другими методами. В настоящей работе задача решается иным вариантом метода годографа с использованием на основе закона сохранения. Такой метод был предложен в [8] и затем развит в [14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования поведения слоя жидкости на потолке (опрокинутая мелкая вода) решается задача Коши для системы квазилинейных эллиптических уравнений в частных производных первого порядка, которая в безразмерных переменных в области $|x| < \infty, t > 0$ имеет вид (см. [4]–[7], [2, с. 87–90])

$$\begin{aligned} h_t + v h_x + h v_x &= 0, \\ v_t + v v_x - g h_x &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (1.2)$$

где $h(x, t)$ – толщина слоя жидкости (свободная поверхность), отсчитываемая от плоской поверхности (потолка), $v(x, t)$ – скорость течения, g – ускорение силы тяжести ($g > 0$), $h_0(x)$, $v_0(x)$ – известные функции, задающие начальную толщину слоя (положение свободной поверхности) и скорость.

С помощью замен переменных

$$\begin{aligned} R^1 &= v - 2i\sqrt{gh}, & R^2 &= v + 2i\sqrt{gh}, \\ v &= \frac{R^1 + R^2}{2}, & gh &= -\frac{(R^1 - R^2)^2}{4}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

задача (1.1), (1.2) записывается в инвариантах Римана (комплексно-сопряженных)

$$R_t^1 + \lambda^1 R_x^1 = 0, \quad R_t^2 + \lambda^2 R_x^2 = 0, \quad (1.4)$$

$$\lambda^1 = \frac{3R^1 + R^2}{4}, \quad \lambda^2 = \frac{R^1 + 3R^2}{4}, \quad (1.5)$$

$$R^1|_{t=0} = R_0^1(x), \quad R^2|_{t=0} = R_0^2(x), \quad (1.6)$$

где R^1, R^2 – инварианты Римана (см., например, [15]), λ^1, λ^2 – характеристические направления.

2. НЕЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Построение решения задачи (1.4)–(1.6) основано на отыскании закона сохранения (см. [8]–[14])

$$\varphi_t(R) + \psi_x(R) = 0, \quad R = (R^1, R^2). \quad (2.1)$$

Здесь плотность φ и поток ψ закона сохранения определены задачей

$$(\lambda^1 - \lambda^2)\varphi_{R^1 R^2} + \lambda_{R^2}^1 \varphi_{R^1} - \lambda_{R^1}^2 \varphi_{R^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\lambda^1 \varphi_{R^1} = \psi_{R^1}, \quad \lambda^2 \varphi_{R^2} = \psi_{R^2}, \quad (2.3)$$

$$(\psi - \lambda^1 \varphi)\Big|_{R^1=r^1} = K, \quad (\psi - \lambda^2 \varphi)\Big|_{R^2=r^2} = -K, \quad (2.4)$$

где r^1, r^2 – некоторые константы, идентифицирующие характеристики, K – вспомогательная константа (для гиперболических уравнений $K = 1$, для эллиптических уравнений $K = i$).

Система (2.3) получена непосредственным вычислением производных по t и x в законе сохранения (2.1) с учетом уравнений (1.4), а уравнение (2.2) является условием разрешимости системы (2.3).

В [14] показано, что в случае гиперболических уравнений (т.е. для уравнений классической мелкой воды при $g < 0$ и вещественных инвариантах Римана) задача (2.2)–(2.4) для определения плотности φ сводится к построению решения некоторого варианта линейного уравнения Эйлера–Дарбу–Пуассона в частных производных второго порядка:

$$\varphi_{R^1 R^2} + \frac{\varphi_{R^1} - \varphi_{R^2}}{2(R^1 - R^2)} = 0, \quad (2.5)$$

для которого известна функция Римана–Грина (см. [16])

$$\begin{aligned} \Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2) &= -\frac{4(R^1 - R^2)^{1/2}}{(r^1 - r^2)^{3/2}} F(z), \\ F(z) &= {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1, -z\right), \\ z &= -\frac{(R^1 - r^1)(R^2 - r^2)}{(R^1 - R^2)(r^1 - r^2)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция.

