

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.926

**БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ПОЛНОСВЯЗНЫХ СЕТЯХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹⁾**

© 2022 г. С. Д. Глызин^{1,*}, А. Ю. Колесов^{1,**}

¹ 150000 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ, Центр интегрируемых систем, Россия

*e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

**e-mail: andkolesov@mail.ru

Поступила в редакцию 28.02.2021 г.
Переработанный вариант 28.02.2021 г.
Принята к публикации 04.09.2021 г.

Рассматриваются специальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений – так называемые полносвязные сети нелинейных осцилляторов. Для данного класса систем предлагаются некоторые методы, позволяющие разобраться с вопросами о существовании и устойчивости периодических решений типа бегущих волн. Характерная особенность наших методов заключается в том, что как при отыскании указанных циклов, так и при анализе их свойств устойчивости используются вспомогательные системы с запаздыванием. Библ. 10. Фиг. 3.

Ключевые слова: полносвязная сеть нелинейных осцилляторов, бегущая волна, система с запаздываниями, асимптотика, устойчивость, буферность.

DOI: 10.31857/S0044466922010070

1. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Полносвязной сетью нелинейных осцилляторов или просто полносвязной сетью назовем систему вида

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.1)$$

Здесь $m \geq 2$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, точка – дифференцирование по t ,

$$u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad (1.2)$$

а вектор-функции $F(x, u)$, $G(x)$ со значениями в \mathbb{R}^n бесконечно дифференцируемы по своим переменным $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Как правило, отвечающая сети (1.1), (1.2) парциальная система

$$\dot{x} = F(x, 0) \quad (1.3)$$

допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл, т.е. представляет собой нелинейный осциллятор. Мы же рассматриваем ситуацию, когда m одинаковых осцилляторов (1.3) взаимодействуют друг с другом по принципу “каждый со всеми”.

В частном случае, когда $F(x, u) = F(x) + D(x)u$, где $D(x)$ – квадратная матрица размера $n \times n$, система (1.1), (1.2) приобретает вид

$$\dot{x}_j = F(x_j) + D(x_j) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-29-10055/18).

Именно эта ситуация и представляет наибольший интерес, поскольку системы (1.4) возникают при математическом моделировании полносвязных нейронных и генных сетей (см., например, работы [1]–[5]).

В дальнейшем будем интересоваться проблемами существования и устойчивости у системы (1.1), (1.2) специальных периодических решений – так называемых бегущих волн. В первую очередь, речь пойдет о *канонической бегущей волне*, допускающей представление вида

$$x_j = x(t + (j - 1)\Delta), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.5)$$

Здесь $\Delta > 0$ – некоторый фазовый сдвиг, а вектор-функция $x(t)$ периодична по t с периодом $m\Delta / k$ при некотором $k : 1 \leq k \leq m - 1$.

Заметим, что любая каноническая бегущая волна (1.5) порождает целое семейство \mathcal{U}_k индуцированных бегущих волн. Действительно, фиксируем любую перестановку (j_1, j_2, \dots, j_m) набора индексов $(1, 2, \dots, m)$ и положим

$$x_{j_s} = x(t + (s - 1)\Delta), \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad (1.6)$$

где функция $x(t)$ та же самая, что и в (1.5). Далее, поскольку система (1.1), (1.2) инвариантна относительно замены переменных вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (1.7)$$

а компоненты (1.6) при указанной замене переходят в (1.5), то (1.6) также является периодическим решением нашей системы. Это решение назовем *индуцированной бегущей волной*. Что же касается количества циклов семейства \mathcal{U}_k , то оно равно $(m - 1)!$, а не $m!$, как можно было бы ожидать.

Для пояснения сути дела введем понятие эквивалентных замен (1.7). А именно, будем считать замены

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}), \quad (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})$$

эквивалентными, если набор индексов (i_1, i_2, \dots, i_m) есть циклическая перестановка набора индексов (j_1, j_2, \dots, j_m) . Нетрудно увидеть, что порожденные данными наборами индуцированные бегущие волны отличаются друг от друга лишь подходящим сдвигом по времени, а значит, совпадают. Следовательно, циклы семейства \mathcal{U}_k находятся во взаимно однозначном соответствии с классами эквивалентности замен (1.7). Количество же этих классов равно $(m - 1)!$.

Итак, построение семейства бегущих волн \mathcal{U}_k сводится к отысканию канонического цикла (1.5). При решении этой проблемы нам потребуется вспомогательное уравнение с запаздываниями

$$\dot{x} = F(x, u_\Delta), \quad u_\Delta = \sum_{s=1}^{m-1} G(x(t - s\Delta)), \quad (1.8)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \text{const} > 0$.

Будем считать, что на некотором интервале $(\Delta_1, \Delta_2) \subset (0, +\infty)$ изменения параметра Δ уравнение (1.8) допускает периодическое решение $x = x(t, \Delta)$ периода $T = T(\Delta) > 0$. В этом случае справедлива

Теорема 1.1. *Предположим, что найдется такое натуральное $k : 1 \leq k \leq m - 1$, при котором уравнение*

$$T(\Delta) = m\Delta/k \quad (1.9)$$

имеет корень $\Delta = \Delta_{(k)} \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Тогда в исходной системе (1.1), (1.2) данному корню соответствует цикл (каноническая бегущая волна)

$$C_k : \quad x_j = x_{(k)}(t + (j - 1)\Delta_{(k)}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.10)$$

периода $T_{(k)} = m\Delta_{(k)}/k$, где $x_{(k)}(t) = x(t, \Delta)|_{\Delta=\Delta_{(k)}}$.

Для доказательства заметим, что поскольку все функции

$$x_j(t) = x_{(k)}(t + (j - 1)\Delta_{(k)}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.11)$$

являются решениями одного и того же уравнения (1.8) при $\Delta = \Delta_{(k)}$, то выполняются равенства

$$\dot{x}_j(t) = F(x_j(t), u_{j,k}(t)), \quad u_{j,k}(t) = \sum_{s=1}^{m-1} G(x_j(t - s\Delta_{(k)})), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$

Далее, учтем в (1.12) вытекающие из (1.11) соотношения

$$x_j(t - s\Delta_{(k)}) = x_{j-s}(t), \quad x_j(t) = x_{m+j}(t) \quad \text{при} \quad -(m-1) \leq j \leq 0.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} u_{j,k}(t) &= \sum_{s=1}^{m-1} G(x_{j-s}(t)) = \sum_{s=1}^j G(x_{j-s}(t)) + \sum_{s=j+1}^{m-1} G(x_{j-s}(t)) = \\ &= \sum_{s=1}^j G(x_{j-s}(t)) + \sum_{s=j+1}^{m-1} G(x_{j-s+m}(t)) = \sum_{s'=0}^{j-1} G(x_{s'}(t)) + \sum_{s'=j+1}^{m-1} G(x_{s'}(t)) = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s(t)). \end{aligned}$$

А это значит, что компоненты (1.11) удовлетворяют исходной системе (1.1), (1.2). Теорема 1.1 доказана.

Всюду ниже считаем, что условия теоремы 1.1 выполнены, а значит, система (1.1), (1.2) имеет семейство бегущих волн \mathcal{U}_k , порожденное канонической бегущей волной (1.10). Заметим, далее, что поскольку любые два цикла из \mathcal{U}_k переходят друг в друга при соответствующей замене вида (1.7), то их свойства устойчивости одинаковы. Таким образом, проблема устойчивости всех бегущих волн из \mathcal{U}_k сводится к анализу расположения мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = A(t + (j-1)\Delta_{(k)})h_j + B(t + (j-1)\Delta_{(k)}) \sum_{s=1}^m C(t + (s-1)\Delta_{(k)})h_s, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (1.13)$$

получающейся при линеаризации исходной полностью связанной сети (1.1), (1.2) на цикле (1.10). Здесь $h_j = h_j(t) \in \mathbb{R}^n$, а матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t)) - \frac{\partial F}{\partial u}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t))G'_x(x_{(k)}(t)), \quad B(t) = \frac{\partial F}{\partial u}(x_{(k)}(t), u_{(k)}(t)), \\ C(t) &= G'_x(x_{(k)}(t)), \quad u_{(k)}(t) = \sum_{s=1}^{m-1} G(x_{(k)}(t - s\Delta_{(k)})). \end{aligned}$$

Наряду с (1.13) в дальнейшем нам понадобится вспомогательное линейное уравнение с запаздываниями

$$\dot{h} = A(t)h + B(t) \sum_{s=0}^{m-1} \kappa^s C(t - s\Delta_{(k)})h(t - s\Delta_{(k)}), \quad (1.14)$$

где $h^0(t) \in \mathbb{C}^n$, κ – произвольный комплексный параметр. Точнее говоря, нас будут интересовать его мультипликаторы $\nu_l(\kappa)$, $l = 1, 2, \dots$, занумерованные в порядке убывания модулей.

Поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к уравнению с запаздываниями (1.14). В связи с этим рассмотрим пространство $E = C([- (m-1)\Delta_{(k)}, 0]; \mathbb{C}^n)$ непрерывных при $- (m-1)\Delta_{(k)} \leq t \leq 0$ вектор-функций $h^0(t) = \text{colon}(h_1^0(t), \dots, h_n^0(t))$ с нормой

$$\|h^0\|_E = \max_{1 \leq j \leq n} \max_{-(m-1)\Delta_{(k)} \leq t \leq 0} |h_j^0(t)|.$$

Далее, оператором монодромии уравнения (1.14) назовем линейный ограниченный оператор $V : E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $h^0(t) \in E$ по правилу:

$$Vh^0 = h(t + m\Delta_{(k)}/k), \quad - (m-1)\Delta_{(k)} \leq t \leq 0, \quad (1.15)$$

где $h(t)$ – решение уравнения (1.14) на отрезке времени $0 \leq t \leq m\Delta_{(k)}/k$ с начальной функцией $h^0(t)$, $-(m-1)\Delta_{(k)} \leq t \leq 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $k = 1$ компактен и сам V). Что же касается мультипликаторов уравнения (1.14), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения оператора (1.15).

Остановимся на вопросе о связи между мультипликаторами систем (1.13) и (1.14). Имеет место следующая

Теорема 1.2. *Каждый мультипликатор v системы (1.13) допускает представление*

$$v = \kappa^{m/k}, \tag{1.16}$$

где κ – корень одного из уравнений

$$[v_l(\kappa)]^k = \kappa^m, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

И обратно, если при некотором $l = l_0$ уравнение (1.17) имеет корень $\kappa = \kappa_0 \neq 0$, то у исходной системы (1.13) существует мультипликатор $v = v_{l_0}(\kappa_0)$.

Доказательство. Фиксируем любой мультипликатор $v = \rho \exp(i\varphi)$, $\rho > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ системы (1.13) и предположим, что он является простым. В этом случае ему отвечает единственное (с точностью до множителя) решение Ляпунова-Флоке вида

$$h_j = \exp(\alpha t) h_{*,j}(t), \quad h_{*,j}(t) \in \mathbb{C}^n, \quad h_{*,j}(t + m\Delta_{(k)}/k) \equiv h_{*,j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{1.18}$$

$$\alpha = \frac{k}{m\Delta_{(k)}} (\ln \rho + i\varphi).$$

Отметим, далее, что поскольку система (1.13) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta_{(k)} \rightarrow t, \quad (h_1, h_2, \dots, h_m) \rightarrow (h_m, h_1, h_2, \dots, h_{m-1}), \tag{1.19}$$

то под действием этих замен решение (1.18) (в силу его единственности) перейдет в решение

$$h_j = \lambda \exp(\alpha(t + \Delta_{(k)})) h_{*,j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_{*}(t + \Delta_{(k)}) = \lambda h_{*}(t), \tag{1.20}$$

где $h_{*}(t) = \text{colon } (h_{*,1}(t), \dots, h_{*,m}(t))$, а элементами квадратной nm -мерной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}$$

являются нулевые и единичные матрицы размера $n \times n$.

Из установленного выше соотношения (1.20) следует, что

$$h_{*,m-j}(t) = \lambda^{j+1} h_{*,1}(t - (j+1)\Delta_{(k)}), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad \lambda^m = 1. \tag{1.21}$$

Что же касается компоненты $h_{*,1}(t)$, то в силу (1.13) она является решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{h} = -\alpha h + (A(t) + B(t)C(t))h + B(t) \sum_{s=2}^m C(t + (s-1)\Delta_{(k)}) h_{*,s}(t).$$

А так как функции $h_{*,s}(t)$, $s = 2, \dots, m$, в свою очередь, выражаются через $h_{*,1}(t)$ (см. (1.21)), то компонента $h_{*,1}(t)$ удовлетворяет также и уравнению с запаздываниями

$$\dot{h} = -\alpha h + A(t)h + B(t) \sum_{s=0}^{m-1} \lambda^s C(t - s\Delta_{(k)})h(t - s\Delta_{(k)}). \quad (1.22)$$

Проделанные построения показывают, что уравнение (1.22) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем, далее, в этом уравнении замену $\exp(\alpha t)h \rightarrow h$. В результате единичный мультипликатор перейдет в мультипликатор $\exp(m\alpha\Delta_{(k)}/k)$, а само уравнение (1.22) – в уравнение (1.14) при $\varkappa = \lambda \exp(\alpha\Delta_{(k)})$. Таким образом, с необходимостью найдется номер l , для которого

$$v_l(\varkappa) \Big|_{\varkappa=\lambda \exp(\alpha\Delta_{(k)})} = \exp(m\alpha\Delta_{(k)}/k) = v.$$

А отсюда и из очевидного равенства $v^k = \varkappa^m$ вытекают соотношения (1.16), (1.17).

В случае, когда мультипликатор v кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору отвечает ровно p линейно независимых решений Ляпунова–Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\alpha t)H(t)$, где столбцами матрицы $H(t)$ размера $mn \times p$ являются линейно независимые $T_{(k)}$ -периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (1.13) под действием замен (1.19) здесь вместо (1.20) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t + \Delta_{(k)}) = H(t)D \quad (1.23)$$

с некоторой невырожденной постоянной матрицей D размера $p \times p$.

Свойство (1.23) позволяет свести проблему обоснования формул (1.16), (1.17) к предыдущему случаю. Для того чтобы сделать это, фиксируем некоторое собственное значение λ матрицы D , а через e обозначим отвечающий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_*(t) = H(t)e$ справедливо соотношение (1.20). Последующие же рассуждения совпадают с изложенными выше.

Итак, мы установили, что любой мультипликатор v системы (1.13) может быть представлен в виде (1.16), где \varkappa удовлетворяет одному из уравнений (1.17). Убедимся теперь в справедливости обратного утверждения. В связи с этим предположим, что уравнение (1.17) с номером $l = l_0$ допускает корень $\varkappa = \varkappa_0 \neq 0$. Тогда уравнение

$$\dot{h} = -\alpha h + A(t)h + B(t) \sum_{s=0}^{m-1} \varkappa_0^s \exp(-\alpha s\Delta_{(k)})C(t - s\Delta_{(k)})h(t - s\Delta_{(k)}) \quad (1.24)$$

при

$$\alpha = \frac{k}{m\Delta_{(k)}} (\ln(\rho_0) + i\varphi_0), \quad \rho_0 > 0, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi, \quad (1.25)$$

где $\rho_0 \exp(i\varphi_0) = v_{l_0}(\varkappa_0)$, имеет нетривиальное $T_{(k)}$ -периодическое решение $\tilde{h}(t)$. Далее, введем в рассмотрение величину

$$\lambda = \varkappa_0 \exp(-\alpha\Delta_{(k)}) \quad (1.26)$$

и заметим, что в силу (1.25) и соотношения $\varkappa_0^m = [v_{l_0}(\varkappa_0)]^k$ указанное значение параметра λ удовлетворяет требуемому равенству $\lambda^m = 1$ (см. (1.21)). А отсюда, в свою очередь, следует, что при выбранном λ уравнения (1.24) и (1.22) совпадают.

На заключительном этапе доказательства введем в рассмотрение функцию $h_{*,1}(t) = \tilde{h}(t)$, а остальные компоненты $h_{*,j}(t)$, $j = 2, \dots, m$, определим посредством равенств (1.21), (1.26). Из установленной выше связи между уравнениями (1.24) и (1.22) вытекает, что в итоге получится решение Ляпунова–Флоке вида (1.18) исходной системы (1.13), отвечающее мультипликатору

$$v = \exp(m\alpha\Delta_{(k)}/k) = v_{l_0}(\varkappa_0).$$

Теорема 1.2 доказана.

Установленные теоремы доставляют некую общую методику исследования периодических решений типа бегущих волн в полносвязных сетях нелинейных осцилляторов. Действительно, вопрос о существовании канонической бегущей волны (1.5) сводится к отысканию цикла $x(t, \Delta)$ вспомогательного уравнения с запаздываниями (1.8) и к нахождению корней уравнений (1.9). Что же касается вопроса об устойчивости бегущих волн семейства 0u_k , то он решается отдельно и в силу теоремы 1.2 состоит в анализе расположения корней уравнений (1.17). Добавим еще, что хотя количество уравнений в системе (1.17), вообще говоря, счетно, но совокупность всех их ненулевых корней заведомо конечна (в противном случае конечномерная система (1.13) имела бы счетное число различных мультипликаторов, что невозможно).

