ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 1, с. 124–158

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О РАЗРУШЕНИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ 3+1-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДРЕЙФОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ[1)]

© 2022 г. М. О. Корпусов[1,*], Р. С. Шафир[1,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

**e-mail: korpusov@gmail.com*

***e-mail: romanshafir@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.01.2021 г.
Переработанный вариант 10.01.2021 г.
Принята к публикации 17.09.2021 г.

Рассмотрена задача Коши для нового уравнения, описывающего дрейфовые волны в магнитоактивной плазме. Доказаны существование и единственность локального во времени слабого решения задачи Коши. Рассматриваемое уравнение содержит степенную нелинейность $|u|^q$. Показано, что если $1 < q \leq 3$, то слабое решение $u(x, t)$ в широком классе начальных функций $u_0(x)$ отсутствует даже локально во времени, если же $3 < q \leq 5$, то отсутствуют глобальные во времени слабые решения задачи Коши в широком классе начальных функций, не зависящем от величины начальной функции, т.е. и для “малых” начальных функций. При $q > 4$, используя результаты теории распределений и метод сжимающих отображений, доказано существование единственного локального во времени слабого решения. Библ. 22.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466922010082

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с изучением нестабильностей плазмы, имеют актуальное значение, поскольку до сих пор технически не решена проблема о возможности удержания плазмы магнитным полем токамака. В этой связи возникает насущная необходимость в исследовании как вопросов устойчивости плазмы в магнитном поле, так и вопросов неустойчивости плазмы в магнитном поле. Настоящая работа посвящена вопросам взрывной неустойчивости (blow-up) решений задачи Коши для нелинейного уравнения дрейфовых волн в плазме, имеющего в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой сонаправленная с внешним постоянным и однородным магнитным полем $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3$, следующий вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + q_1|\phi|^q = 0, \quad \Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{1.1}$$

На уровне дисперсионных соотношений уравнение дрейфовых волн известно давно. Достаточно указать на обзорную работу [1]. Подробный вывод уравнения (1.1) изложен в следующем разделе.

Отметим, что уравнение (1.1) относится к уравнениям соболевского типа (см. [2]). Исследованию уравнений соболевского типа посвящено большое количество работ. Так, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребиной, А.А. Замышляевой (см. [3]–[5]) были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа Соболева была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [6]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [7], [8], а также в работах их учеников (см. работу Ю.Д. Плетнера [9]).

[1)]Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

В классической работе [10] С.И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. Отметим также работы Е.И. Галахова и О.А. Салиевой [11] и [12].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [13]–[15] и посвященные получению так называемых критических показателей для решений задач Коши для нелинейных уравнений соболевского типа. В настоящей работе, с одной стороны, мы получили два критических показателя: $q = 3$ и $q = 5$. При $q \in (1,3]$ слабое решение задачи Коши отсутствует даже локально во времени, а при $q \in (3,5]$ отсутствует глобальное во времени слабое решение даже для малых (ненулевых) начальных функций. С другой стороны, при $q > 4$ мы доказали существование и единственность локального во времени слабого решения задачи Коши.

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

В этом разделе мы приведем вывод рассматриваемого ниже нелинейного уравнения дрейфовых волн в плазме во внешнем магнитном поле (см. [16]–[19]).

Пусть $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3$ и $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – это прямоугольная правая декартова система координат. Рассмотрим систему уравнений квазистационарного электрического поля

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2.1}$$

где n_e – это концентрация свободных электронов, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ – векторы напряженности, индукции электрического поля и поляризации соответственно. В случае всего пространства $\mathbb{R}^3$ или ограниченной поверхностно односвязной области приходим к уравнению

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Рассматриваемые уравнения дополняются следующими уравнениями (см. [16]–[19]):

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{B_0}\left\{-[\nabla\phi, \mathbf{e}_3] + \frac{1}{\omega_B}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp\phi\right\} + v_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3),$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости ионов, c – скорость света, $\omega_B = eB_0/(Mc)$ – частота прецессии Лармора ионов в магнитном поле, M – масса ионов. Кроме того, рассмотрим нелокальное уравнение

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \int_0^t Q(|\phi|)ds = 0, \tag{2.2}$$

где функция $Q(|\phi|)$ описывает источники свободных зарядов, и мы будем рассматривать случай, когда $Q(|\phi|) = q_0|\phi|^q$. Из системы уравнений (2.1), (2.2) вытекает дифференциальное следствие

$$\frac{u_A^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + 4\pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0|\phi|^q = 0, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta := \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_\perp := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$u_A^2 := \frac{B_0^2}{4\pi n_0 M}, \quad \omega_B^2 = \left(\frac{eB_0}{Mc}\right)^2, \quad \varepsilon^2 := \frac{u_A^2}{c^2} \ll 1,$$

u_A — альфвеновская скорость ионов. Поэтому в силу малости ε вместо уравнения (2.3) рассматривают вырожденное уравнение при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi + \omega_B^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} + q_1|\phi|^q = 0, \quad q_1 := \pi e\frac{u_A^2}{c^2}q_0.$$

3. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Под классом функций $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ при $\gamma_1 \geq 0$ и $\gamma_2 \geq 0$ мы понимаем такие функции $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, что конечна следующая норма:

$$\|u\|_T := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}(1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2}|u(x,t)| < +\infty. \tag{3.1}$$

Можно доказать, что $\mathbb{C}_b((1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ является банаховым пространством относительно нормы (3.1).

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T]),$$
$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \quad \alpha_j \in \{0,1,2\}, \quad j = 1,2,3, \tag{3.2}$$
$$|\alpha| := \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leq 2, \quad k \in \{0,1,2\},$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.2) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы подразумеваем такие функции $u(x,t) \in \mathbb{C}_b^{2+2}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, которые состоят из таких функций $u(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]),$$

таких что $u(x,T) = u'(x,T) = u''(x,T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и носитель $\operatorname{supp} u(x,t)$ — компакт в $\mathbb{R}^3\otimes[0,T]$.

Под классом функций $\mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$D_t^k D_x^\alpha u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]), \tag{3.3}$$
$$D_t^k = \partial_t^k, \quad D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), \quad \alpha_j \in \{0,1,2\}, \quad j = 1,2,3,$$
$$|\alpha| := \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leq 2, \quad k \in \{0,1\},$$

причем всевозможные смешанные производные вида (3.3) перестановочны.

Под классом функций $\mathbb{C}^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$ мы понимаем такие функции $u(x)$, что

$$D_x^\alpha u(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3), \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,0), \quad \alpha_1,\alpha_2 \in \{0,1,2\}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2 \leq 2.$$

Под классом функций $\mathbb{C}^{(0,1)}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3\otimes(0,T]).$$

Под классом функций $\mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$ мы понимаем такие функции $u(x,t)$, что

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T]).$$

Можно доказать, что это пространство банахово относительно нормы

$$\sup_{(x,t)\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}\left[|u(x,t)| + \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\right] < +\infty.$$

Под классом функций $\mathbb{C}_0^{(2)}[0,T]$ мы подразумеваем функции $\phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0,T]$, удовлетворяющие равенствам $\phi(T) = \phi'(T) = \phi''(T) = 0$. Этот класс функций является банаховым пространством относительно стандартной нормы

$$\|\phi\| := \sup_{t\in[0,T]} |\phi(t)| + \sup_{t\in[0,T]} |\phi'(t)| + \sup_{t\in[0,T]} |\phi''(t)|.$$

4. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ОЦЕНКИ

Введем линейный оператор

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}(x,t), \tag{4.1}$$

где $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^1_+$,

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Найдем фундаментальное решение следующего уравнения в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathscr{E}](x,t) = \delta(t)\delta(x). \tag{4.2}$$

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (4.2) и получим уравнение, понимаемое в смысле обобщенных функций:

$$p^2\Delta_\perp\overline{\mathscr{E}}(x,p) + \overline{\mathscr{E}}_{x_3x_3}(x,p) = \delta(x),$$

одним из решений которого является обобщенная функция

$$\overline{\mathscr{E}}(x,p) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + p^2x_3^2}}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, мы получаем следующее явное выражение для фундаментального решения оператора (4.1):

$$\mathscr{E}(x,t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi|x_3|}\int_0^t J_0(\beta(x)s)ds, \quad \beta(x) := \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|x_3|}, \tag{4.3}$$

где $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Заметим, что для функции Бесселя $J_0(y)$ справедлива оценка

$$|J_0(y)| \le \frac{c_0}{\sqrt{|y|}} \quad \text{для всех} \quad y \ne 0, \tag{4.4}$$

где $c_0 > 0$ – некоторая постоянная. Поэтому для функции $\mathscr{E}(x,t)$ справедливы следующие цепочки оценок:

$$|\mathscr{E}(x,t)| \le \frac{1}{4\pi|x_3|}\int_0^t \frac{c_1}{\sqrt{s}\sqrt{\beta(x)}}ds = c_1\frac{t^{1/2}}{|x_3|^{1/2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}} \quad \text{при} \quad x_3 \ne 0, \quad (x_1,x_2) \ne (0,0), \quad t \ge 0. \tag{4.5}$$

Кроме того, при $x_3 \ne 0$ и $t \ge 0$ функция $\mathscr{E}(x,t)$ дифференцируема по переменной t и справедливо равенство

$$\frac{\partial\mathscr{E}(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi|x_3|}J_0(\beta(x)t) \quad \text{при} \quad x_3 \ne 0, \quad t \ge 0. \tag{4.6}$$

Из (4.4) вытекает оценка

$$\left|\frac{\partial\mathscr{E}(x,t)}{\partial t}\right| \le \frac{c_1}{t^{1/2}|x_3|^{1/2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/4}} \tag{4.7}$$

при $x_3 \neq 0$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, $t > 0$. Из оценок (4.5) и (4.7) вытекает, что функции

$$\mathscr{E}(x,t),\ \frac{\partial \mathscr{E}(x,t)}{\partial t} \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^4_+).$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *При $\gamma > 2$ для любых $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ имеет место оценка*

$$I_1 := \int\limits_0^{+\infty} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}} \leq \frac{K_1}{(1+|x|^2)^{1/4}}.$$