Неявное решение уравнений (1.4), (1.5) в случае начальных условий (1.6) конструируется путем интегрирования по некоторому замкнутому контуру закона сохранения (2.1) (процедура, аналогичная построению функции Римана для гиперболических уравнений; см., например, [17, с. 446–457]) и записывается в форме (см. [14])

$$2Kt(a, b) = \int_a^b \varphi(R_0^1(\tau), R_0^2(\tau) | r^1(b), r^2(a)) d\tau, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi(R^1, R^2 | r^1, r^2) &= \frac{2K\Phi(R^1, R^2 | r^1, r^2)}{\lambda^2(r^1, r^2) - \lambda^1(r^1, r^2)}, \\ r^1(b) &= R_0^1(b), \quad r^2(a) = R_0^2(a), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где a, b – некоторые параметры, а функция Φ определена соотношениями (2.6).

Обратим внимание на то, что в соотношениях (2.2)–(2.8) величины R^1, R^2 могут быть как вещественными (в гиперболическом случае), так и комплексно-сопряженными (в эллиптическом случае). Подробно переход от вещественных переменных к комплексным для уравнений эллиптического типа с аналитическими коэффициентами и возможность использования функции Римана–Грина в случае комплексных переменных описаны в [18, с. 133–144].

Аналогичным образом строятся функции $x(a, b)$ (подробнее см. в [8], [14]). Наличие соотношений $t = t(a, b)$, $x = x(a, b)$ позволяет записать двухпараметрическое неявное решение задачи (1.4)–(1.6), которое полностью определяется начальными данными (1.6), в форме

$$\begin{aligned} R^1(x, t) &= R_0^1(b), \quad R^2(x, t) = R_0^2(a), \\ t &= t(a, b), \quad x = x(a, b). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Такое решение становится явным, если удастся построить функции $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ обратные к $t(a, b)$, $x(a, b)$.

Для задачи об опрокинутой мелкой воде явные выражения для функции Римана–Грина, позволяющие вычислять $x(a, b)$, построить не удастся, и для вычисления функций $x(a, b)$ ниже использован иной метод.

3. ПОСТРОЕНИЕ ЯВНОГО РЕШЕНИЯ НА ИЗОХРОНЕ

В случае эллиптических уравнений (1.1) (а также (2.5) и (2.2), (2.3)), следуя [14], выбираем параметры a и b комплексными:

$$\mathbf{a} = U + iV, \quad \mathbf{b} = U - iV, \quad \mathbf{a}^* = \mathbf{b}. \quad (3.1)$$

Кроме того, функции $R_0^1(\tau)$, $R_0^2(\tau)$, $r^1(b)$, $r^2(a)$ (см. (1.6), (2.8)), выделяя вещественные и мнимые части, представим в виде

$$\begin{aligned} R^1(\tau) &= P(\tau) + iQ(\tau), & R^2(\tau) &= P(\tau) - iQ(\tau), \\ R_0^1(\tau) &= P_0(\tau) + iQ_0(\tau), & R_0^2(\tau) &= P_0(\tau) - iQ_0(\tau), \\ r^1 &= p + iq, & r^2 &= p - iq, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$p(U, V) = \operatorname{Re} R_0^1(\mathbf{b}), \quad q(U, V) = \operatorname{Im} R_0^1(\mathbf{b}),$$

где $P(\tau)$, $Q(\tau)$, $P_0(\tau)$, $Q_0(\tau)$, $p(U, V)$, $q(U, V)$ – вещественные функции от вещественных переменных.