Следует отметить, что изложенная выше методика использовалась ранее при анализе бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных осцилляторов (см. серию работ [6]–[9]). Но, как оказалось, она сохраняет силу и в случае полносвязных сетей (1.1), (1.2). Более того, нетрудно проверить, что аналоги теорем 1.1, 1.2 распространяются на полносвязные сети с запаздыванием

$$\dot{x}_j = F(x_j, x_j(t-1), u_j), \quad u_j = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.27)$$

где $F(x, y, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. Как и в случае (1.1), (1.2), системы вида (1.27) описывают функционирование различных нейронных и генных сетей.

Достаточно ясно, что проблемы анализа вспомогательных уравнений (1.8), (1.14), лежащих в основе нашей методики, в общем случае нелокальны. Но, тем не менее, в некоторых ситуациях, когда есть возможность применить какие-либо асимптотические методы, с указанными проблемами удается справиться. Одна из таких ситуаций рассматривается ниже.

2. СЛУЧАЙ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

В данном разделе изложенные выше методы исследования бегущих волн применяются к системе слабосвязанных осцилляторов

$$\dot{x}_j = F(x_j, u_j), \quad u_j = \varepsilon \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $F(x, u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $G(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, а соответствующая парциальная система (1.3) допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$x = x_0(t), \quad \dot{x}_0(t) \neq 0, \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t), \quad T_0 > 0. \quad (2.2)$$

Обратимся сначала к аналогичному (1.8) вспомогательному уравнению

$$\dot{x} = F(x, u_\Delta), \quad u_\Delta = \varepsilon \sum_{s=1}^{m-1} G(x(t - s\Delta)). \quad (2.3)$$

Заметим далее, что поскольку при $\varepsilon = 0$ оно переходит в (1.3), то естественно ожидать, что это уравнение допускает цикл $x = x(t, \varepsilon, \Delta)$ периода $T(\varepsilon, \Delta)$, обладающий свойствами

$$x(t, 0, \Delta) \equiv x_0(t), \quad T(0, \Delta) \equiv T_0$$

(т.е. асимптотически близкий к (2.2)). Что же касается аналогичного (1.9) уравнения

$$T(\varepsilon, \Delta) = m\Delta/k, \quad (2.4)$$

то в данном случае оно заведомо имеет решение, асимптотически близкое к kT_0/m .

Принимая во внимание перечисленные факты, предположим изначально, что параметр Δ в (2.3) задается равенством

$$\Delta = \frac{kT_0}{m(1 + \varepsilon\delta)}. \quad (2.5)$$

Здесь натуральное $k : 1 \leq k \leq m - 1$ произвольно фиксировано, а параметр $\delta \in \mathbb{R}$, имеющий порядок единицы, подлежит определению. Выполняя, далее, в уравнении (2.3) замену времени $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t$, приходим к уравнению

$$(1 + \varepsilon\delta) \frac{dx}{d\tau} = F(x, u), \quad u = \varepsilon \sum_{s=1}^{m-1} G(x(\tau - skT_0/m)). \quad (2.6)$$

Как будет показано в последующем, при подходящем выборе $\delta = \delta_{(k)}(\varepsilon)$ это уравнение допускает периодическое решение $x_{(k)}(\tau, \varepsilon)$, $x_{(k)}(\tau, 0) \equiv x_0(\tau)$, периода T_0 .

Перед формулировкой соответствующего строгого результата приведем некоторую дополнительную информацию. Рассмотрим сначала линейную однородную систему

$$\dot{h} = A_0(t)h, \quad (2.7)$$

где $A_0(t) = F'_x(x_0(t), 0)$, получающаяся из (1.3) при линеаризации на цикле (2.2). В силу предполагаемой экспоненциальной орбитальной устойчивости этого цикла данная система имеет простой единичный мультипликатор (которому отвечает периодическое решение $h = \dot{x}_0(t)$), а все остальные ее мультипликаторы по модулю меньше единицы. Что же касается соответствующей сопряженной системы

$$\dot{g} = -A_0^*(t)g, \quad (2.8)$$

то она допускает единственное (с точностью до множителя) нетривиальное T_0 -периодическое решение $g_0(t)$. Всюду ниже считаем, что

$$(\dot{x}_0(t), g_0(t)) \equiv 1, \quad (2.9)$$

где (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Перейдем далее от (2.7) к неоднородной системе

$$\dot{h} = A_0(t)h + f(t) \quad (2.10)$$

с произвольной T_0 -периодической непрерывной вектор-функцией $f(t) \in \mathbb{R}^n$. Как известно, эта система разрешима в классе T_0 -периодических функций в том и только том случае, когда правая часть $f(t)$ ортогональна в среднем периодическому решению $g_0(t)$ системы (2.8), т.е.

$$M[(f(t), g_0(t))] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} (f(t), g_0(t)) dt = 0. \quad (2.11)$$

Если же условие (2.11) выполняется, то система (2.10) имеет единственное T_0 -периодическое решение $h_f(t)$, удовлетворяющее требованию

$$M[(h_f(t), g_0(t))] = 0. \quad (2.12)$$

Возвращаясь к системе (2.6) и опираясь на изложенные факты, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Для любого натурального $k : 1 \leq k \leq m - 1$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon_k > 0$, что при всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$ существует единственная пара C^∞ -гладких по своим переменным функций*

$$(\delta_{(k)}(\varepsilon), x_{(k)}(\tau, \varepsilon)): \quad x_{(k)}(\tau + T_0, \varepsilon) \equiv x_{(k)}(\tau, \varepsilon), \quad x_{(k)}(\tau, 0) \equiv x_0(\tau), \quad (2.13)$$

$$M[(x_{(k)}(\tau, \varepsilon) - x_0(\tau), g_0(\tau))] \equiv 0,$$

обращающая уравнение (2.6) в верное равенство.

Доказательство. Выполним в (2.6) замену $x = x_0(\tau) + \varepsilon h$, где $x_0(\tau)$ – функция из (2.2), в которой аргумент t заменен на τ . В результате для новой переменной h получим систему

$$\frac{dh}{d\tau} = A_0(\tau)h + \Phi, \quad (2.14)$$

где $A_0(\tau) = F'_x(x_0(\tau), 0)$,

$$\Phi = -\varepsilon\delta \frac{dh}{d\tau} + \Phi_0(\tau, \delta) + \varepsilon\Phi_1(\tau, h, h(\tau - kT_0/m), h(\tau - 2kT_0/m), \dots, h(\tau - (m-1)kT_0/m), \varepsilon), \quad (2.15)$$

$$\Phi_0(\tau, \delta) = \frac{\partial F}{\partial u}(x_0(\tau), 0) \sum_{s=1}^{m-1} G(x_0(\tau - skT_0/m)) - \delta\dot{x}_0(\tau). \quad (2.16)$$

Что же касается вектор-функции $\Phi_1(\tau, h, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, \varepsilon)$, где $u_s \in \mathbb{R}^n$, $s = 1, 2, \dots, m-1$, то ее явный вид несущественен. Важно лишь, что она является T_0 -периодической по аргументу τ и C^∞ -гладкой по совокупности всех своих переменных.

При анализе системы (2.14) нам потребуются банаховы пространства $C_{\text{пер}}$ и $C_{\text{пер}}^1$, состоящие из периодических с периодом T_0 вектор-функций $f(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ и $f(\tau) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ соответственно. Кроме того, считаем, что в обоих случаях выполнены аналогичные (2.11) равенства

$$M[(f(\tau), g_0(\tau))] = 0, \quad (2.17)$$

где $g_0(\tau)$ получается из $g_0(t)$ при замене t на τ , а $M[\cdot]$ – среднее значение по τ . Нормы в $C_{\text{пер}}$ и $C_{\text{пер}}^1$ зададим формулами

$$\|f\|_{C_{\text{пер}}} = \max_{0 \leq \tau \leq T_0} \|f(\tau)\|, \quad \|f\|_{C_{\text{пер}}^1} = \|f\|_{C_{\text{пер}}} + \left\| \frac{df}{d\tau} \right\|_{C_{\text{пер}}},$$

где здесь и в последующем $\|\cdot\|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^n .