Доказательство. Пусть $|x| \geq 1$. Справедливы равенства

$$I_1 := I_{11} + I_{12} + I_{13},$$

$$I_{11} := \int\limits_0^{|x|/2} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}},$$

$$I_{12} := \int\limits_{|x|/2}^{2|x|} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}},$$

$$I_{13} := \int\limits_{2|x|}^{+\infty} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}}.$$

Отметим, что выполнено неравенство

$$|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi \geq (|x| - \rho)^2. \tag{4.8}$$

Для интеграла I_{11} с учетом (4.8) справедлива следующая оценка:

$$I_{11} \leq 2\pi \int\limits_0^{|x|/2} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} d\rho \frac{1}{(|x| - \rho)^{1/2}} \leq 2^{3/2}\pi \frac{1}{|x|^{1/2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} d\rho \leq \frac{K_{11}}{|x|^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 2. \tag{4.9}$$

Для интеграла I_{12} с учетом (4.8) справедлива оценка

$$I_{12} \leq 2\pi \int\limits_{|x|/2}^{2|x|} \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \frac{1}{\big||x| - \rho\big|^{1/2}} d\rho = \frac{1}{|x|^{\gamma-3/2}} \int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{r^{\gamma-1}|r-1|^{1/2}} dr \leq \frac{K_{12}}{|x|^{\gamma-3/2}} \leq \frac{K_{12}}{|x|^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 2.$$

Для интеграла I_{13} с учетом (4.8) справедлива оценка

$$I_{13} \leq 2\pi \int\limits_{2|x|}^{+\infty} d\rho \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \frac{1}{(\rho - |x|)^{1/2}} \leq \frac{1}{|x|^{\gamma-3/2}} \int\limits_2^{+\infty} dr \frac{1}{r^{\gamma-1}} \frac{1}{(r-1)^{1/2}} \leq \frac{K_{13}}{|x|^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 2.$$

Несложно рассмотреть случай $|x| < 1$ и доказать, что найдется такая постоянная $K_2 > 0$, что выполнено неравенство

$$I_1 \leq K_2. \tag{4.10}$$

Действительно, имеем

$$I_1 = I_{14} + I_{15},$$

$$I_{14} := \int\limits_0^{2} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}},$$

$$I_{15} := \int\limits_2^{+\infty} d\rho \frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(|x|^2 + \rho^2 - 2|x|\rho\cos\phi)^{1/4}}.$$

С учетом оценки (4.8) приходим к следующим оценкам:

$$I_{14} \le 2\pi\int\limits_0^2 \frac{\rho}{\left|\rho - |x|\right|^{1/2}}d\rho = \{r = \rho - |x|\} = 2\pi\int\limits_{-|x|}^{2-|x|}\frac{r + |x|}{|r|^{1/2}}dr =$$
$$= 2\pi\int\limits_0^{2-|x|}\frac{r + |x|}{r^{1/2}}dr + 2\pi\int\limits_{-|x|}^{0}\frac{r + |x|}{(-r)^{1/2}}dr \le K_{21} \quad \text{при} \quad |x| < 1,$$

$$I_{15} \le 2\pi\int\limits_2^{+\infty}\frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}\left|\rho - |x|\right|^{1/2}}d\rho \le 2\pi\int\limits_2^{+\infty}\frac{\rho}{(1+\rho^2)^{\gamma/2}(\rho - 1)^{1/2}}d\rho \le K_{22} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Из оценок (4.9), (4.10) вытекает, что

$$I_1 \le \frac{K_1}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}} \quad \text{для всех} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.11}$$

где $K_1 > 0$ – постоянная. Лемма доказана.

Справедлива следующая

Лемма 2. *При* $\gamma > 1$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^1$ *справедлива оценка*

$$I_2 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y - x|^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy \le \frac{K_3}{(1 + x^2)^{1/4}}, \quad K_3 > 0. \tag{4.12}$$

Доказательство. Без ограничения общности рассмотрим случай $x \ge 0$. Справедливы равенства

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{|y - x|^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy + \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(y + x)^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy := I_{21} + I_{22}.$$

Для интеграла I_{22} справедливы следующие оценки при $\gamma > 1$:

$$I_{22} \le \int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{y^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy = \hat{K}_{31} < +\infty \quad \text{при} \quad x \in [0, 1], \tag{4.13}$$

$$I_{22} \le \frac{1}{x^{1/2}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy = \frac{K_{31}}{x^{1/2}} \quad \text{при} \quad x \ge 1. \tag{4.14}$$

Для интеграла I_{21} при $x \ge 1$ справедливы равенства

$$\begin{gathered} I_{21} := I_{211} + I_{212} + I_{213}, \\ I_{211} := \int\limits_0^{x/2}\frac{1}{|y - x|^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy, \\ I_{212} := \int\limits_{x/2}^{2x}\frac{1}{|y - x|^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy, \\ I_{213} := \int\limits_{2x}^{+\infty}\frac{1}{|y - x|^{1/2}}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Для интеграла I_{211} при $x \ge 1$ справедлива оценка

$$I_{211} \le \frac{\sqrt{2}}{x^{1/2}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(1 + y^2)^{\gamma/2}}dy = \frac{K_{31}}{x^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 1. \tag{4.16}$$

Для интеграла I_{212} при $x \geq 1$ справедлива оценка

$$I_{212} \leq \int\limits_{x/2}^{2x} \frac{1}{|y-x|^{1/2}} \frac{1}{y^{\gamma}} dy = \{y = xz\} = \frac{1}{x^{\gamma-1/2}} \int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{|z-1|^{1/2}} \frac{1}{z^{\gamma}} dz = \frac{K_{32}}{x^{\gamma-1/2}} \leq \frac{K_{32}}{x^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 1.$$

Для интеграла I_{213} при $x \geq 1$ справедлива оценка

$$I_{213} \leq \int\limits_{2x}^{+\infty} \frac{1}{|y-x|^{1/2}} \frac{1}{y^{\gamma}} dy = \{y = zx\} \frac{1}{x^{\gamma-1/2}} \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{1/2}} \frac{1}{z^{\gamma}} dz = \frac{K_{33}}{x^{\gamma-1/2}} \leq \frac{K_{33}}{x^{1/2}} \quad \text{при} \quad \gamma > 1. \tag{4.17}$$

Из оценок (4.16), (4.17) и из (4.14), (4.15) вытекает оценка

$$I_{21} \leq \frac{K_3}{x^{1/2}} \quad \text{при} \quad x \geq 1, \quad \gamma > 1. \tag{4.18}$$

Рассмотрим теперь случай $x \in [0,1]$. Тогда для интеграла I_{21} справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{gathered} I_{21} = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{|y-x|^{1/2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\gamma/2}} dy + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{|y-x|^{1/2}} \frac{1}{(1+y^2)^{\gamma/2}} dy \leq \\ \leq \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{y^{\gamma}} dy + \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{|y-x|^{1/2}} dy = \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma-1} + 2(2-x)^{1/2} + 2x^{1/2} \leq \frac{2^{1-\gamma}}{\gamma-1} + 4. \end{gathered} \tag{4.19}$$

Таким образом, из (4.18), (4.19) и (4.13), (4.14) мы приходим к оценке (4.12). Лемма доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Для интегралов*

$$I_3 := \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathscr{E}(x-y, t-s)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dyds, \tag{4.20}$$

$$I_4 := \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\dfrac{\partial \mathscr{E}(x-y, t-s)}{\partial s}\right|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dyds \tag{4.21}$$

при $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *найдутся такие постоянные* $M_1 = M_1(\gamma_1, \gamma_2) > 0$ *и* $M_2 = M_2(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, *что будут выполнены неравенства*

$$I_3 \leq M_1 \frac{t^{3/2}}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}, \tag{4.22}$$

$$I_4 \leq M_2 \frac{t^{1/2}}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \tag{4.23}$$

для всех $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$.

Доказательство. Докажем сначала оценку (4.22) для интеграла I_3. В силу оценки (4.5) для функции $\mathscr{E}(x,t)$ мы получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{gathered} I_3 \leq c_1 \int\limits_{0}^{t} \sqrt{t-s} ds \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2)^{1/4}} \frac{1}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}} dy_1 dy_2 \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^1} \frac{1}{|x_3-y_3|^{1/2}} \frac{1}{(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} dy_3 \leq \frac{2}{3} c_1 t^{3/2} \frac{K_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}} \frac{K_2}{(1+x_3^2)^{1/4}}, \end{gathered}$$

где $M_1 := (2c_1 K_1 K_3)/3$, и мы воспользовались неравенствами (4.11) и (4.12) лемм 1 и 2 соответственно.

Для доказательства оценки (4.23) нужно воспользоваться оценкой (4.7). Лемма доказана.

Аналогичным образом можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Для интегралов*

$$I_5 := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\mathscr{E}(x-y,t)|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\,dy, \tag{4.24}$$

$$I_6 := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\left|\dfrac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\right|}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\,dy \tag{4.25}$$

при $\gamma_1 > 2$ и $\gamma_2 > 1$ *найдутся такие постоянные* $M_3 = M_3(\gamma_1, \gamma_2) > 0$ *и* $M_4 = M_4(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, *что будут выполнены неравенства*

$$I_5 \leq M_3 \frac{t^{1/2}}{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \tag{4.26}$$

для всех $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$,

$$I_6 \leq M_4 \frac{1}{t^{1/2}(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}} \tag{4.27}$$

для всех $(x,t) = (x_1, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T]$.