Тогда с учетом (2.6)–(3.2) соотношение (2.7) примет вид

$$\begin{aligned} t(U, V) &= -i \int_{U+iV}^{U-iV} G(U, V; \tau) d\tau, \\ G(U, V; \tau) &= \frac{Q_0^{1/2}(\tau)}{q^{3/2}(U, V)} F(z(U, V, \tau)), \\ z(U, V, \tau) &= \frac{(P_0(\tau) - p(U, V))^2 + (Q_0(\tau) - q(U, V))^2}{4q(U, V)Q_0(\tau)}, \\ \frac{1}{2}\phi' &\equiv iG(P_0(\tau), Q_0(\tau), p(U, V), q(U, V)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обратим внимание на то, что функция $G(U, V; \tau)$ полностью определена начальными данными, т.е. P_0 , Q_0 , p , q , которые, в свою очередь, связаны с $h_0(x)$, $v_0(x)$ соотношениями (см. (1.2), (1.3))

$$v_0(\tau) = P_0(\tau), \quad gh_0(\tau) = \frac{1}{4}Q_0^2(\tau).$$

Легко показать, что интеграл по комплексной переменной $\tau = \alpha + i\beta$ в (3.3) не зависит от пути интегрирования, и достаточно осуществлять интегрирование по отрезку, соединяющему точки $U - iV$, $U + iV$ на плоскости (α, β) , фактически лишь по переменной β при фиксированном значении величины $\alpha = U$:

$$t(U, V) = \int_{-V}^V G(U, V; U + i\beta) d\beta. \quad (3.4)$$

Подчеркнем, что первые два аргумента U и V у функции $G(U, V; \tau)$ при интегрировании выполняют роль параметров.

Заметим, что при численной реализации метода удобно вычислять интеграл (3.4), решая задачу Коши

$$\frac{dT(\eta)}{d\eta} = G(U, V; U + i\eta) + G(U, V; U - i\eta), \quad (3.5)$$

$$T|_{\eta=0} = 0,$$

для функции

$$T(\eta) = \int_{-\eta}^{\eta} G(U, V; U + i\beta) d\beta, \quad (3.6)$$

$$T(V) = t(U, V).$$

Обратим внимание, что правая часть дифференциального уравнения (3.5) – вещественная функция, и при численной реализации в случае отсутствия комплексных чисел проблем при решении задачи Коши стандартными методами не возникает.

Для построения явного решения в момент времени t_* фиксируем некоторую линию уровня (изохрону) функции $t(U, V)$, считая эту линию параметризованной:

$$t_* = t(U(\mu), V(\mu)), \quad (3.7)$$

где t_* – идентифицирует изохрону, μ – параметр.

Для определения функций $U(\mu)$, $V(\mu)$ на изохроне дифференцируем (3.7) по параметру μ и решаем задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dU}{d\mu} = -t_V(U, V), \quad \frac{dV}{d\mu} = t_U(U, V), \quad (3.8)$$

$$U(0) = U_*, \quad V(0) = V_*,$$

где U_* , V_* – точка на изохроне, соответствующая $\mu = 0$.

Для того чтобы определить пространственную координату x на изохроне, задачу (3.8) следует дополнить задачей

$$\frac{dX(\mu)}{d\mu} = B(t_V^2(U, V) + t_U^2(U, V)), \quad (3.9)$$

$$X(0) = X_*,$$

$$B(U, V) = -\text{Im}(\lambda^1),$$

где $X = X(\mu) = x(a, b) = x(U(\mu), V(\mu))$ – координата x на изохроне, X_* – значение координаты x на изохроне при $\mu = 0$.