Перейдем далее от (2.14) к модифицированной системе

$$\Pi h = \Phi - M[(\Phi, g_0(\tau))]\dot{x}_0(\tau), \quad (2.18)$$

где, как и в (2.17), $M[\cdot]$ – среднее значение по τ , а линейный оператор Π имеет вид

$$\Pi h = \frac{dh}{d\tau} - A_0(\tau)h.$$

Заметим, что в силу соотношений (2.9) – (2.12), (2.15), (2.16) правая часть равенства (2.18) в случае $h \in C_{\text{пер}}^1$ принадлежит пространству $C_{\text{пер}}$, а оператор Π допускает непрерывный обратный $\Pi^{-1} : C_{\text{пер}} \rightarrow C_{\text{пер}}^1$. Таким образом, вопрос о разрешимости системы (2.18) в пространстве $C_{\text{пер}}^1$ эквивалентен разрешимости соответствующего операторного уравнения

$$h = \Pi^{-1}\{\Phi - M[(\Phi, g_0(\tau))]\dot{x}_0(\tau)\}. \quad (2.19)$$

При анализе уравнения (2.19) будем предполагать, что параметр δ пробегает некоторый произвольно фиксированный компакт Ω (выбором которого распорядимся позднее). Далее, положим

$$R_0 = \max_{\delta \in \Omega} \|h_0(\tau, \delta)\|_{C_{\text{пер}}^1},$$

где $h_0(\tau, \delta) = \Pi^{-1}\{\Phi_0 - M[(\Phi_0, g_0(\tau))]\dot{x}_0(\tau)\}$, Φ_0 – функция (2.16), и фиксируем величину $R > R_0$. Опираясь на соотношения (2.15), (2.16), нетрудно убедиться, что при всех достаточно малых ε правая часть уравнения (2.19) порождает в пространстве $C_{\text{пер}}^1$ нелинейный оператор, переводящий в себя шар радиуса R этого пространства с центром в нуле и являющийся сжимающим (с константой сжатия порядка ε). А отсюда и из принципа сжимающих отображений заключаем, что данное уравнение имеет единственное решение

$$h = h_*(\tau, \varepsilon, \delta), \quad h_* \in C_{\text{пер}}^1, \quad \|h_*\|_{C_{\text{пер}}^1} \leq R. \quad (2.20)$$

Добавим еще, что в силу C^∞ -гладкости по $\tau, \varepsilon, \delta$ функций (2.15), (2.16) таковой является и функция (2.20).

На завершающем этапе доказательства леммы определим имеющийся в запасе параметр δ из уравнения

$$M[(\Phi, g_0(\tau))] = 0. \tag{2.21}$$

Подставляя в это уравнение уже найденную функцию (2.20) и опираясь на формулы (2.15), (2.16), приходим к выводу, что оно записывается в виде

$$\delta = \delta_{0,k} + \varepsilon \Sigma_{(k)}(\varepsilon, \delta), \tag{2.22}$$

где

$$\delta_{0,k} = M \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u}(x_0(\tau), 0) \sum_{s=1}^{m-1} G(x_0(\tau - skT_0/m), g_0(\tau)) \right) \right], \tag{2.23}$$

а $\Sigma_{(k)}(\varepsilon, \delta)$ – некоторая C^∞ -гладкая по ε, δ скалярная функция. Далее, будем считать множество Ω изменения параметра δ таковым, что значение (2.23) является его внутренней точкой. Тогда, очевидно, уравнение (2.22) допускает единственное решение $\delta = \delta_{(k)}(\varepsilon)$, $\delta_{(k)}(0) = \delta_{0,k}$. Кроме того, из равенства (2.21) следует, что функция $h_{(k)}(\tau, \varepsilon) = h_{\mathbb{K}}(\tau, \varepsilon, \delta)|_{\delta=\delta_{(k)}(\varepsilon)}$ удовлетворяет уравнению (2.14) при $\delta = \delta_{(k)}(\varepsilon)$. Полагая затем $x_{(k)}(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon h_{(k)}(\tau, \varepsilon)$, получаем искомую пару функций (2.13). Лемма 2.1 доказана.

Обратим внимание на тот факт, что уравнение (2.22) для отыскания δ совпадает с уравнением (2.4) при условии (2.5). Таким образом, в процессе обоснования леммы 2.1 мы одновременно нашли требуемый цикл $x(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (2.3) и решили уравнение (2.4). А отсюда и из теоремы 1.1 вытекает следующая

Теорема 2.1. *Для любого натурального $k : 1 \leq k \leq m - 1$ существует такое достаточно малое $\varepsilon_k > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_k$ система (2.1) допускает каноническую бегущую волну*

$$x_j = x_{(k)}(\tau + (j - 1)kT_0/m, \varepsilon), \quad \tau = (1 + \varepsilon \delta_{(k)}(\varepsilon))t, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{2.24}$$

где $x_{(k)}(\tau, \varepsilon), \delta_{(k)}(\varepsilon)$ – функции (2.13).

Согласно изложенной в разд. 1 методике вопрос об устойчивости бегущей волны (2.24) связан с анализом соответствующего уравнения (1.14). В нашем случае после замены времени $\tau = (1 + \varepsilon \delta_{(k)}(\varepsilon))t$ упомянутое уравнение приобретает вид

$$(1 + \varepsilon \delta_{(k)}(\varepsilon)) \frac{dh}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)h + \varepsilon B(\tau, \varepsilon) \sum_{s=1}^{m-1} \mathcal{X}^s C(\tau - skT_0/m, \varepsilon)h(\tau - skT_0/m), \tag{2.25}$$

где

$$\begin{aligned} A(\tau, \varepsilon) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_{(k)}(\tau, \varepsilon), u_{(k)}(\tau, \varepsilon)), & B(\tau, \varepsilon) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x_{(k)}(\tau, \varepsilon), u_{(k)}(\tau, \varepsilon)), \\ C(\tau, \varepsilon) &= G'_x(x_{(k)}(\tau, \varepsilon)), & u_{(k)}(\tau, \varepsilon) &= \varepsilon \sum_{s=1}^{m-1} G(x_{(k)}(\tau - skT_0/m, \varepsilon)). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Перед формулировкой строгого утверждения о расположении мультипликаторов уравнения (2.25) введем некоторые обозначения. Для этого нам потребуются тейлоровские разложения

$$\begin{aligned} A(\tau, \varepsilon) &= A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau) + \dots, & B(\tau, \varepsilon) &= B_0(\tau) + \varepsilon B_1(\tau) + \dots, \\ C(\tau, \varepsilon) &= C_0(\tau) + \varepsilon C_1(\tau) + \dots \end{aligned} \tag{2.27}$$

коэффициентов (2.26). Здесь $A_0(\tau)$ – матрица из (2.14), а матрицы $B_0(\tau), C_0(\tau)$ задаются равенствами $B_0(\tau) = F'_u(x_0(\tau), 0)$, $C_0(\tau) = G'_x(x_0(\tau))$. Опираясь на формулы (2.27), положим

$$\begin{aligned} \alpha_{0,k} &= M[(A_1(\tau)\dot{x}_0(\tau) - \delta_{0,k}\ddot{x}_0(\tau), g_0(\tau))], \\ \alpha_{s,k} &= M[(B_0(\tau)C_0(\tau - skT_0/m)\dot{x}_0(\tau - skT_0/m), g_0(\tau))] \quad s = 1, 2, \dots, m - 1, \end{aligned} \tag{2.28}$$

где $\delta_{0,k}$ – величина (2.23). И наконец, обозначим через $v_l(\kappa, \varepsilon)$, $l = 1, 2, \dots$, – мультипликаторы уравнения (2.25), занумерованные в порядке убывания модулей. Имеет место следующая

Лемма 2.2. Для любого фиксированного $R > 0$ найдутся такое достаточно малое значение $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(R) > 0$ и такая постоянная $q = q(R) \in (0, 1)$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\kappa \in \mathbb{C}$, $|\kappa| \leq R$, уравнение (2.25) имеет простой аналитически зависящий от κ мультипликатор $v_1(\kappa, \varepsilon)$, $v_1(1, \varepsilon) \equiv 1$, с асимптотикой

$$v_1(\kappa, \varepsilon) = 1 + \varepsilon T_0 \sum_{s=0}^{m-1} \alpha_{s,k} \kappa^s + O(\varepsilon^2), \quad \frac{\partial v_1}{\partial \kappa}(\kappa, \varepsilon) = \varepsilon T_0 \sum_{s=1}^{m-1} s \alpha_{s,k} \kappa^{s-1} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Остальные же мультипликаторы $v_l(\kappa, \varepsilon)$, $l \geq 2$, этого уравнения лежат в круге $\{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa| \leq q\}$.

Доказательство. Для доказательства заметим, что за исключением формул (2.29) все утверждения леммы очевидны. Действительно, если параметр κ принадлежит фиксированному шару $\{\kappa \in \mathbb{C} : |\kappa| \leq R\}$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.25) переходит в уравнение, получающееся из (2.7) при замене t на τ . Тем самым, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по κ все мультипликаторы $v_l(\kappa, \varepsilon)$, $l \geq 1$, стремятся либо к мультипликаторам системы (2.7), либо к нулю. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$v_l(\kappa, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad |v_l(\kappa, \varepsilon)| \leq q, \quad l \geq 2,$$

где постоянная $q = q(R) \in (0, 1)$ не зависит от ε , κ , l . Добавим еще, что мультипликатор $v_1(\kappa, \varepsilon)$ в силу его простоты аналитичен по параметру κ и $v_1(1, \varepsilon) \equiv 1$ (поскольку при $\kappa = 1$ уравнение (2.25) есть линеаризация уравнения (2.6) при $\delta = \delta_{(k)}(\varepsilon)$ на цикле $x = x_{(k)}(\tau, \varepsilon)$).