5. СЛАБОЕ ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим задачу Коши

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T], \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 1. *Классическим локальным во времени решением задачи Коши* (5.1), (5.2) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \cap \mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, удовлетворяющая уравнению (5.1) поточечно при $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T]$, начальным условиям (5.2) для всех $x \in \mathbb{R}^3$, причем $u_0(x), u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Дадим определение слабого решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 2. *Слабым обобщенным локальным во времени решением задачи Коши* (5.1), (5.2) называется функция $u(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$, которая удовлетворяет следующему равенству:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t) f(x,t)\,dxdt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0)\Delta_\perp u_0(x) + \phi(x,0)\Delta_\perp u_1(x)\right] dx\end{gathered} \tag{5.3}$$

для любой пробной функции $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$, причем

$$\Delta_\perp u_0(x), \Delta_\perp u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]).$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *Всякое классическое локальное во времени решение задачи Коши* (5.1), (5.2) *в смысле определения* 1 *является слабым локальным во времени решением задачи Коши в смысле определения* 2.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – классическое решение задачи Коши (5.1), (5.2) в смысле определения 1. Пусть, кроме того, $T > 0$ и $\varepsilon \in (0,T)$, $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$. Тогда справедливо равенство

$$\int_\varepsilon^T \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)u(x,t)dt = -\frac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp\phi(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon) + \Delta_\perp\phi(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial t}(x,\varepsilon) + \int_\varepsilon^T \Delta_\perp\phi(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dt.$$

Отсюда и используя финитность функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$, интегрированием по частям получим формулу

$$\int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)u(x,t)dxdt = -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\varepsilon)\Delta_\perp u(x,\varepsilon)dx + \int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,\varepsilon)\Delta_\perp\frac{\partial u}{\partial t}(x,\varepsilon)dx + \\ + \int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^3}\Delta_\perp\phi(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}dxdt. \tag{5.4}$$

С учетом (5.4) справедлива цепочка равенств

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t)dxdt + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^3}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,\varepsilon)\Delta_\perp u(x,\varepsilon) + \phi(x,\varepsilon)\Delta_\perp\frac{\partial u}{\partial t}(x,\varepsilon)\right]dx =$$
$$= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)f(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}^3}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)\Delta_\perp u_0(x) + \phi(x,0)\Delta_\perp u_1(x)\right]dx.$$

Таким образом, $u(x,t)$ – это слабое решение в смысле определения 2. Лемма доказана.

Будем использовать обозначения

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\tilde{f}(x,t) := \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Справделива

Лемма 6. *Пусть $u(x,t)$ – слабое локальное во времени решение задачи Коши в смысле определения 2. Тогда в смысле распределений из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$ функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x,t) = \tilde{f}(x,t) + \Delta_\perp u_0(x)\delta'(t) + \Delta_\perp u_1(x)\delta(t).$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – слабое решение задачи Коши в смысле определения 2. Пусть $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$ и $T > 0$. Тогда из (5.3) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\langle\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x,t),\phi(x,t)\rangle = \langle\tilde{u}(x,t),\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)\rangle = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)f(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)\Delta_\perp u_0(x) + \phi(x,0)\Delta_\perp u_1(x)\right]dx = \int_{-\infty}^T\int_{\mathbb{R}^3}\phi(x,t)\tilde{f}(x,t)dxdt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^3}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)\Delta_\perp u_0(x) + \phi(x,0)\Delta_\perp u_1(x)\right]dx = \langle\tilde{f}(x,t) + \delta'(t)\Delta_\perp u_0(x) + \delta(t)\Delta_\perp u_1(x),\phi(x,t)\rangle,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$. Лемма доказана.

Теперь мы можем дать определение обобщенного решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 3. *Обобщенным локальным во времени решением задачи Коши* (5.1), (5.2) называется обобщенная функция $\tilde{u}(x,t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$, обращающаяся в нуль при $t < 0$, и такая, что для всех $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ выполнено равенство

$$\left\langle \tilde{u}(x,t), \mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t) \right\rangle = \left\langle F(x,t), \phi(x,t) \right\rangle,$$

где

$$F(x,t) = \tilde{f}(x,t) + \delta'(t)\Delta_{\perp}u_0(x) + \delta(t)\Delta_{\perp}u_1(x),$$

$$\Delta_{\perp}u_0(x),\ \Delta_{\perp}u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad \tilde{f}(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)).$$

В силу результата теоремы 11.3 из [20] справедлива следующая основная

Теорема 1. *Пусть функции* $f(x,t)$, $\Delta_{\perp}u_0(x)$ *и* $\Delta_{\perp}u_1(x)$ *таковы, что существуют свертки*

$$V_3(x,t) := \mathcal{E}(x,t) * \tilde{f}(y,\tau),$$

$$V_3^{(0)}(x,t) := \mathcal{E}(x,t) * \Delta_{\perp}u_1(x), \quad V_3^{(1)}(x,t) := \frac{\partial \mathcal{E}(x,t)}{\partial t} * \Delta_{\perp}u_0(x)$$

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$. *Тогда обобщенное локальное во времени решение задачи Коши* (5.1), (5.2) *в смысле определения* 3 *представимо в виде суммы трех неклассических волновых потенциалов*:

$$\tilde{u}(x,t) = V_3(x,t) + V_3^{(0)}(x,t) + V_3^{(1)}(x,t).$$

Из этой теоремы вытекает следующая важная

Теорема 2. *Всякое обобщенное локальное во времени решение* $\tilde{u}(x,t)$ *задачи Коши* (5.1), (5.2) *в смысле определения* 3 *удовлетворяет следующему поточечному равенству*:

$$\tilde{u}(x,t) = V_3(x,t) + V_3^{(0)}(x,t) + V_3^{(1)}(x,t) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T),$$

если

$$V_3(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t-\tau)\tilde{f}(y,\tau)dyd\tau \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)),$$

$$V_3^{(0)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(x-y, t)\Delta_{\perp}u_1(y)dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)),$$

$$V_3^{(1)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathcal{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta_{\perp}u_0(y)dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)),$$

а $\mathcal{E}(x,t)$ – *фундаментальное решение*, *определенное равенством* (4.3).

Дадим определение слабого обобщенного глобального во времени решения задачи Коши

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4_+ := \mathbb{R}^3 \otimes (0, +\infty), \tag{5.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{5.8}$$

Определение 4. *Слабым глобальным во времени обобщенным решением задачи Коши* (5.7), (5.8) называется функция $u(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty))$, которая удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt = \int\limits_{0}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t)f(x,t)dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0)\Delta_{\perp}u_0(x) + \phi(x,0)\Delta_{\perp}u_1(x) \right] dx$$

для любой пробной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, +\infty))$, причем

$$\Delta_{\perp}u_0(x),\ \Delta_{\perp}u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3), \quad f(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (0, +\infty)).$$

Справедлива аналогичная утверждению теоремы 2

Теорема 3. *Всякое обобщенное глобальное во времени решение* $\tilde{u}(x,t)$ *задачи Коши* (5.7), (5.8) *в смысле определения* 4 *удовлетворяет поточечному равенству*

$$\tilde{u}(x,t) = V_3(x,t) + V_3^{(0)}(x,t) + V_3^{(1)}(x,t) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,+\infty),$$

если

$$V_3(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)\tilde{f}(y,\tau)dyd\tau \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,+\infty)),$$

$$V_3^{(0)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta_\perp u_1(y)dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,+\infty)),$$

$$V_3^{(1)}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t}\Delta_\perp u_0(y)dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,+\infty)),$$

а $\mathscr{E}(x,t)$ *— фундаментальное решение, определенное равенством* (4.3), *где* $\tilde{u}(x,t)$ *и* $\widetilde{f}(x,t)$ *определены равенствами* (5.5) *и* (5.6).

6. СВОЙСТВА ОБЪЕМНОГО И ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим сначала объемный потенциал

$$U_0[\rho](x,t) := \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau,$$
$$K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau) := -\frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\times \tag{6.1}$$
$$\times\frac{1}{4\pi|x_3-y_3|}\int\limits_0^{t-\tau} J_0(\beta(x-y)s)ds, \quad \beta(x-y) = \frac{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{|x_3-y_3|}.$$

Справедлива

Лемма 7. *При* $\gamma_1 > 2$ *и* $\gamma_2 > 1$ *оператор*

$$U_0 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]).$$

Кроме того, если $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *то*

$$U_0(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$$

и справедливы предельные свойства

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|U_0(x,t)| = 0, \quad \lim_{t\to+0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t}\right| = 0. \tag{6.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем, что если $\rho(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, то $U_0(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Прежде всего введем обозначение

$$Ц_a(x) := \{y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < a^2, |y_3-x_3| < a\}, \quad a > 0. \tag{6.3}$$

Пусть $(x^1, t^1), (x^2, t^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]$ и без ограничения общности $t^2 > t^1$. Тогда при $R > \varepsilon$ справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\left|U_0(x^2, t^2) - U_0(x^1, t^1)\right| \leq \int\limits_{t^1}^{t^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau + \\ + \int\limits_0^{t^1}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|[K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau) - K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)]\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau := L_1 + L_2, \tag{6.4}$$

$$L_2 \leq L_{21} + L_{22} + L_{23} + L_{24} + L_{25},$$

$$L_{21} := \int\limits_0^{t^1}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x^2)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau,$$

$$L_{22} := \int\limits_0^{t^1}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x^1)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau,$$

$$L_{23} := \int\limits_0^{t^1}\int\limits_{Ц_\varepsilon(x^2)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau,$$

$$L_{24} := \int\limits_0^{t^1}\int\limits_{Ц_\varepsilon(x^1)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)\right||\rho(y, \tau)|dyd\tau,$$

$$L_{25} := \int\limits_0^{t^1}\left|\int\limits_{Ц_R(x^2)\setminus Ц_\varepsilon(x^2)} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2, y, t^2 - \tau)\rho(y, \tau)dy - \int\limits_{Ц_R(x^1)\setminus Ц_\varepsilon(x^1)} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1, y, t^1 - \tau)\rho(y, \tau)dy\right|d\tau.$$

Пусть $\delta > 0$ – произвольное фиксированное. Тогда в силу оценки (4.20) найдутся такое достаточно большое $R > 0$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$, что будут выполнены неравенства

$$L_{21} < \frac{\delta}{6}, \quad L_{22} < \frac{\delta}{6}, \quad L_{23} < \frac{\delta}{6}, \quad L_{24} < \frac{\delta}{6}.$$