Интегрируя задачи Коши (3.8), (3.9), получаем явную зависимость решения от координаты x в момент времени t_* :

$$R^1(x, t_*) = p(U(\mu), V(\mu)) + iq(U(\mu), V(\mu)),$$

$$R^2(x, t_*) = p(U(\mu), V(\mu)) - iq(U(\mu), V(\mu)), \quad (3.10)$$

$$x = X(\mu).$$

Построение задачи Коши (3.9) для $X(\mu)$ детально описано в [14, с. 99]. Для этого следует, подставляя (2.9) в (1.4), получить соотношения, которые означают, что параметры a , b являются инвариантами Римана:

$$a_t + \lambda^1 a_x = 0, \quad b_t + \lambda^2 b_x = 0,$$

$$\lambda^1 = A - iB, \quad \lambda^2 = A + iB.$$

Заметим, что в случае (1.5)

$$A(U, V) = p, \quad B(U, V) = -\frac{1}{2}q. \quad (3.11)$$

С учетом (3.1) после разделения вещественной и мнимой частей имеем

$$\begin{aligned}U_t + AU_x - BV_x &= 0, \\V_t + BU_x + AV_x &= 0.\end{aligned}$$

Применяя обычный метод годографа, т.е. используя взаимозамену (U, V) и (x, t) , получаем соотношения

$$\begin{aligned}-x_V + At_V + Bt_U &= 0, \\x_U + Bt_V - At_U &= 0,\end{aligned}$$

которые позволяют определить x_U, x_V по известным t_U, t_V и с учетом (3.8) сконструировать уравнение (3.9):

$$\frac{dx(U(\mu), V(\mu))}{d\mu} = x_V t_U - x_U t_V = J(U, V) = B(t_U^2 + t_V^2). \quad (3.12)$$

Здесь $J(U, V)$ – якобиан преобразования $(U, V) \Leftrightarrow (x, t)$.

Обратим внимание на то, что вычисление производных $t_U(U, V)$ и $t_V(U, V)$, содержащихся в правых частях уравнений (3.8), (3.9), можно, как и вычисление $t(U, V)$, проводить, решая задачи Коши (сравни с (3.5), (3.6))

$$\frac{T^U(\eta)}{d\eta} = G_U(U, V; U + i\eta) + G_\tau(U, V; U + i\eta) + G_U(U, V; U - i\eta) + G_\tau(U, V; U - i\eta),$$

$$\frac{T^V(\eta)}{d\eta} = G_V(U, V; U + i\eta) + G_V(U, V; U - i\eta),$$

$$T^U|_{\eta=0} = 0,$$

$$T^V|_{\eta=0} = G(U, V; U + iV) + G(U, V; U - iV),$$

$$T^U(V) = t_U(U, V), \quad T^V(V) = t_V(U, V).$$

Здесь T^U, T^V – обозначения вспомогательных функций.

Окончательно приведем вид решения (3.10) в исходных переменных:

$$v(x, t_*) = p(U(\mu), V(\mu)),$$

$$gh(x, t_*) = \frac{1}{4} q^2(U(\mu), V(\mu)),$$

$$x = X(\mu).$$

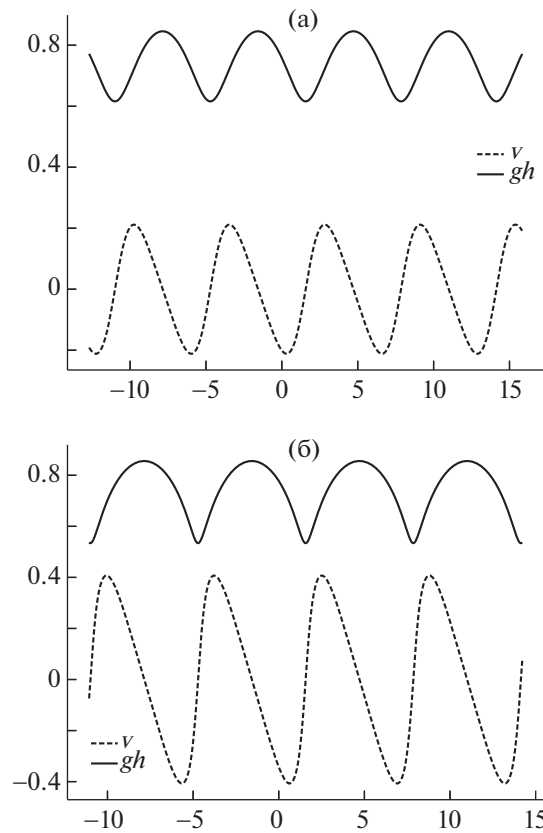
Несмотря на то что формулы для построения решения выглядят достаточно громоздко, это, в некотором смысле, точное решение исходной задачи Коши на изохроне. При проведении расчетов погрешности могут возникнуть лишь при численном интегрировании задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Подчеркнем, что ни конечно-разностные, ни конечно-элементные, ни конечно-объемные методы для решения не используются и погрешности аппроксимации не возникают.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ

Укажем некоторые свойства решения, типичные для подобных задач.

4.1. Невозможность опрокидывания

Для гиперболических уравнений метод годографа позволяет строить неоднозначные решения, которые возникают в результате опрокидывания профилей, например, инвариантов Римана или профилей исходных переменных. В случае уравнений мелкой воды на потолке, а скорее всего, для любых эллиптических уравнений, такое опрокидывание невозможно, по крайней мере, в области изменения переменных, имеющей физический смысл.



Фиг. 1. Решения $gh(x, t)$ (сплошная кривая), $v(x, t)$ в моменты времени $t = 0.495$ (а), 0.850 (б). Значения параметров $U_* = 1.57$ и $V_* = 0.62, 1.21$.

Для возникновения неоднозначности решения $v(x, t)$, $gh(x, t)$ по пространственной переменной x необходимо, чтобы непрерывная функция $x = X(\mu)$ при изменении параметра μ была многозначной. Это возможно лишь, если функция $X(\mu)$ имеет как участки роста, так и участки убывания, т.е. производная $dX/d\mu$ должна менять знак. Однако уравнение (3.9) с учетом (3.11) имеет вид

$$\frac{dX(\mu)}{d\mu} = -\sqrt{gh(t_V^2(U, V) + t_U^2(U, V))},$$

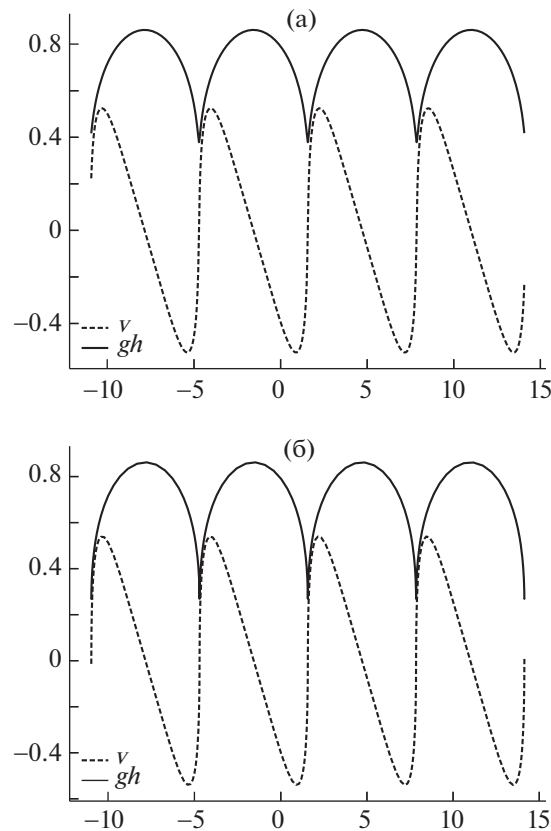
т.е. правая часть может изменять знак лишь при некотором значении параметра μ , когда толщина слоя жидкости $h = 0$, либо когда одновременно $t_U = t_V = 0$. Более того, в этом случае якобиан преобразования годографа $J(U, V)$ (см. (3.12)) обращается в нуль и требуется дополнительное уточнение постановки задачи.

С физической точки зрения обращение в нуль правой части уравнения (3.12) при $h = 0$ означает потерю связности слоя жидкости, т.е. разбиения слоя по пространству на отдельные области (капли).