Итак, осталось установить формулы (2.29). Для этого нам потребуется отвечающее мультипликатору $v_1(\kappa, \varepsilon)$ решение Ляпунова-Флоке. Поскольку указанный мультипликатор является простым, то это решение единственно (с точностью до множителя) и имеет вид

$$h = [h_0(\tau) + \varepsilon h_1(\tau) + O(\varepsilon^2)] \exp[(\varepsilon \alpha + O(\varepsilon^2))\tau], \quad h_0(\tau) = \dot{x}_0(\tau), \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{C}. \quad (2.30)$$

Далее, подставим соотношения (2.30) в (2.25) и приравняем коэффициенты при ε в левой и правой частях получившегося равенства. В результате для нахождения $h_1(\tau)$ приходим к линейной неоднородной системе

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{d\tau} - A_0(\tau)h_1 &= -\delta_{0,k} A_0(\tau)\dot{x}_0(\tau) + A_1(\tau)\dot{x}_0(\tau) + \\ &+ B_0(\tau) \sum_{s=1}^{m-1} \kappa^s C_0(\tau - skT_0/m)\dot{x}_0(\tau - skT_0/m) - \alpha \dot{x}_0(\tau). \end{aligned}$$

А так как данная система должна быть разрешимой в классе T_0 -периодических функций, то автоматически

$$\alpha = P_k(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{m-1} \alpha_{s,k} \kappa^s, \quad (2.31)$$

где $\alpha_{s,k}$, $s = 0, 1, \dots, m-1$ – коэффициенты (2.28). Остается воспользоваться формулой

$$v_1(\kappa, \varepsilon) = \exp[(\varepsilon P_k(\kappa) + O(\varepsilon^2))T_0],$$

из которой первое асимптотическое равенство (2.29) вытекает автоматически. Что же касается формулы для $\partial v_1(\kappa, \varepsilon)/\partial \kappa$, то она устанавливается аналогично. Лемма 2.2 доказана.

Перейдем теперь к анализу расположения корней аналогичных (1.17) уравнений

$$[v_l(\kappa, \varepsilon)]^k = \kappa^m, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2.32)$$

Прежде всего, локализуем возможные значения параметра κ . С этой целью обозначим через $V(\varepsilon)$ оператор монодромии аналогичной (1.13) линейной системы, отвечающей циклу (2.24), и заметим, что он допускает оценку

$$\|V(\varepsilon)\|_{\mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^{nm}} \leq R_*$$

с некоторой не зависящей от ε постоянной $R_* > 1$. А поскольку модуль любого мультипликатора цикла (2.24) не превосходит нормы оператора $V(\varepsilon)$, то в силу (1.16) для нас представляют интерес только значения \varkappa из множества

$$\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq R_*^{k/m}\}. \tag{2.33}$$

Обратимся далее к лемме 2.2 и в ее условиях выберем величину R равной $R_*^{k/m}$. В результате приходим к выводу, что, во-первых, уравнение (2.32) при $l = 1$ имеет в круге (2.33) ровно m корней

$$\varkappa_0 = 1, \quad \varkappa_r(\varepsilon) = \theta_r \left(1 + \varepsilon \frac{k}{m} T_0 P_k(\theta_r) \right) + O(\varepsilon^2), \quad r = 1, 2, \dots, m-1, \tag{2.34}$$

где $\theta_r = \exp(2\pi i r/m)$ – корни степени m из единицы; во-вторых, все корни уравнений (2.32) при $l \geq 2$ лежат в круге $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| < 1\}$.

Подведем итог. Опираясь на теорему 1.2 и формулы (2.34), получаем набор из m так называемых критических мультипликаторов

$$v_0(\varepsilon) \equiv 1, \quad v_r(\varepsilon) = v_1(\varkappa, \varepsilon)|_{\varkappa=\varkappa_r(\varepsilon)} = 1 + \varepsilon T_0 P_k(\theta_r) + O(\varepsilon^2), \quad r = 1, 2, \dots, m-1,$$

цикла (2.24), асимптотически близких к единице. Нетрудно увидеть, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ для их модулей справедливы асимптотические представления

$$|v_r(\varepsilon)| = 1 + \varepsilon T_0 \operatorname{Re}(P_k(\theta_r)) + O(\varepsilon^2), \quad r = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.35}$$

где $P_k(\varkappa)$ – многочлен (2.31). Остальные же мультипликаторы интересующего нас цикла по модулю меньше единицы. А отсюда, в свою очередь, вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. Цикл (2.24), доставляемый теоремой 2.1, экспоненциально орбитально устойчив при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при условиях

$$\operatorname{Re}(P_k(\theta_r)) < 0, \quad r = 1, 2, \dots, m-1. \tag{2.36}$$

Если же выполнено хотя бы одно противоположное строгое неравенство, то он неустойчив.

Перепишем условия (2.36) в виде, более удобном для последующего анализа. Для этого нам потребуется свойство $P_k(1) = 0$ многочлена (2.31), вытекающее из равенств $v_0(\varepsilon) = 1, \theta_0 = 1$ и представления (2.35) при $r = 0$. Объединяя данное свойство с явной формулой для $P_k(\varkappa)$ и формулами для $\theta_r, r = 1, 2, \dots, m-1$, приходим к выводу, что неравенства (2.36) эквивалентны оценкам

$$\lambda_{r,k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=1}^{m-1} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi r s}{m}\right) \right) \alpha_{s,k} > 0, \quad r = 1, 2, \dots, m-1, \tag{2.37}$$

где, напомним, $\alpha_{s,k}$ – коэффициенты из (2.28).

В свою очередь, формулы для величин $\lambda_{r,k}$ также можно преобразовать к более удобному виду. Для того чтобы сделать это, введем некоторые обозначения. Во-первых, для любого $p \in \mathbb{Z}$ положим

$$\delta_p = \sum_{s=1}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi i p s}{m}\right) = \begin{cases} m-1 & \text{при } p = 0 \pmod{m}, \\ -1 & \text{при } p \neq 0 \pmod{m} \end{cases} \tag{2.38}$$

и заметим, что

$$\delta_p = \delta_{-p}, \quad \delta_{p \pm m} = \delta_p \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{2.39}$$

Во-вторых, рассмотрим периодические с периодом 1 функции

$$\varphi(\theta) = M[(B_0(\tau)G(x_0(\tau - \theta T_0)), g_0(\tau))], \quad \psi(\theta) = -\frac{1}{T_0} \varphi'(\theta), \tag{2.40}$$

где среднее значение $M[\cdot]$, как и в (2.28), берется по переменной τ . Из формул (2.40) очевидным образом следует, что ряд Фурье функции $\psi(\theta)$ не содержит нулевой гармоники, т.е. имеет вид:

$$\psi(\theta) = \sum_{p=1}^{\infty} (c_p \exp(2\pi i p \theta) + \bar{c}_p \exp(-2\pi i p \theta)), \quad (2.41)$$

где $c_p \in \mathbb{C}$, $p \geq 1$, а чертой сверху здесь и далее обозначается комплексное сопряжение.

Возвращаясь к выражениям для $\lambda_{r,k}$, подставим в них соотношения

$$\alpha_{s,k} = \psi(ks/m), \quad s = 1, 2, \dots, m-1,$$

вместе с рядом (2.41) и привлечем равенства (2.38), (2.39). В результате после несложных преобразований приходим к выводу, что

$$\lambda_{r,k} = \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Re}(c_p) (2\delta_{pk} - \delta_{pk+r} - \delta_{pk-r}), \quad r = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.42)$$

Завершая рассмотрение случая слабо связанных осцилляторов, отметим, что поскольку условия устойчивости (2.37) бегущей волны (2.24) формулируются в терминах нелокального цикла (2.2), то возникает вопрос об их принципиальной реализуемости. Для решения этого вопроса достаточно привести конкретный пример, в котором упомянутые условия выполняются. Соответствующая система (2.1) описывается ниже.