Кроме того, при фиксированных $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое малое $\eta = \eta(\delta, R, \varepsilon) > 0$, что при условии

$$|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^2 < \eta^2 \tag{6.5}$$

выполнены неравенства

$$L_1 < \frac{\delta}{6} \quad \text{и} \quad L_{25} < \frac{\delta}{6}. \tag{6.6}$$

Таким образом, из (6.4)–(6.6) вытекает утверждение о том, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что, как только выполнено неравенство (6.5), имеет место неравенство

$$\left|U_0(x^2, t^2) - U_0(x^1, t^1)\right| < 6\frac{\delta}{6} = \delta \Rightarrow U_0(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T]).$$

Шаг 2. Докажем теперь, что на самом деле $U_0(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$, как только $\rho(x, t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$. В силу результата шага 1 нам достаточно доказать, что найдется такая постоянная $M_4(T) > 0$, что

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} |U_0(x, t)| \leq M_4(T) < +\infty.$$

Действительно, из оценки (4.22) интеграла (4.20) и определения (6.1) справедлива оценка

$$|U_0(x,t)| \leq M_1 T^{3/2} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} |\rho(x,t)| := M_4(T) < +\infty.$$

Шаг 3. Рассуждая так же, как на шаге 1, с учетом оценок (4.22) и (4.23) леммы 3, можно доказать, что если $\rho(x,t)\in\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3\otimes[0,T])$, то для любого $(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]$ справедливо равенство

$$\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t} \rho(y,\tau)dyd\tau, \tag{6.7}$$

где мы воспользовались равенством (4.3).

Действительно, справедливо следующее равенство:

$$\begin{gathered} \frac{U_0(x,t+\Delta t)-U_0(x,t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{t+\Delta t}\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t+\Delta t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau - \\ -\frac{1}{\Delta t}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t+\Delta t-\tau)\rho(y,\tau)dyd\tau + \\ +\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t+\Delta t-\tau)-K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\Delta t}\rho(y,\tau)dyd\tau := Y_1+Y_2. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Сначала получим оценку для Y_1. С учетом оценки (4.20) справедлива цепочка выражений

$$\begin{gathered} |Y_1| = \left|\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,\tau+\Delta t)\rho(y,t-\tau)dyd\tau\right| \leq |2\Delta t|^{1/2} M_1 \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}|\rho(y,t)| \to +0 \\ \text{при} \quad |\Delta t|\to +0. \end{gathered} \tag{6.9}$$

Теперь рассмотрим слагаемое Y_2. Справедливы следующие выражения:

$$Y_2 = \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \frac{K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s+\Delta t)-K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s)}{\Delta t}\rho(y,t-s)dyds = Y_{21}+Y_{22}+Y_{23},$$

$$Y_{21} := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x)} \frac{K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s+\Delta t)-K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s)}{\Delta t}\rho(y,t-s)dyds,$$

$$Y_{22} := \int_0^t\int_{Ц_\varepsilon(x)} \frac{K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s+\Delta t)-K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s)}{\Delta t}\rho(y,t-s)dyds,$$

$$Y_{23} := \int_0^t\int_{Ц_R(x)\setminus Ц_\varepsilon(x)} \frac{K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s+\Delta t)-K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,s)}{\Delta t}\rho(y,t-s)dyds,$$

$$Y_{24} := \int_0^t\int_{Ц_R(x)\setminus Ц_\varepsilon(x)} G_0(x,y)J_0(\beta(x-y)s)\rho(y,t-s)dyds,$$

$$Y_{25} := \int_0^t\int_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x)} G_0(x,y)J_0(\beta(x-y)s)\rho(y,t-s)dyds,$$

$$Y_{26} := \int_0^t\int_{Ц_\varepsilon(x)} G_0(x,y)J_0(\beta(x-y)s)\rho(y,t-s)dyds,$$

где

$$G_0(x,y) := -\frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\frac{1}{4\pi|x_3-y_3|}.$$

Пусть $\delta > 0$, тогда при достаточно большом $R > 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ в силу оценки (4.21) и (6.1) будут справедливы неравенства

$$|Y_{21}| \le \frac{\delta}{5}, \quad |Y_{22}| < \frac{\delta}{5}, \quad |Y_{25}| \le \frac{\delta}{5}, \quad |Y_{26}| < \frac{\delta}{5}. \tag{6.10}$$

Фиксируем эти $R > \varepsilon > 0$. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|Y_{23} - Y_{24}| \le \int_0^t \int_{Ц_R(x)\setminus Ц_\varepsilon(x)} |G_0(x,y)| \frac{1}{|\Delta t|}\int_s^{s+|\Delta t|} |J_0(\beta(x-y)\tau) - J_0(\beta(x-y)s)||\rho(y,t-s)|d\tau dy ds. \tag{6.11}$$

Отметим, что имеют место соотношения

$$\begin{gathered}|J_0(\beta(x-y)\tau) - J_0(\beta(x-y)s)| = \left|\int_s^\tau \frac{\partial}{\partial\sigma} J_0(\beta(x-y)\sigma)d\sigma\right| \le |\tau - s|\beta(x-y)\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|J_1(\beta(x-y)\sigma)| \le \\ \le |\Delta t|\beta(x-y)\sup_{\sigma\in[s,\tau]}|J_1(\beta(x-y)\sigma)| \le c_0|\Delta t|\beta(x-y),\end{gathered} \tag{6.12}$$

поскольку $\tau \in [s, s+\Delta t]$. Из (6.11) и (6.12) мы приходим к оценке

$$|Y_{23} - Y_{24}| \le |\Delta t| M_5(R,\varepsilon) < \frac{\delta}{5}, \tag{6.13}$$

как только

$$|\Delta t| < \eta(\delta, R, \varepsilon) = \frac{\delta}{M_5}. \tag{6.14}$$

Итак, из (6.10) и (6.13) мы приходим к выводу о том, что для каждых $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$ и для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что при условии (6.14) выполнено неравенство

$$\begin{gathered}|Y_2 - Y_3| \le |Y_{23} - Y_{24}| + |Y_{21}| + |Y_{22}| + |Y_{25}| + |Y_{26}| < \delta, \\ Y_3 := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_0(x,y) J_0(\beta(x-y)s)\rho(y,t-s)dyds.\end{gathered} \tag{6.15}$$

Осталось заметить, что

$$Y_3 = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau)}{\partial t}\rho(y,\tau)dyd\tau,$$

и из (6.8) с учетом (6.9) и (6.15) получить равенство (6.7).

Точно так же рассуждая, как на шаге 1, с учетом оценки (4.23) можно доказать, что

$$\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]).$$

Следовательно, $U_0(x,t) \in \mathbb{C}_b^{(0,1)}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Теперь осталось воспользоваться оценками леммы 3 для интегралов (4.20), (4.21) и получить, что имеют место оценки следующего вида:

$$\begin{gathered}\sup_{x\in R^3}|U_0(x,t)| \le M_1 t^{3/2} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}|\rho(x,t)|, \\ \sup_{x\in R^3}\left|\frac{\partial U_0(x,t)}{\partial t}\right| \le M_2 t^{1/2} \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]}|\rho(x,t)|.\end{gathered} \tag{6.16}$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим поверхностный потенциал

$$U_1[\rho](x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t)\rho(y)dy,$$

где ядро $K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t)$ оператора U_1 определено равенством

$$K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t) := -\frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}}\frac{1}{4\pi|x_3-y_3|}\int\limits_0^t J_0(\beta(x-y)s)ds,$$

$$\beta(x-y) = \frac{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{|x_3-y_3|}.$$

Справедлива

Лемма 8. *При* $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$ *и для любого* $T > 0$ *оператор*

$$U_1 : \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]),$$

причем для всякой $\rho(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ *— фиксированной функции, справедливо следующее предельное равенство*:

$$\lim_{t\to+0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}|U_1(x,t)| = 0. \tag{6.17}$$

Кроме того, $U_1(x,t) \in \mathbb{C}^{0,1}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T])$ *для любого* $T > 0$, *как только* $\rho(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем, что $U_1(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, как только $\rho(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$. Действительно, пусть $(x^1,t^1),(x^2,t^2) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]$, причем $t^2 > t^1$. Тогда при $R > \varepsilon$ справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\left|U_1(x^2,t^2) - U_1(x^1,t^1)\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^3}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^2) - K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^1)\right| |\rho(y)|\, dy +$$

$$+\left|\int\limits_{\mathbb{R}^3}[K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^1) - K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1)]\rho(y)dy\right| := N_1 + N_2,$$

$$\begin{gathered}
N_2 \le N_{21} + N_{22} + N_{23} + N_{24} + N_{25},\\
N_{21} := \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x^2)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^1)\right||\rho(y)|dy,\\
N_{22} := \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus Ц_R(x^1)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1)\right||\rho(y)|dy,\\
N_{23} := \int\limits_{Ц_\varepsilon(x^2)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^1)\right||\rho(y)|dy,\\
N_{24} := \int\limits_{Ц_\varepsilon(x^1)}\left|K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1)\right||\rho(y)|dy,\\
N_{25} := \left|\int\limits_{Ц_R(x^2)\setminus Ц_\varepsilon(x^2)}K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^2,y,t^1)\rho(y)dy - \int\limits_{Ц_R(x^1)\setminus Ц_\varepsilon(x^1)}K_{\gamma_1,\gamma_2}(x^1,y,t^1)\rho(y)dy\right|,
\end{gathered} \tag{6.18}$$

где мы использовали обозначение (6.3) для цилиндра $Ц_a(x)$. Отметим, что при $x_3 \ne 0$ в силу (4.4) справедлива оценка

$$\left|\int\limits_{t^1}^{t^2}J_0(\beta(x)s)ds\right| \le c_0\frac{|x_3|^{1/2}}{(x_1^2+x_2^2)^{1/4}}\int\limits_{t^1}^{t^2}\frac{1}{\sqrt{s}}ds = 2c_0\frac{|x_3|^{1/2}}{(x_1^2+x_2^2)^{1/4}}\left[\sqrt{t^2}-\sqrt{t^1}\right].$$