4.2. Гамильтонова структура уравнений

Уравнения (3.8) имеют гамильтонову структуру. Роль гамильтониана играет функция $t(U, V)$. Это позволяет детально исследовать поведение изохрон на плоскости (U, V) . В частности, легко показать, что стационарная точка (U_0, V_0) уравнений (3.8), определяемая условиями $t_V(U_0, V_0) = 0$, $t_U(U_0, V_0) = 0$, всегда является седловой точкой ввиду того, что при $B \neq 0$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} t_{VV}(U_0, V_0) &= -t_{UU}(U_0, V_0), \\ t_{UU}(U_0, V_0)t_{VV}(U_0, V_0) - t_{UV}^2(U_0, V_0) &< 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$



Фиг. 2. Решения $gh(x, t)$ (сплошная кривая), $v(x, t)$ в моменты времени $t = 1.003$ (а), 1.019 (б). Значения параметров $U_* = 1.57$ и $V_* = 1.72, 1.94$.

4.3. Различие гиперболического и эллиптического случаев

В случае уравнений гиперболического и эллиптического типов неявные решения (2.9) и (3.10) представляют собой двухпараметрические семейства, зависящие от параметров (a, b) и (U, V) соответственно. В гиперболическом случае каждый инвариант Римана зависит от одного параметра, т.е. $R^1(x, t) = R_0^1(b)$, $R^2(x, t) = R_0^2(a)$. Фактически, предлагаемый метод решения является обобщением метода характеристик на систему двух квазилинейных уравнений. Напротив, в эллиптическом случае каждый инвариант Римана зависит сразу от пары параметров (U, V) .

В гиперболическом случае уравнение (3.12) имеет иной вид (см. [14, с. 51]):

$$\frac{dx(a(\mu), b(\mu))}{d\mu} = x_a t_b - x_b t_a = J(a, b) = (\lambda^2(r^1(b), r^2(a)) - \lambda^1(r^1(b), r^2(a))) t_a(a, b) t_b(a, b).$$

Правая часть уравнения по-прежнему является якобианом преобразования годографа, но в отличие от эллиптического случая может изменять знак.

5. РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

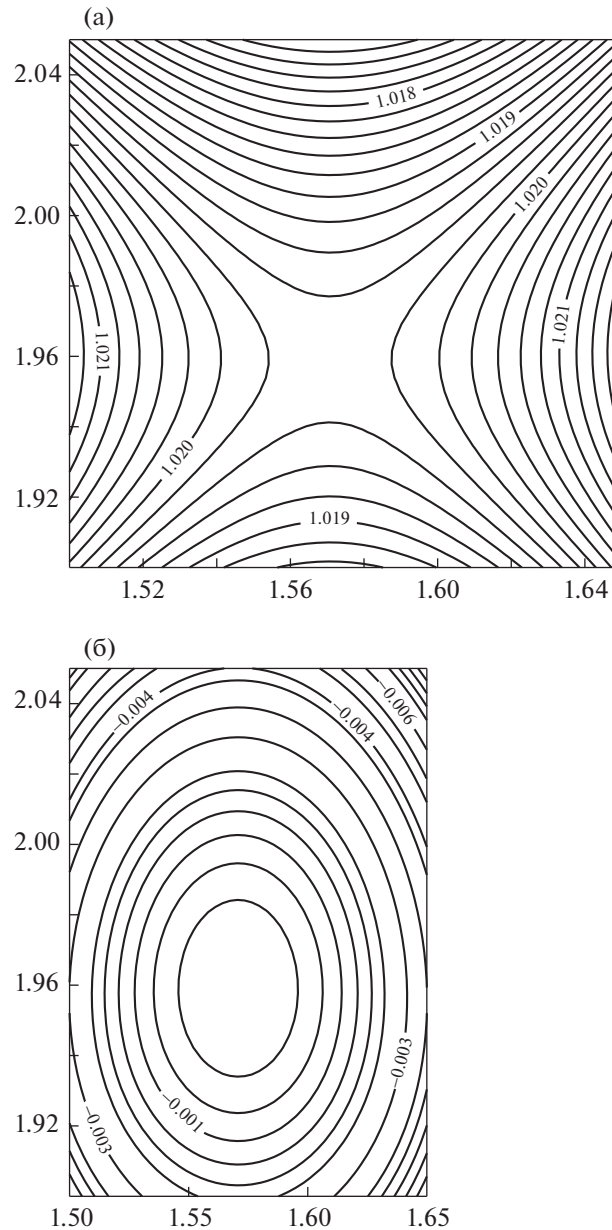
В качестве примера приведем результаты для задачи (1.1) в случае начальных данных (1.2), имеющих вид