В качестве парциальной системы (1.3) возьмем двумерную систему, которая в комплексной форме записи допускает представление

$$\dot{z} = z - (1 - i\omega_0)|z|^2 z, \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad \omega_0 = \operatorname{const} > 0. \quad (2.43)$$

Непосредственная проверка показывает, что эта система имеет экспоненциально орбитально устойчивый гармонический цикл

$$z_0(t) = \exp(i\omega_0 t). \quad (2.44)$$

Далее, отвечающие циклу (2.44) линейные системы (2.7), (2.8) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{h} &= (-1 + 2i\omega_0)h - (1 - i\omega_0) \exp(2i\omega_0 t) \bar{h}, & h &= h_1 + ih_2, & h_1, h_2 &\in \mathbb{R}, \\ \dot{g} &= (1 + 2i\omega_0)g + (1 - i\omega_0) \exp(2i\omega_0 t) \bar{g}, & g &= g_1 + ig_2, & g_1, g_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Несложный подсчет показывает, что интересующие нас периодические решения $h = h_0(t)$, $g = g_0(t)$ этих систем, удовлетворяющие аналогичному (2.9) условию $h_0(t)\bar{g}_0(t) + \bar{h}_0(t)g_0(t) \equiv 1$, задаются равенствами

$$h_0(t) = i\omega_0 \exp(i\omega_0 t), \quad g_0(t) = \frac{1}{2\omega_0} (\omega_0 + i) \exp(i\omega_0 t). \quad (2.45)$$

Рассмотрим теперь полностью связанную сеть осцилляторов (2.43) вида

$$\dot{z}_j = z_j - (1 - i\omega_0)|z_j|^2 z_j + \varepsilon d \bar{z}_j^{m-1} \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s^m, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.46)$$

где $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $d = \operatorname{const} \in \mathbb{C}$. Опираясь на формулы (2.40)–(2.42), (2.44), (2.45), нетрудно убедиться, что в данном случае

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &= \frac{m}{2} (\bar{d}(1 - i\omega_0) \exp(2\pi i m \theta) + d(1 + i\omega_0) \exp(-2\pi i m \theta)), \\ c_p &= \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq m, \\ \frac{m}{2} \bar{d}(1 - i\omega_0) & \text{при } p = m, \end{cases} \quad \lambda_{r,k} = m^2 \operatorname{Re}[\bar{d}(1 - i\omega_0)], \quad r = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

А это значит, что при выполнении условия

$$\operatorname{Re}[\bar{d}(1 - i\omega_0)] < 0 \quad (2.47)$$

справедливы и неравенства (2.37) при всех $k : 1 \leq k \leq m - 1$. Тем самым, каждая каноническая бегущая волна вида (2.24) системы (2.46), доставляемая теоремой 2.1, экспоненциально орбитально устойчива. Специфика рассматриваемой системы заключается в том, что эта бегущая волна задается равенствами

$$z_j = \xi(\epsilon) \exp \left\{ i \left(\omega(\epsilon)t + \frac{2\pi k}{m} (j-1) \right) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.48)$$

где $\omega(\epsilon) = \omega_0 \xi^2(\epsilon) + \epsilon(m-1)\xi^{2(m-1)}(\epsilon) \operatorname{Im} d$, а $\xi = \xi(\epsilon)$, $\xi(0) = 1$ – корень уравнения

$$1 - \xi^2 + \epsilon(m-1)\xi^{2(m-1)} \operatorname{Re} d = 0.$$

Напомним далее, что любая каноническая бегущая волна (2.48) порождает целое семейство устойчивых индуцированных бегущих волн, количество которых равно $(m-1)!$. А это значит, что условие (2.47) гарантирует реализуемость известного явления буферности. Суть данного явления заключается в том, что в случае (2.47) при подходящем уменьшении ϵ и увеличении m в системе (2.46) сосуществует любое наперед заданное конечное число устойчивых циклов.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

В этом разделе изучается вопрос об аттракторах системы (1.1), (1.2) в случае, когда все ее бегущие волны неустойчивы. Ответ на данный вопрос удается получить посредством численного анализа некоторой модельной полностью связанной сети нелинейных осцилляторов.

В качестве базовой модели возьмем аналогичную (2.46) систему, имеющую в комплексной форме записи вид:

$$\dot{z}_j = z_j - (1 + ic_1)|z_j|^2 z_j - v(1 + ic_2) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.1)$$

где $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$, $v = \operatorname{const} > 0$. Причины такого выбора модели состоят в том, что, во-первых, система (3.1) является простейшим представителем класса (1.1), (1.2); во-вторых, и это самое главное, ее канонические бегущие волны задаются явными формулами

$$C_k : \quad z_j = \xi_0 \exp \left\{ i \left(\sigma_0 t + \frac{2\pi k}{m} (j-1) \right) \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

где $k = 1, 2, \dots, m - 1$,

$$\xi_0 = \sqrt{1 + v}, \quad \sigma_0 = -c_1 \xi_0^2 + v c_2. \quad (3.3)$$

Следовательно, мы можем выписать явно и условия их неустойчивости.

Для того чтобы сделать это, введем в рассмотрение квадратичный полином

$$Q_m(v) = q_{1,m} v^2 + q_{2,m} v + q_{3,m} \quad (3.4)$$

переменной v , где

$$\begin{aligned} q_{1,m} &= (2 + m)^2 (1 + c_1 c_2) - (2 + m) m c_2 (c_1 - c_2) - m (c_1 - c_2)^2, \\ q_{2,m} &= 4(2 + m)(1 + c_1 c_2) - 2 m c_2 (c_1 - c_2) - m (c_1 - c_2)^2, \quad q_{3,m} = 4(1 + c_1 c_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Любая бегущая волна (3.2), (3.3) с номером $k \neq m/2$ неустойчива при выполнении неравенства*

$$Q_m(v) < 0, \quad (3.6)$$

где $Q_m(v)$ – многочлен (3.4) с коэффициентами (3.5). В случае же $k = m/2$ соответствующая бегущая волна неустойчива при условии

$$v m (1 + c_2^2) + 2(1 + c_1 c_2)(1 + v) < 0. \quad (3.7)$$

Доказательство. Выполним в системе (3.1) замены

$$z_j = (1 + h_j)\xi_0 \exp\left\{i\left(\sigma_0 t + \frac{2\pi k}{m}(j-1)\right)\right\}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

и отбросим нелинейные по h_j, \bar{h}_j слагаемые. В результате приходим к линейной системе

$$\dot{h}_j = -(1 + ic_1)\xi_0^2(h_j + \bar{h}_j) - \nu(1 + ic_2) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{m}(j-1)\right) \sum_{s=1}^m h_s \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}(s-1)\right), \quad (3.8)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

с постоянными коэффициентами. Далее, дополним (3.8) уравнениями для $\bar{h}_j, j = 1, 2, \dots, m$, и обозначим через $\Lambda = \Lambda_{2m \times 2m}$ матрицу получившейся системы. Нетрудно заметить, что спектр этой матрицы совпадает с собственными значениями спектральной задачи

$$\begin{aligned} -(1 + ic_1)\xi_0^2(v_j + w_j) - \nu(1 + ic_2) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{m}(j-1)\right) \sum_{s=1}^m v_s \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}(s-1)\right) &= \lambda v_j, \\ -(1 - ic_1)\xi_0^2(v_j + w_j) - \nu(1 - ic_2) \exp\left(i\frac{2\pi k}{m}(j-1)\right) \sum_{s=1}^m w_s \exp\left(-i\frac{2\pi k}{m}(s-1)\right) &= \lambda w_j, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $v_j, w_j, j = 1, 2, \dots, m$ – независимые комплексные переменные.

Итак, проблема устойчивости бегущей волны (3.2), (3.3) сводится к анализу расположения спектра задачи (3.9). Для вычисления собственных значений последней фиксируем целое $r : 0 \leq r \leq m-1$ и положим

$$v_j = v_{(r)} \exp\left(-i\frac{2\pi r}{m}(j-1)\right), \quad w_j = w_{(r)} \exp\left(-i\frac{2\pi r}{m}(j-1)\right), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

В результате для компонент $v_{(r)}, w_{(r)}$ в случае $r \neq m-k, k$ приходим к спектральной задаче вида

$$-(1 + ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) = \lambda v_{(r)}, \quad -(1 - ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) = \lambda w_{(r)}. \quad (3.10)$$

Что же касается собственных значений задачи (3.10), то они задаются равенствами

$$\lambda = 0, \quad \lambda = -2\xi_0^2. \quad (3.11)$$

Случаи $r = m-k, k \neq m/2; r = k, k \neq m/2; r = m/2, k = m/2$ требуют отдельного рассмотрения. Несложная проверка показывает, что в первом из них имеем дело с задачей

$$-(1 + ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) = \lambda v_{(r)}, \quad -(1 - ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) - \nu(1 - ic_2)mw_{(r)} = \lambda w_{(r)}, \quad (3.12)$$

во втором приходим к задаче

$$-(1 + ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) - \nu(1 + ic_2)mv_{(r)} = \lambda v_{(r)}, \quad -(1 - ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) = \lambda w_{(r)}, \quad (3.13)$$

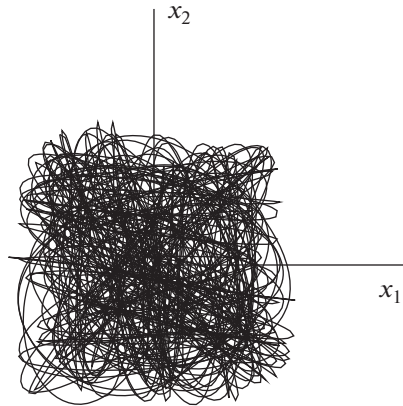
а в третьем получаем задачу

$$\begin{aligned} -(1 + ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) - \nu(1 + ic_2)mv_{(r)} &= \lambda v_{(r)}, \\ -(1 - ic_1)\xi_0^2(v_{(r)} + w_{(r)}) - \nu(1 - ic_2)mw_{(r)} &= \lambda w_{(r)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Остается добавить, что задачи (3.12), (3.13) при условии (3.6) допускают собственные значения в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, а задача (3.14) обладает этим свойством при выполнении условия (3.7). Теорема 3.1 доказана.