Отсюда и из оценки (4.24) можно получить оценку

$$N_1 \leq 2c_0 M_3 \left[\sqrt{t^2} - \sqrt{t^1}\right].$$

Таким образом, из оценки (4.24) получаем, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие достаточно большое $R > 0$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$, что будут выполнены неравенства

$$N_{21} < \frac{\delta}{6}, \quad N_{22} < \frac{\delta}{6}, \quad N_{23} < \frac{\delta}{6}, \quad N_{24} < \frac{\delta}{6}.$$

При этих фиксированных $\varepsilon > 0$ и $R > 0$ теперь найдется такое малое $\eta = \eta(\delta, R, \varepsilon) > 0$, что, как только

$$|x^2 - x^1|^2 + |t^2 - t^1|^2 < \eta^2,$$

будут выполнены неравенства

$$N_1 < \frac{\delta}{6}, \quad N_{25} < \frac{\delta}{6}. \tag{6.19}$$

Из (6.18), (6.19) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что, как только выполнено (6.19), получаем неравенство

$$\left|U_1(x^2, t^2) - U_1(x^1, t^1)\right| < 6\frac{\delta}{6} = \delta \Rightarrow U_1(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \quad \text{для любого} \quad T > 0.$$

Шаг 2. Из оценки (4.26) вытекает оценка

$$|U_1(x,t)| \leq M_3 t^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\rho(x)|, \tag{6.20}$$

из которой получаем, что $U_1(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ для любого $T > 0$ и, кроме того, выполнено предельное свойство (6.17).

Шаг 3. Утверждение, что $U_1(x,t) \in \mathbb{C}^{0,1}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T])$ для любого $T > 0$, как только $\rho(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$, вытекает из явного вида ядра $K_0(x,y,t)$ и оценки (4.27) интеграла (4.25) и доказывается точно так же, как и доказательство (6.7). Из оценки (4.27) получаем, что при $t \geq t_0 > 0$ для любого фиксированного $t_0 > 0$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial U_1(x,t)}{\partial t}\right| \leq \frac{M_3}{t_0^{1/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\rho(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующий потенциал:

$$U_2(x,t) := U_2[\mu_0](x,t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathscr{E}(x-y,t)}{\partial t} \Delta_\perp \mu_0(y)dy.$$

С учетом равенства (4.6) потенциал $U_2(x,t)$ примет вид

$$U_2(x,t) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{J_0(\beta(x-y)t)}{4\pi|x_3 - y_3|} \Delta_\perp \mu_0(y)dy.$$

Справедлива

Лемма 9. *Пусть* $\mu_0(x) \in \mathbb{C}_0^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$. *Тогда для каждого фиксированного* $x \in \mathbb{R}^3$ *справедливо предельное свойство*

$$\lim_{t\to 0+0} U_2(x,t) = \mu_0(x).$$

Для доказательства леммы 9 достаточно воспользоваться результатом (9.15).

Лемма доказана.

7. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t-\tau)|u|^q(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta_\perp u_1(y)dy, \tag{7.1}$$

где $\mathscr{E}(x,t)$ – фундаментальное решение, определенное равенством (4.3). Сделаем в интегральном уравнении (7.1) замену

$$v(x,t) := (1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}u(x,t), \tag{7.2}$$

$$\rho_1(x) := (1+x_1^2+x_2^2)^{\gamma_1/2}(1+x_3^2)^{\gamma_2/2}\Delta_\perp u_1(x). \tag{7.3}$$

С учетом замены (7.2), (7.3) интегральное уравнение (7.1) примет вид

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{q/2,q/2}(x,y,t-\tau)|v|^q(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t)\rho_1(y)dy, \tag{7.4}$$

где

$$\begin{gathered}
K_{q/2,q/2}(x,y,t-\tau) := \frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{q/4}(1+y_3^2)^{q/4}} \frac{1}{4\pi|x_3-y_3|} \int_0^{t-\tau} J_0(\beta(x-y)s)ds, \\
\beta(x-y) = \frac{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{|x_3-y_3|}, \\
K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t-\tau) := -\frac{(1+x_1^2+x_2^2)^{1/4}(1+x_3^2)^{1/4}}{(1+y_1^2+y_2^2)^{\gamma_1/2}(1+y_3^2)^{\gamma_2/2}} \frac{1}{4\pi|x_3-y_3|} \int_0^{t-\tau} J_0(\beta(x-y)s)ds, \\
\beta(x-y) = \frac{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}}{|x_3-y_3|}.
\end{gathered} \tag{7.5}$$

Справедлива

Теорема 4. *Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всякого $\rho_1(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(\rho_1) > 0$, что для каждого $T \in (0,T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения* (7.4) *в банаховом пространстве $v(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство*

$$\lim_{T\uparrow T_0} \|v\|_T = +\infty, \quad \|v\|_T = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} |v(x,t)|. \tag{7.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. В силу результатов лемм 7 и 8 объемный потенциал $U_0(x,t)$ и поверхностный потенциал $U_1(x,t)$:

$$\begin{gathered}
U_0(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K_{q/2,q/2}(x,y,t-\tau)|v|^q(y,\tau)dyd\tau, \\
U_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} K_{\gamma_1,\gamma_2}(x,y,t)\rho_1(y)dy,
\end{gathered} \tag{7.7}$$

действуют следующим образом:

$$U_0(x,t)\colon \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]), \tag{7.8}$$

$$U_1(x,t)\colon \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]). \tag{7.9}$$

Перепишем интегральное уравнение (7.4) в виде

$$v(x,t) = A(v)(x,t), \quad A(v)(x,t) = U_0(v)(x,t) + U_1(\rho_1)(x,t).$$

В силу (7.8) и (7.9) для любого $\rho_1(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ оператор $A(v)$ действует из $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ в $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$.

Шаг 2. На этом шаге докажем, что оператор

$$A(v)\colon D_{R,T} \to D_{R,T}, \quad D_{R,T} := \left\{v(x,t) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) : v_T \leq R\right\}$$

при достаточно большом $R > 0$ и достаточно малом $T > 0$. Действительно, пусть $v(x,t) \in D_{R,T}$, воспользуемся оценкой (6.20) из доказательства леммы 8 и получим следующую оценку для потенциала $U_1(x,t)$:

$$\|U_1(x,t)\|_T \leq M_3 T^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\rho_1(x)|.$$

Пусть $T \in (0,T_1]$, где $T_1 > 0$ – некоторое фиксированное число. Выберем $R = R(T_1) > 0$ настолько большим, чтобы было выполнено неравенство

$$M_3 T_1^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} |\rho_1(x)| \leq \frac{R}{2} \Rightarrow \|U_1(x,t)\|_T \leq \|U_1(x,t)\|_{T_1} \leq \frac{R}{2}. \tag{7.10}$$

Фиксируем это $R = R(T_1) > 0$. В силу (6.16) из доказательства леммы 7 для потенциала $U_0(x,t)$ справедлива следующая оценка:

$$\|U_0(x,t)\|_T \leq M_1 T^{3/2} \|v\|_T^q \leq M_1 T^{3/2} R^q.$$

Выберем $T \in (0,T_1]$ настолько малым, чтобы было выполнено неравенство

$$M_1 T^{3/2} R^{q-1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \|U_0(x,t)\|_T \leq \frac{R}{2}. \tag{7.11}$$

Из оценок (7.10) и (7.11) вытекает, что

$$\|A(v)\|_T \leq \|U_0(x,t)\|_T + \|U_1(x,t)\|_T \leq R \quad \text{при} \quad v(x,t) \in D_{R,T}.$$

Шаг 3. На этом шаге мы докажем, что при достаточно малом $T > 0$ оператор $A(v)$ сжимающий на $D_{R,T}$. Действительно, пусть $v_1(x,t), v_2(x,t) \in D_{R,T}$. Поскольку $q > 4$, то, в частности, справедливо неравенство

$$\left||v_1|^q - |v_2|^q\right| \leq q \max\left\{|v_1|^{q-1}, |v_2|^{q-1}\right\} |v_1 - v_2|.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$\|A(v_1) - A(v_2)\|_T \leq q M_1 T^{3/2} \max\left\{\|v_1\|_T^{q-1}, \|v_2\|_T^{q-1}\right\} \|v_1 - v_2\|_T \tag{7.12}$$

в силу оценки (4.22) леммы 3. Из (7.12) получаем неравенство

$$\|A(v_1) - A(v_2)\|_T \leq q M_1 T^{3/2} R^{q-1} \|v_1 - v_2\|_T \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_T$$

при условии, что $T > 0$ настолько мало, что

$$q M_1 T^{3/2} R^{q-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Шаг 4. Осталось воспользоваться стандартным алгоритмом продолжения решений интегральных уравнений во времени, изложенным в [21], и получить, что для любого $\rho_1(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^3)$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(\rho_1) > 0$, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в этом случае справедливо предельное свойство (7.6). Теорема доказана.