$$v_0(\tau) = 0, \quad gh_0(\tau) = (1 + \varepsilon \sin \tau)^2, \quad (5.1)$$

где ε — амплитуда пространственно-периодического возмущения первоначально плоского слоя жидкости.

Тогда с учетом формул (1.3), (3.2) имеем

$$P_0(\tau) = 0, \quad Q_0(\tau) = 2(1 + \varepsilon \sin \tau),$$



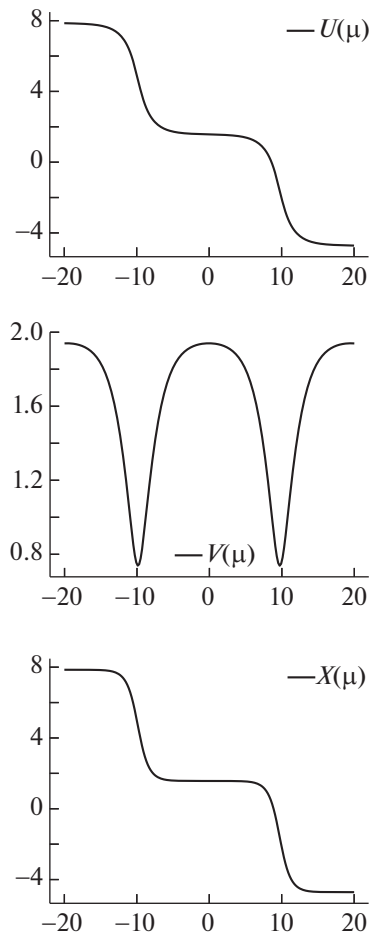
Фиг. 3. Линии уровня функции $t(U, V)$ (а) (изохроны) и линии уровня якобиана $J(U, V)$ (б) на плоскости (U, V) в окрестности седловой точки $U_0 \approx 1.57$, $V_0 \approx 1.96$.

$$p(U, V) = 2\varepsilon \cos U \operatorname{sh} V,$$

$$q(U, V) = 2(1 + \varepsilon \sin U \operatorname{ch} V).$$

Результаты расчетов для начальных данных (5.1) при $\varepsilon = 0.2$ приведены на фиг. 1–4. На фиг. 1, 2 показаны зависимости $gh(x, t)$, $v(x, t)$ для различных моментов времени. Видно, что с течением времени пространственная периодичность сохраняется. Профиль скорости $v(x, t)$ принимает пилообразную форму, а на первоначально гладкой свободной поверхности $v(x, t)$ образуется гребешкообразная структура с обострениями.

На фиг. 3а показана структура линий уровня функции $t(U, V)$ (изохрон) в окрестности седловой стационарной точки (см. соотношения (4.1)) при $U_0 \approx 1.57$, $V_0 \approx 1.96$. Во-первых, наличие картины изолиний позволяет на практике легко определять при заданном t_* начальные данные



Фиг. 4. Поведение функций $U(\mu)$, $V(\mu)$, $X(\mu)$ на изохроне $t_* = 1.019$ ($U_* = 1.57$, $V_* = 1.94$) в случае $\varepsilon = 0.2$.