Интересно отметить, что в силу (3.10), (3.11) при $m \geq 4$ в спектре устойчивости любой бегущей волны (3.2), (3.3) имеется более одного нулевого характеристического показателя. Связано это с тем, что бегущие волны S_k включены в некоторый континуум периодических решений системы (3.1). Действительно, данная система допускает семейство циклов вида

$$z_j = \xi_0 \exp\{i(\sigma_0 t + \varphi_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$



Фиг. 1.

где ξ_0, σ_0 – величины (3.3). Что же касается постоянных $\varphi_j \in \mathbb{R}$, то они удовлетворяют равенству

$$\sum_{s=1}^m \exp(i\varphi_s) = 0,$$

а в остальном произвольны.

Остановимся еще на одном стационарном режиме системы (3.1), который выписывается явно. Это так называемый однородный цикл, существующий при $v(m-1) < 1$ и задающийся равенствами

$$z_j = \xi_0 \exp(i\sigma_0 t), \quad \xi_0 = \sqrt{1 - v(m-1)}, \quad \sigma_0 = -c_1 \xi_0^2 - v(m-1)c_2, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.15)$$

Аналогом теоремы 3.1 в данном случае является следующая

Теорема 3.2. Однородный цикл (3.15) экспоненциально орбитально устойчив при условиях

$$-1 + v(2m-1) < 0, \quad vt(1 + c_2^2) - 2(1 - v(m-1))(1 + c_1 c_2) > 0 \quad (3.16)$$

и неустойчив при строгом нарушении хотя бы одного из этих неравенств.

На доказательстве данной теоремы не останавливаемся, поскольку оно вполне аналогично обоснованию теоремы 3.1.

Обратимся теперь к интересующему нас вопросу об аттракторах системы (3.1) при условии неустойчивости всех ее бегущих волн. Ответ на него дает численный анализ этой системы, который проводился при $m = 5$ и при различных значениях параметров v, c_1, c_2 .

Начнем со случая

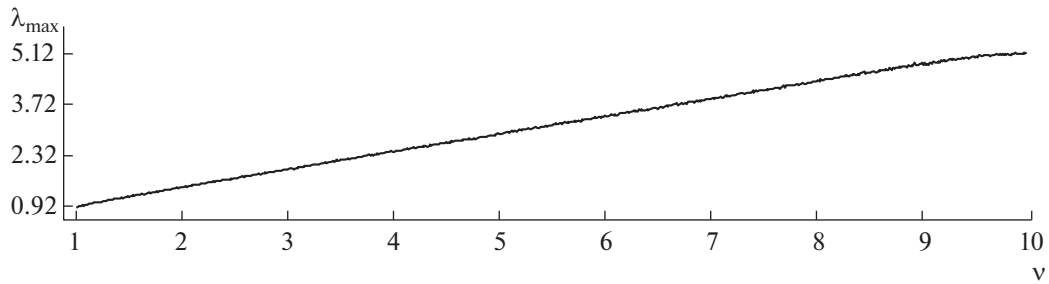
$$m = 5, \quad c_1 = 5, \quad c_2 = -1. \quad (3.17)$$

Нетрудно заметить, что при указанных m, c_1, c_2 и при любом $v > 0$ неравенство (3.6) выполняется, а значит, все бегущие волны (3.2), (3.3) неустойчивы. Устойчивыми же здесь при соответствующем выборе v могут оказаться хаотические режимы. Например, при условиях (3.17) и при $v = 1$ система (3.1) допускает хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями

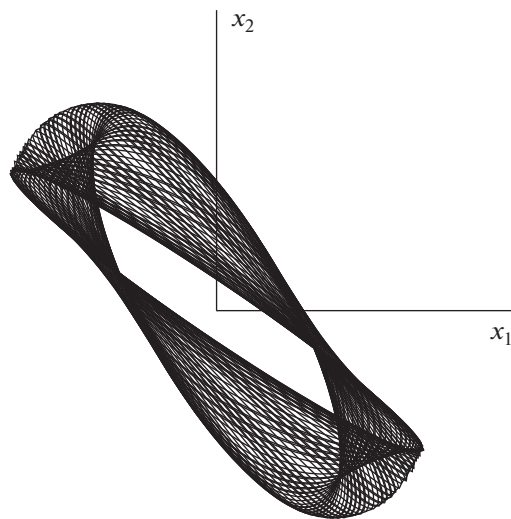
$$\lambda_1 \approx 1.83, \quad \lambda_2 \approx 1.357, \quad \lambda_3 \approx 0.722, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = 0, \quad \lambda_6 \approx -0.349, \quad \lambda_7 \approx -1.656, \\ \lambda_8 \approx -2.934, \quad \lambda_9 \approx -5.935, \quad \lambda_{10} \approx -8.53$$

(наличие двух нулевых показателей обусловлено тем обстоятельством, что помимо сдвига по времени система (3.1) инвариантна по отношению к замене переменных вида $\exp(i\alpha)z_j \rightarrow z_j, j = 1, 2, \dots, m, \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}$.) Проекция этого аттрактора на плоскость $(x_1, x_2), x_1 = \text{Re } z_1, x_2 = \text{Re } z_2$, представлена на фиг. 1.

Следует отметить, что в случае (3.17) система (3.1) имеет устойчивые хаотические режимы и при других значениях параметра v . А именно, хаотический аттрактор реализуется в ней при



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$1 \leq \nu \leq 10$. График зависимости от ν его старшего ляпуновского показателя λ_{\max} , построенный по точкам с шагом 0.01, показан на фиг. 2.

Впрочем, из факта неустойчивости бегущих волн существование хаотического аттрактора не вытекает автоматически. Действительно, при $m = 5$, $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $\nu = 5$ все режимы (3.2), (3.3) неустойчивы, а устойчивым оказывается двумерный инвариантный тор. Вывод о существовании такого тора сделан на основе анализа спектра устойчивости (среди ляпуновских показателей в этом случае имеется два нулевых, а остальные отрицательны). Проекция данного тора на плоскость (x_1, x_2) приведена на фиг. 3.

Еще более простая ситуация реализуется при

$$c_1, c_2 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad 1 + c_1 c_2 < 0, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (3.18)$$

Нетрудно увидеть, что здесь заведомо выполняются условия (3.6), (3.7), (3.16). Тем самым, в случае (3.18) бегущие волны (3.2), (3.3) неустойчивы, а устойчивым является однородный цикл (3.15).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные нами результаты численного анализа показывают, что в рамках базовой модели (3.1) при условиях (3.6), (3.7) возможны следующие основные ситуации: устойчивым является либо хаотический стационарный режим, либо двумерный инвариантный тор, либо однородный цикл. Следует также добавить, что перечисленные закономерности динамики, хотя и установлены для специальной системы (3.1), носят достаточно общий характер. Причины этого в том, что сама модельная система (3.1) отвечает за динамику произвольной полносвязной сети так назы-

ваемых квазигармонических осцилляторов. Описание указанной сети и вывод из нее модели (3.1) приводятся ниже.

Интересующая нас сеть квазигармонических осцилляторов представляет собой систему вида

$$\dot{x}_j = F(x_j, \varepsilon) + \varepsilon D(x_j, \varepsilon) \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m G(x_s, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, а вектор-функции $F(x, \varepsilon)$, $G(x, \varepsilon)$ и матрица $D(x, \varepsilon)$ размера $n \times n$ бесконечно дифференцируемы по $(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0]$, $n \geq 2$, $\varepsilon_0 > 0$. Предполагаем еще, что $F(0, \varepsilon) \equiv G(0, \varepsilon) \equiv 0$, т.е. система (4.1) допускает нулевое состояние равновесия.