Непосредственным следствием теоремы 4 является

Теорема 5. *Если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$, то для всякого $u_1(x)$ такого, что*

$$\Delta_\perp u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3),$$

найдется такое максимальное $T_0 = T_0(\Delta_\perp u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0, T_0)$ *существует единственное решение интегрального уравнения* (7.1) *в банаховом пространстве*:

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T]),$$

причем либо $T_0 = +\infty$, *либо* $T_0 < +\infty$, *и в последнем случае имеет место следующее предельное свойство*:

$$\lim_{T \uparrow T_0} \|u\|_T = +\infty, \quad \|u\|_T := \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[0,T]} (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}|u(x,t)|. \tag{7.13}$$

Замечание 1. Если $u(x,t)$ – построенное решение интегрального уравнения (7.1) из теоремы 5, то это решение допускает продолжение нулем при $t < 0$ с сохранением класса и при этом будет решением интегрального уравнения

$$u(x,t) = -\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x - y, t - \tau)|u|^q(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x - y, t)\Delta_\perp u_1(y)dy. \tag{7.14}$$

Действительно, в силу (6.2) и (6.17) оба слагаемых в правой части (7.1) стремятся к нулю по норме банахова пространства $\mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3)$ при $t \to +0$. При этом второе слагаемое в (7.1) равно нулю при $t < 0$. Поэтому, если $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0, T])$ – решение интегрального уравнения (7.1) для любого $T \in (0, T_0)$, то функция

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t \in [0, T_0), \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases}$$

будет решением класса

$$\tilde{u}(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T_0)) \tag{7.15}$$

интегрального уравнения (7.14). Обсудим теперь единственность решения интегрального уравнения (7.14) и интегрального уравнения

$$u(x,t) = -\int_{-T_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x - y, t - \tau)|u|^q(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x - y, t)\Delta_\perp u_1(y)dy \tag{7.16}$$

при произвольном $T_1 > 0$. Докажем, что решение этого интегрального уравнения в классе $\mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [-T_1, T])$ единственно. Пусть $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [-T_1, T])$ – два решения интегрального уравнения (7.16). Тогда справедлива цепочка соотношений

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \int_{-T_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathscr{E}(x - y, t - \tau)| \left||u_1(y,\tau)|^q - |u_2(y,\tau)|^q\right| dyd\tau \le$$

$$\le q\int_{-T_1}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} |\mathscr{E}(x - y, t - \tau)| \max\left\{|u_1(y,\tau)|^{q-1}, |u_2(y,\tau)|^{q-1}\right\} |u_1(y,\tau) - u_2(y,\tau)|\, dyd\tau.$$

Введем следующие обозначения:

$$v_j(x,t) := (1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}u_j(x,t), \quad v(x,t) := v_1(x,t) - v_2(x,t), \quad j = 1, 2,$$

и с учетом введенного ранее обозначения (7.5) получим неравенство

$$\|v\|(t) \le qR^{q-1}c_1 \int_{-T_1}^{t} \|v\|(\tau)d\tau, \quad \|v\|(t) := \sup_{x\in\mathbb{R}^3}|v(x,t)|,$$

$$c_1 := \sup_{(x,s)\in\mathbb{R}^3\otimes[-T_1,T]} \int_{\mathbb{R}^3} |K_{q/2,q/2}(x,y,s)|\, dy, \quad R = \max\left\{\|v_1\|_{[-T_1,T]}, \|v_2\|_{[-T_1,T]}\right\}, \tag{7.17}$$

$$\|v\|_{[-T_1,T]} = \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^3\otimes[-T_1,T]} |v(x,t)|.$$

Поэтому в силу неравенства Гронуолла–Беллмана–Бихари (см. [22]) из неравенства (7.17) получаем

$$\|v\|(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [-T_1, T].$$

Следовательно, в рассматриваемом классе решение интегрального уравнения (7.16) единственно для любого $T_1 > 0$. Поэтому построенная функция (7.15) является единственным решением интегрального уравнения (7.16). Однако это не означает, что решение интегрального уравнения (7.14) единственно. Более того, решение этого интегрального уравнения не обязано обращаться в нуль при $t < 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$.

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Функция*

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & \text{если} \quad t \in [0,T], \\ 0, & \text{если} \quad t < 0, \end{cases}$$

где $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ *для любого* $T \in (0, T_0)$ *— построенное в теореме* 5 *решение интегрального уравнения* (7.1), *является единственным решением интегрального уравнения*

$$v(x,t) = -\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y, t-\tau)|v|^q(y,\tau)dyd\tau + \int_{\mathbb{R}^3} \mathscr{E}(x-y,t)\Delta_\perp u_1(y)dy \tag{7.18}$$

в классе функций $v(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, *обращающихся в нуль при* $t < 0$.

8. РАЗРУШЕНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp u + u_{x_3x_3} + |u|^q = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T], \tag{8.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{8.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (8.1), (8.2).

Определение 5. *Классическим решением задачи Коши* (8.1), (8.2) называется функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}^{2+1}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, удовлетворяющая уравнению (8.1) поточечно при $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T]$ и условиям (8.2) для каждого $x \in \mathbb{R}^3$.

Теперь дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши (8.1), (8.2).

Определение 6. *Локальным во времени слабым решением задачи Коши* (8.1), (8.2) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, удовлетворяющая равенству

$$\begin{gathered} -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t) + \phi_{x_3x_3}(x,t)\right]dxdt - \\ -\int_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\right]dx = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\phi(x,t)dxdt \end{gathered} \tag{8.3}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Дадим определение глобального во времени слабого решения задачи Коши.

Определение 7. *Глобальным во времени слабым решением задачи Коши* (8.1), (8.2) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,+\infty))$, удовлетворяющая равенству

$$-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t) + \phi_{x_3x_3}(x,t)\right]dxdt - \\ -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\right]dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\,\phi(x,t)dxdt \tag{8.4}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,+\infty))$, причем $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Теперь для согласования результатов о локальной или глобальной во времени разрешимости рассматриваемой задачи Коши с результатами об отсутствии локальных во времени или глобальных во времени решений задачи Коши мы дадим определения локального во времени слабого обобщенного решения и глобального во времени слабого обобщенного решения (сравните эти определения с определениями 3 и 4.

Определение 8. *Локальным во времени слабым обобщенным решением задачи Коши* (8.1), (8.2) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$, удовлетворяющая равенству

$$-\int\limits_0^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t) + \phi_{x_3x_3}(x,t)\right]dxdt - \\ -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\right]dx = \int\limits_0^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\,\phi(x,t)dxdt \tag{8.5}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,T))$. Кроме того, $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Определение 9. *Глобальным во времени слабым обобщенным решением задачи Коши* (8.1), (8.2) называется функция $u(x,t) \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,+\infty))$, удовлетворяющая равенству

$$-\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t) + \phi_{x_3x_3}(x,t)\right]dxdt - \\ -\int\limits_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\right]dx = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^q\,\phi(x,t)dxdt \tag{8.6}$$

для произвольной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty,+\infty))$, причем $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Дадим определение класса функций H.

Определение 10. Будем говорить, что начальные функции $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежат классу H, если $u_0(x), u_1(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ и найдется такой шар $O(x_0,R) \subset \mathbb{R}^3$ положительного радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0,R))$ и имеет место следующее неравенство:

$$(\Delta_\perp u_0(x))^2 + (\Delta_\perp u_1(x))^2 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0,R). \tag{8.7}$$

Теорема 7. *Пусть* $1 < q \le 3$ *и* $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$. *Кроме того, выполнены неравенства*

$$|u_0(x)| \le \frac{A_0}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}, \quad |u_1(x)| \le \frac{A_1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{при} \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1. \tag{8.8}$$

Тогда не существует локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 6 *не для какого* $T > 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве пробной функции $\phi(x,t)$ из определения 6 функцию вида

$$\phi(x,t) = \phi_1(t)\phi_2(x),$$

$$\phi_1(t) := \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda}, \quad \phi_2(x) := \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \lambda > 2q', \quad q' = \frac{q}{q-1}, \quad q > 1, \tag{8.9}$$

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 0 \le s \le 1, \\ 0, & \text{если} \quad s \ge 2, \end{cases} \qquad \phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^{\infty}[0,+\infty),$$

причем функция $\phi_0(s)$ является монотонно невозрастающей. Справедливы следующие равенства:

$$I_1 := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta_\perp \phi(x,t) dxdt = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'-2} \frac{\Delta_\perp \phi_2(x)}{\phi_2^{1/q}(x)} \phi_2^{1/q}(x) \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q} u(x,t)dxdt =$$

$$= \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'-2} \frac{\Delta_\perp \phi_2(x)}{\phi_2^{1/q}(x)} \phi_2^{1/q}(x) \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q} u(x,t)dxdt,$$

$$I_2 := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t) \phi_{x_3x_3}(x,t) dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'} \frac{\phi_{2x_3x_3}(x)}{\phi_2^{1/q}(x)} \phi_2^{1/q}(x) \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q} u(x,t)dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'} \frac{\phi_{2x_3x_3}(x)}{\phi_2^{1/q}(x)} \phi_2^{1/q}(x) \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda/q} u(x,t)dxdt,$$

$$I_3 := \int_{\mathbb{R}^3} u_0(x) \Delta_\perp \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) dx = -\frac{\lambda}{T} \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} u_0(x) \Delta_\perp \phi_2(x) dx,$$

$$I_4 := -\int_{\mathbb{R}^3} u_1(x) \Delta_\perp \phi(x,0) dx = -\int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} u_1(x) \Delta_\perp \phi_2(x) dx.$$

Справедливы оценки

$$|I_1| \le c_1(R) I_R^{1/q}, \quad |I_2| \le c_2(R) I_R^{1/q}, \tag{8.10}$$

$$|I_3| \le \frac{\lambda}{T} R \int_{1 \le |y| \le \sqrt{2}} |u_0(Ry)| \left|\Delta_\perp \phi_0(|y|^2)\right| dy \le \frac{A_2}{R^{\alpha-1}} \to +0, \tag{8.11}$$

$$|I_4| \le R \int_{1 \le |y| \le \sqrt{2}} |u_1(Ry)| \left|\Delta_\perp \phi_0(|y|^2)\right| dy \le \frac{A_3}{R^{\beta-1}} \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty,$$

$$\begin{gathered} c_1(R) := \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \left(\int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda-2q'} \frac{|\Delta_\perp \phi_2(x)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(x)} dxdt \right)^{1/q'}, \\ c_2(R) := \left(\int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} \left(1-\frac{t}{T}\right)^{\lambda} \frac{|\phi_{2x_3x_3}(x)|^{q'}}{\phi_2^{q'/q}(x)} dxdt \right)^{1/q'}, \end{gathered} \tag{8.12}$$

$$I_R := \int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} \phi(x,t) |u(x,t)|^q \, dxdt.$$

Справедливы следующие равенства:

$$c_1(R) = \frac{\lambda(\lambda-1)}{T^2} \left(\frac{T}{\lambda - 2q' + 1}\right)^{1/q'} c_0 R^{(3-2q')/q'}, \tag{8.13}$$

$$c_2(R) = \left(\frac{T}{1+\lambda}\right)^{1/q'} c_1 R^{(3-2q')/q'},$$

$$c_0 := \left(\int\limits_{1\le|y|\le\sqrt{2}} \frac{\left|\Delta_\perp \phi_0(|y|^2)\right|^{q'}}{\phi_0^{q'/q}(|y|^2)} dy\right)^{1/q'}, \quad c_1 := \left(\int\limits_{1\le|y|\le\sqrt{2}} \frac{\left|\phi_{0y_3y_3}(|y|^2)\right|^{q'}}{\phi_0^{q'/q}(|y|^2)} dy\right)^{1/q'}, \tag{8.14}$$

В [10] доказано существование таких монотонно невозрастающих функций $\phi_0(s)$, что конечны емкости $c_0 > 0$ и $c_1 > 0$.