(U_*, V_*) для задачи Коши (3.8), а во-вторых, позволяет сделать вывод о том, что с увеличением t_* все изохроны “стягиваются” к стационарной точке. При этом якобиан преобразования годографа $J(U, V)$ (см. (3.12)) стремится к нулю, как показано на фиг. 3б.

Наконец, на фиг. 4 показано поведение функций $U(\mu)$, $V(\mu)$, $X(\mu)$ на изохроне $t_* = 1.019$.

Заметим, что изменение параметра ε практически не влияет на качественное поведение решения. Достаточно большое значение амплитуды возмущения свободной поверхности $\varepsilon = 0.2$ выбрано лишь с целью улучшения визуализации результатов расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применимость развиваемого в работе метода, конечно же, не ограничивается задачей об опрокинутой мелкой воде. Метод применим для решения задачи Коши для систем двух квазилинейных уравнений эллиптического типа (после модификаций и гиперболического типа, см., например, [2], [9]–[12], [14]) в случае произвольных гладких и кусочно-гладких начальных данных. При построении решения не используются никакие аппроксимации уравнений, типичные для конечно-разностных методов, метода конечных элементов и метода конечных объемов. Решение задачи является точным в том смысле, что погрешности обусловлены лишь погрешностью интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективность метода определяется наличием явных соотношений, связывающих исходные переменные и инварианты Римана, а также наличием явных соотношений для функции Римана–Грина линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, возникающим при применении метода годографа. Задач, для которых это выполнимо,

не так уж и мало. Достаточно сказать, что практически все примеры неустойчивых сплошных сред (неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, самофокусировка света, бездисперсионное приближение уравнения Шрёдингера, модуляционные неустойчивости в плазме и т.п.), приведенные в [2], некоторые модели мелкой воды под твердой крышкой (см. [3], [4]), допускают исследование описанным методом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. Жданов Б.А., Трубников С.К. Квазиустойчивые газовые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
3. Овсянников Л.В. Модели двухслойной “мелкой воды” // Приклад. механ. и техн. физ. 1979. № 2. С. 3–14.
4. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1985. 319 с.
5. Book D.L., Ott E., Lampe M. Nonlinear evolution of the sausage instability // Phys. of Fluids (1958–1988). 1976. V. 19. P. 1982–1986.
6. Book D.L., Ott E., Sulton A.L. Rayleigh-Taylor instability in the “shallow water” approximation // Phys. of Fluids (1958–1988). 1974. V. 17. P. 676–678.
7. Ott E. Nonlinear evolution of the Rayleigh-Taylor instability of a thin layer / E. Ott // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 29. № 21. P. 1429–1432.
8. Senashov S.I., Yakhno A. Conservation laws, hodograph transformation and boundary value problems of plane plasticity // SIGMA. 2012. V. 8. 071. 16 p.
9. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical integration of two hyperbolic quasilinear equations. Part I. The shallow water equations // arXiv:1410.2832, 2014. 19 p.
10. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part II. Zonal electrophoresis equations // arXiv:1503.01762, 2014. 23 p.
11. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu. Hodograph method and numerical solution of the two hyperbolic quasilinear equations system. Part III. Two-beam reduction of the dense soliton gas equations // arXiv:1512.06710, 2015. 22 p.
12. Долгих Т.Ф. Решение задачи о переносе массы под действием электрического поля в двухкомпонентной смеси // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2017. № 3–1 (195–1). С. 28–35.
13. Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Решение эллиптических уравнений с периодическими данными для задачи зонального электрофореза // Вестн. ВГУ. Сер.: Физика. Математика. 2017. № 2. С. 85–96.
14. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В., Долгих Т.Ф. Метод годографа для решения гиперболических и эллиптических квазилинейных уравнений. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2015. 126 с.
15. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 668 с.
16. Copson E.T. On the Riemann-Green function // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. V. 1. P. 324–348.
17. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
18. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 449 с.