Для формулировки дальнейших ограничений введем в рассмотрение тейлоровские разложения функций $F(x, \varepsilon)$, $G(x, \varepsilon)$ в точке $(x, \varepsilon) = (0, 0)$, имеющие вид

$$\begin{aligned} F(x, \varepsilon) &= (A_0 + \varepsilon A_1)x + F_2(x, x) + F_3(x, x, x) + O(\varepsilon^2 \|x\| + \varepsilon \|x\|^2 + \|x\|^4), \\ G(x, \varepsilon) &= G_0x + O(\varepsilon \|x\| + \|x\|^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где A_0, A_1, G_0 – квадратные матрицы размера $n \times n$, а F_2, F_3 – квадратичная и кубическая симметричные формы со значениями в \mathbb{R}^n . Всюду ниже считаем выполненными следующие условия.

Во-первых, матрица A_0 из (4.2) имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\lambda = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, которой отвечают собственные векторы a и \bar{a} , нормированные условиями $(a, b) = 1$, $(\bar{a}, b) = 0$. Здесь, как обычно, черта означает комплексное сопряжение, (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^n , а вектор b таков, что $A_0^*b = -i\omega_0 b$. Остальные же собственные значения матрицы A_0 лежат в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$.

Во-вторых, справедливы неравенства

$$\text{Re } \alpha_1 > 0, \quad \text{Re } \alpha_2 < 0, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (A_1 a, b), \quad \alpha_2 = 2(F_2(v_0, a), b) + 2(F_2(v_2, \bar{a}), b) + 3(F_3(a, a, \bar{a}), b), \\ v_0 &= -2A_0^{-1}F_2(a, \bar{a}), \quad v_2 = [2i\omega_0 I - A_0]^{-1}F_2(a, a), \end{aligned} \quad (4.4)$$

а через I обозначена единичная матрица.

В-третьих, предполагаем, что

$$\text{Re } \alpha_3 < 0, \quad (4.5)$$

где $\alpha_3 = (D_0 a, b)$, $D_0 = D(0, 0)G_0$, а G_0 – матрица из второго разложения (4.2).

Отметим, что условия на спектр матрицы A_0 и неравенства (4.3) в совокупности гарантируют реализуемость в парциальной системе

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon) \quad (4.6)$$

классической бифуркации Андронова-Хопфа. Действительно, как следует, например, из результатов монографии [10], при этих условиях и при $0 < \varepsilon \ll 1$ из нулевого состояния равновесия данной системы бифурцирует устойчивый квазигармонический цикл амплитуды порядка $\sqrt{\varepsilon}$ с частотой, близкой к ω_0 . Что же касается исходной системы (4.1), то она представляет собой сеть из m , $m \geq 2$, слабосвязанных генераторов квазигармонических колебаний, каждый из которых по отдельности описывается системой (4.6).

Поставим вопрос о существовании и устойчивости у системы (4.1) автоколебательных режимов, бифурцирующих при $\varepsilon > 0$ из нулевого положения равновесия. Асимптотику этих режимов будем искать в виде рядов по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$x_j = \sqrt{\varepsilon} x_{j,0}(t, \tau) + \varepsilon x_{j,1}(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_{j,2}(t, \tau) + \dots, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.7)$$

где

$$x_{j,0} = z_j(\tau) a \exp(i\omega_0 t) + z_j(\tau) \bar{a} \exp(-i\omega_0 t), \quad \tau = \varepsilon t, \quad (4.8)$$

$z_j(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, m$ – пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды, а функции $x_{j,s}(t, \tau)$, $s = 1, 2$ – некоторые тригонометрические полиномы переменной $\omega_0 t$ с коэффициентами, зависящими от медленного времени τ .

Для отыскания функций $x_{j,s}(t, \tau)$, $j = 1, 2, \dots, m$, $s = 1, 2$, подставим в (4.1) соотношения (4.7), (4.8) вместе с тейлоровскими разложениями (4.2) и будем последовательно приравнять коэффициенты при ϵ и $\epsilon^{3/2}$ в левой и правой частях получившегося выражения. В результате приходим к линейным неоднородным уравнениям вида

$$\frac{\partial x_{j,s}}{\partial t} = A_0 x_{j,s} + \gamma_{j,s}(t, \tau), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad s = 1, 2,$$

в которых переменная τ рассматривается как параметр.

При $s = 1$ неоднородности $\gamma_{j,s}(t, \tau)$ задаются равенствами

$$\gamma_{j,1} = F_2(x_{j,0}, x_{j,0}), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

а значит, являются линейными комбинациями нулевой и вторых гармоник переменной $\omega_0 t$. В том же виде ищем и функции $x_{j,1}(t, \tau)$. В итоге приходим к выводу, что

$$x_{j,1} = v_0 |z_j|^2 + z_j^2 v_2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{z}_j^2 \bar{v}_2 \exp(-2i\omega_0 t), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.9)$$

где v_0, v_2 – векторы из (4.4).

При $s = 2$ справедливы соотношения

$$\gamma_{j,2} = 2F_2(x_{j,0}, x_{j,1}) + F_3(x_{j,0}, x_{j,0}, x_{j,0}) + A_1 x_{j,0} + D_0 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m x_{s,0} - \frac{\partial x_{j,0}}{\partial \tau}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

из которых с учетом формул (4.9) вытекают представления

$$\begin{aligned} \gamma_{j,2} = & \gamma_{j,2}^{(1)}(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{\gamma}_{j,2}^{(1)}(\tau) \exp(-i\omega_0 t) + \gamma_{j,2}^{(3)}(\tau) \exp(3i\omega_0 t) + \\ & + \bar{\gamma}_{j,2}^{(3)}(\tau) \exp(-3i\omega_0 t), \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Как и выше, функции $x_{j,2}$ ищем в виде аналогичных (4.10) сумм с коэффициентами $w_{j,2}^{(1)}(\tau)$, $w_{j,2}^{(3)}(\tau)$.

На этом пути для $w_{j,2}^{(3)}$ получаем линейные неоднородные уравнения

$$(3i\omega_0 I - A_0)w_{j,2}^{(3)} = \gamma_{j,2}^{(3)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

каждое из которых в силу условий на спектр матрицы A_0 однозначно разрешимо.

Новые моменты возникают в процессе нахождения коэффициентов функций $x_{j,2}$ при первых гармониках $\exp(\pm i\omega_0 t)$. Для указанных коэффициентов получаются линейные неоднородные уравнения

$$(i\omega_0 I - A_0)w_{j,2}^{(1)} = \gamma_{j,2}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.11)$$

Заметим далее, что в отличие от предыдущего случая уравнения (4.11) оказываются вырожденными, а условия их разрешимости имеют вид

$$(\gamma_{j,2}^{(1)}, b) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (4.12)$$

Будем рассматривать условия (4.12) как уравнения для определения имеющихся в запасе комплексных амплитуд $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, m$. Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся в том, что эти уравнения записываются в виде

$$\frac{dz_j}{d\tau} = \alpha_1 z_j + \alpha_2 |z_j|^2 z_j + \alpha_3 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m z_s, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – постоянные из (4.3)–(4.5). Остается добавить, что после замен

$$z_j \exp(-i \operatorname{Im} \alpha_1 \cdot \tau) \rightarrow z_j, \quad \operatorname{Re} \alpha_1 \cdot \tau \rightarrow \tau, \quad \sqrt{-\operatorname{Re} \alpha_2 / \operatorname{Re} \alpha_1} z_j \rightarrow z_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \tau \rightarrow t,$$

система (4.13) преобразуется к виду (3.1).

Для придания изложенным построениям необходимой строгости заметим, что система (4.13) в силу своего вывода является укороченной нормальной формой исходной системы (4.1) на $2m$ -мерном устойчивом инвариантном многообразии в окрестности нулевого положения равновесия. Тем самым, установленные выше характерные особенности динамики системы (3.1) сохраняются и для полностью связанных сетей вида (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hopfield J.J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. P. 3088–3092.
2. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М.: Издательский дом “Вильямс”, 2006.
3. Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Задачи теории функционирования генных сетей // Сибирский ж. индустр. матем. 2003. Т. 6. № 2. С. 64–80.
4. Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.
5. Фадеев С.И., Лихошвай В.А. О гипотетических генных сетях // Сибирский ж. индустр. матем. 2003. Т. 6. № 3. С. 134–153.
6. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. № 2. С. 53–96.
7. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 10. С. 1227–1244.
8. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений // Теор. и матем. физ. 2013. Т. 175. № 1. С. 62–83.
9. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. № 4. С. 73–108.
10. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений. М.: Физматлит, 2004.