Сначала рассмотрим случай $1 < q < 3$. Тогда $3 - 2q' < 0$. Кроме того, имеет место оценка

$$I_R \le I := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \phi(x,t)|u(x,t)|^q \,dxdt. \tag{8.15}$$

Из (8.2) с учетом оценок (8.10), (8.11) следует оценка

$$c_1(R) I_R^{1/q} + c_2(R) I_R^{1/q} + |I_3| + |I_4| \ge I. \tag{8.16}$$

Воспользуемся трехпараметрическим неравенством Юнга

$$a\cdot b \le \varepsilon a^q + \frac{b^{q'}}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}}, \quad a,b\ge 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Из неравенства (8.16) с учетом (8.15) и неравенства Юнга следует неравенство

$$\frac{1}{q'(q\varepsilon)^{q'/q}}\left(c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)\right) + |I_3| + |I_4| \ge (1-2\varepsilon)I,$$

в котором положим $\varepsilon = 1/4$ и получим неравенство

$$I \le K(R) := 2\left(\frac{1}{q'}\left(\frac{4}{q}\right)^{q'/q}\left(c_1^{q'}(R) + c_2^{q'}(R)\right) + |I_3| + |I_4|\right). \tag{8.17}$$

Положим $R = N \in \mathbb{N}$ в неравенстве (8.17). Заметим, что последовательность функций

$$\chi_N(x,t) := \phi(x,t)|u(x,t)|^q = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \phi_0\left(\frac{|x|^2}{N^2}\right)|u(x,t)|^q$$

удовлетворяет неравенству

$$\chi_N(x,t) \le \chi_{N+1}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T].$$

Осталось воспользоваться теоремой Беппо Леви и получить, что, с одной стороны,

$$I = I(N) := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \chi_N(x,t)dxdt \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q \,dxdt \quad \text{при} \quad N \to +\infty,$$

а с другой стороны, из неравенства (8.17) с учетом оценок (8.13), (8.14) и (8.11), (8.11) получаем, что

$$I = I(N) \to +0 \quad \text{при} \quad N \to +\infty.$$

Таким образом, при условии $1 < q < 3$ получаем, что

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1-\frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q \,dxdt = 0 \Leftrightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes [0,T].$$

Теперь рассмотрим критический случай $q = 3$. Заметим, что тогда $3 = 2q'$. В этом случае снова можно воспользоваться неравенством (8.17) и с помощью теоремы Беппо Леви доказать, что

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |u(x,t)|^q \, dxdt < +\infty.$$

Поэтому для интеграла (8.12) справедливо следующее предельное свойство:

$$0 \le I_R \le \int_0^T \int_{R \le |x| \le \sqrt{2}R} |u(x,t)|^q \, dxdt \to +0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Итак, при $1 < q \le 3$ единственным $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ локальным слабым решением является функция $u(x,t) = 0$ почти всюду. После подстановки этого равенства в уравнение (8.3) мы приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[u_0(x) \Delta_\perp \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x) \Delta_\perp \phi(x,0) \right] dx = 0, \tag{8.18}$$

справедливому для всех $\phi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+2}(\mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ таких, что $\phi(x,T) = \phi'(x,T) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$ и для всех $t \in [0,T]$ носитель $\text{supp}_x \phi(x,t) \subset \mathbb{R}^3$. Пусть

$$\phi(x,t) = \psi_0(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \lambda > 1, \quad \psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{8.19}$$

Тогда из (8.18) и (8.19) мы приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\lambda}{T} u_0(x) + u_1(x) \right] \Delta_\perp \psi_0(x) dx = 0 \tag{8.20}$$

для всех $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и любого $T > 0$. Поскольку $\{u_0(x), u_1(x)\}$ принадлежит классу функций H, то найдется такой шар $O(x_0, R)$ радиуса $R > 0$, что $u_0(x), u_1(x) \in H^2(O(x_0, R))$ и

$$(\Delta_\perp u_0(x))^2 + (\Delta_\perp u_1(x))^2 > 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R). \tag{8.21}$$

Но тогда возьмем $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0, R))$ и из (8.20) получим следующее равенство:

$$\int_{O(x_0,R)} \left[\frac{\lambda}{T} \Delta_\perp u_0(x) + \Delta_\perp u_1(x) \right] \psi_0(x) dx = 0$$

для каждой $\psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(O(x_0, R))$. Согласно основной лемме вариационного исчисления, имеем

$$\int_{O(x_0,R)} \left[\frac{\lambda}{T} \Delta_\perp u_0(x) + \Delta_\perp u_1(x) \right] \psi_0(x) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda}{T} \Delta_\perp u_0(x) + \Delta_\perp u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R)$$

и $T > 0$. Заметим, что если $u(x,t)$ – слабое локальное во времени решение в смысле определения 6 при $T = T_1$, то оно же является слабым локальным во времени решением в смысле определения 6 и при $0 < T < T_1$. Поэтому в силу произвольности $T > 0$ из некоторой выколотой полуокрестности точки $T = 0$ отсюда получаем равенства

$$\Delta_\perp u_0(x) = 0, \quad \Delta_\perp u_1(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R),$$

что противоречит (8.21). Теорема доказана.

Замечание 2. Условия (8.8) можно заменить более слабыми условиями, чтобы $u_0(x), u_1(x) \in L^q(\mathbb{R}^3)$ при $q \in (1,3]$.

Доказательство. Действительно, имеем

$$|I_3| \le \frac{\lambda}{T}\left(\int\limits_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |u_0(x)|^q\,dx\right)^{1/q} J_R^{1/q'},$$

$$|I_4| \le \left(\int\limits_{R\le|x|\le\sqrt{2}R} |u_1(x)|^q\,dx\right)^{1/q} J_R^{1/q'},$$

где

$$J_R = R^{3-2q'} \int\limits_{1\le|y|\le\sqrt{2}} \left|\Delta_\perp \phi_0(|y|^2)\right|^{q'} dy.$$

Очевидно, при условии $u_0(x), u_1(x) \in L^q(\mathbb{R}^3)$ и $3 - 2q' \le 0$, $q > 1$ получаем, что

$$I_3, I_4 \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Справедлива следующая

Теорема 8. *Пусть $q \in (3,5]$ и начальные функции $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$, причем*

$$|u_1(x)| \le \frac{A_1}{(1+|x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{при} \quad \beta > 2. \tag{8.22}$$

Тогда не существует глобального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 7.

Доказательство. Возьмем в качестве пробной функции следующую:

$$\phi(x,t) := \phi_0\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + t^2}{R^2} + \frac{x_3^2}{R^4}\right), \quad R > 0,$$

где функция $\phi_0(s) \in \mathbb{C}_0^\infty[0,+\infty)$ является монотонно невозрастающей и определена равенством (8.9). Введем обозначения

$$I_1 := \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)\,dxdt,$$

$$I_2 := \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\phi_{x_3x_3}(x,t)\,dxdt,$$

$$I_3 := \int\limits_{\mathbb{R}^3} u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)\,dx, \quad I_4 := -\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\,dx,$$

$$D_{R,\sqrt{2}R} := \left\{(x_1,x_2,x_3,t) \in \mathbb{R}^4_+ : 1 \le \frac{x_1^2 + x_2^2 + t^2}{R^2} + \frac{x_3^2}{R^4} \le 2\right\},$$

$$B_{R,\sqrt{2}R} := \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2} + \frac{x_3^2}{R^4} \le 2\right\}.$$

С учетом этих обозначений справедливы следующие цепочки соотношений:

$$|I_1| \le \int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} |u(x,t)|\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)\right| dxdt = \int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} |u(x,t)|\,\phi^{1/q}(x,t)\frac{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)\right|}{\phi^{1/q}(x,t)}\,dxdt \le c_1(R) I_R^{1/q},$$

$$
\begin{gathered}
|I_2| \le \int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} |u(x,t)||\phi_{x_3x_3}(x,t)|\,dxdt = \int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} |u(x,t)|\,\phi^{1/q}(x,t)\frac{|\phi_{x_3x_3}(x,t)|}{\phi^{1/q}(x,t)}dxdt \le c_2(R)I_R^{1/q},\\
|I_3| \le \int\limits_{B_{R,\sqrt{2}R}} |u_0(x)|\left|\Delta_\perp \frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0)\right|dx,\\
|I_4| \le \int\limits_{B_{R,\sqrt{2}R}} |u_1(x)||\Delta_\perp\phi(x,0)|\,dx,
\end{gathered} \tag{8.23}
$$

где

$$
\begin{gathered}
I_R := \int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} |u(x,t)|^q\,\phi(x,t)dxdt,\\
c_1(R) := \left(\int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} \frac{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_\perp\phi(x,t)\right|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}dxdt\right)^{1/q'},
\end{gathered} \tag{8.24}
$$

$$
c_2(R) := \left(\int\limits_{D_{R,\sqrt{2}R}} \frac{|\phi_{x_3x_3}(x,t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x,t)}dxdt\right)^{1/q'}. \tag{8.25}
$$

Заметим, что $\dfrac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) = 0$ для всех x, поэтому $|I_3| = 0$.

В интегралах (8.24), (8.25) сделаем замену переменных:

$$
y_1 = \frac{x_1}{R}, \quad y_2 = \frac{x_2}{R}, \quad \tau = \frac{t}{R}, \quad y_3 = \frac{x_3}{R^2}. \tag{8.26}
$$

Тогда получим равенства

$$
\begin{gathered}
c_1(R) = c_{10}R^{(5-4q')/q'}, \quad c_2(R) = c_{20}R^{(5-4q')/q'},\\
c_{10} := \left(\int\limits_{D_{1,\sqrt{2}}} \frac{\left|\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Delta_\perp\phi_0(|y^2|+\tau^2)\right|^{q'}}{\phi_0^{q'/q}(|y|^2+\tau^2)}dyd\tau\right)^{1/q'},\\
c_{20} := \left(\int\limits_{D_{1,\sqrt{2}}} \frac{|\phi_{0y_3y_3}(|y^2|+\tau^2)|^{q'}}{\phi_0^{q'/q}(|y|^2+\tau^2)}dyd\tau\right)^{1/q'}.
\end{gathered}
$$

В [10] доказано существование функции $\phi_0(s)$ такой, что $0 < c_{10}, c_{20} < +\infty$. Теперь рассмотрим неравенство (8.23), в котором сделаем замену переменных (8.26). Тогда мы получим следующие результаты для I_3 и I_4:

$$
|I_3| = 0, \quad |I_4| \le R^2 \int\limits_{B_{1,\sqrt{2}}} |u_1(Ry_1, Ry_2, R^2y_3)|\left|\Delta_\perp\phi_0(|y|^2)\right|dy. \tag{8.27}
$$

Заметим, что функция $u_1(x)$ удовлетворяет оценке (8.22). Тогда из (8.27) и (8.22) вытекает оценка

$$
|I_4| \le \frac{A_5}{R^{\beta-2}}, \quad \beta > 2,
$$

при $R > 1$, из которой следует, что

$$
I_4 \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.
$$

Дальше нужно рассмотреть случай, когда $5 - 4q' \leq 0$, что равносильно условию $1 < q \leq 5$. Случай $q \in (1,3]$ нами рассмотрен. Сначала рассмотрим случай $q \in (3,5)$, а затем, критический случай $q = 5$. В целом эти случаи рассматриваются как случаи $q \in (1,3)$ и $q = 3$ при доказательстве теоремы 7. В результате в пределе при $R \to +\infty$ мы получим, что единственным глобальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения 7 является функция $u(x,t) = 0$ для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^4_+$. Подставим эту функцию в равенство (8.4) и получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[u_0(x)\Delta_\perp\frac{\partial\phi}{\partial t}(x,0) - u_1(x)\Delta_\perp\phi(x,0)\right]dx = 0$$

для любой функции $\phi(x,t) \in \mathbb{C}_0^{2+2}(\mathbb{R}^4_+)$. В качестве такой функции можно взять следующую:

$$\phi(x,t) = \phi_1(t)\psi_0(x),$$

$$\phi_1(t) = \begin{cases}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^\lambda, & \text{если} \quad t \in [0,T];\\ 0, & \text{если} \quad t \geq T,\end{cases} \qquad \psi_0(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad \lambda > 2. \tag{8.28}$$

Дальнейшие рассуждения повторяют соответствующие рассуждения при доказательстве теоремы 7. В результате приходим к противоречию с тем, что начальные функции $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$. Теорема доказана.

Замечание 3. В отличие от результата замечания 2 в случае теоремы 8 заменить условие (8.22) более слабым условием $u_1(x) \in L^q(\mathbb{R}^3)$ при $q \in (3,5]$ уже нельзя.

Теперь мы можем доказать основное утверждение работы:

Теорема 9. *Если* $q \in (1,3]$, *то слабое обобщенное локальное во времени решение задачи Коши* (8.1), (8.2) *в смысле определения* 8 *отсутствует для любых начальных функций* $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$, *удовлетворяющих неравенствам* (8.8), *и любого* $T > 0$. *Если* $q \in (3,5]$, *то для любых начальных функций* $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$ *при выполнении неравенства* (8.22) *отсутствует глобальное во времени слабое обобщенное решение задачи Коши* (8.1), (8.2) *в смысле определения* 9. *Если* $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$ *и* $\Delta_\perp u_0(x) = 0$, $\Delta_\perp u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2};\mathbb{R}^3)$, *причем* $u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$, *то найдется такое максимальное* $T_0 = T_0(\Delta_\perp u_1) > 0$, *что для каждого* $T \in (0,T_0)$ *существует единственное слабое обобщенное локальное во времени решение задачи Коши* (8.1), (8.2) *в смысле определения* 8, *причем если* $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$, $q \in (4,5]$ *и выполнено неравенство* (8.22), *то* $T_0 < +\infty$ *и поэтому выполнено предельное свойство* (7.13).

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что, с одной стороны, в определении 8 локального во времени слабого обобщенного решения задачи Коши (8.1), (8.2) в качестве пробной функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ можно взять произведение

$$\phi(x,t) = \phi_1(t)\phi_2(x), \quad \phi_1(t) \in \mathcal{D}(-\infty,T), \quad \phi_2(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3). \tag{8.29}$$

С другой стороны, в силу результата теоремы 10 имеет место плотное вложение $\mathcal{D}(-\infty,T) \overset{ds}{\subset} \mathbb{C}_0^{(2)}[0,T]$. В частности, функция

$$\phi(t) := \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0,T] \quad \text{при} \quad \lambda > 2.$$

Поэтому для любого $\delta > 0$ найдется такая функция $\phi_1(t) \in \mathcal{D}(-\infty,T)$, что

$$\|\phi(t) - \phi_1(t)\| < \delta, \tag{8.30}$$

где норма $\|\cdot\|$ определена равенством (10.1). Пусть $u(x,t)$ — локальное во времени слабое обобщенное решение задачи Коши (8.1), (8.2) в смысле определения 8. Тогда в силу (8.29)–(8.30) приходим к выводу о том, что имеет место равенство (8.5) для функции

$$\phi(x,t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda\phi_2(x) \quad \text{для любой функции} \quad \phi_2(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \lambda > 2.$$

Далее мы в точности повторяем рассуждения при доказательстве теоремы 7 и приходим к противоречию при условиях, что $q \in (1,3]$, $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$ и выполнены неравенства (8.8).

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеет место вложение $\mathscr{D}(-\infty, T)$ в $\mathscr{D}(-\infty, +\infty)$ в том смысле, что если произвольную функцию $\phi(t) \in \mathscr{D}(-\infty, T)$ продолжить нулем при $t \geq T$, то продолженная функция $\overline{\phi}(t)$ будет принадлежать $\mathscr{D}(-\infty, +\infty)$. Поэтому аналогичным образом, как и на шаге 1, можно доказать, что равенство (8.6) будет иметь место для следующей функции:

$$\phi(x,t) = \phi_1(t)\phi_2(x) \quad \text{для любой функции} \quad \phi_2(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3), \quad \lambda > 2,$$

где функция $\phi_1(t)$ определена равенством (8.28). Далее повторяем рассуждения из доказательства теоремы 8 и получаем противоречивый вывод при $q \in (3,5]$ для любых начальных функций $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$, где функция $u_1(x)$ удовлетворяет неравенству (8.22).

Шаг 3. Заметим, что если $q > 4$, $\gamma_1 > 2$, $\gamma_2 > 1$ и $\Delta_\perp u_0(x) = 0$, $\Delta_\perp u_1(x) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{\gamma_1/2}(1 + x_3^2)^{\gamma_2/2}; \mathbb{R}^3)$, причем $u_1(x) \in \mathbb{C}^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$, то выполнены все условия теоремы 5 о существовании и единственности решения интегрального уравнения (7.1) в банаховом пространстве $u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T])$ для каждого $T \in (0, T_0)$. Но тогда в силу результата теоремы 6 существует единственное решение $\tilde{u}(x,t)$ вида (7.15) интегрального уравнения (7.18) в классе функций, обращающихся в нуль при $t < 0$. Отсюда получаем, что в смысле пространства обобщенных функций $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ справедливо равенство

$$\tilde{u}(x,t) = \mathscr{E}(x,t) * [-|\tilde{u}(x,t)|^q + \Delta_\perp u_1(x)\delta(t)].$$

Поэтому для всякого $\phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T))$ справедливо следующее равенство:

$$\left\langle \tilde{u}(x,t), \mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t) \right\rangle = \left\langle \mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x,t), \phi(x,t) \right\rangle = \left\langle -|\tilde{u}(x,t)|^q + \Delta_\perp u_1(x)\delta(t), \phi(x,t) \right\rangle.$$

Но тогда мы получаем равенство

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_\perp u_1(x)\phi(x,0)dx =$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt \quad \text{для любой} \quad \phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)).$$

Это равенство интегрированием по частям можно преобразовать к виду

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} u(x,t)\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}^3} u_1(x)\Delta_\perp \phi(x,0)dx =$$

$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^q \phi(x,t)dxdt \quad \text{для любой} \quad \phi(x,t) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3 \otimes (-\infty, T)).$$

Таким образом, в силу результата теоремы 1 построенное при $q > 4$ решение является единственным слабым локальным во времени обобщенным решением в смысле определения 8.

Шаг 4. Пусть $\{u_0(x), u_1(x)\} \in H$, $q \in (4,5]$ и выполнено неравенство (8.22), но при этом для построенного решения интегрального уравнения выполнено равенство $T_0 = +\infty$. Тогда решение интегрального уравнения (7.1) будет принадлежать классу

$$u(x,t) \in \mathbb{C}_b((1 + x_1^2 + x_2^2)^{1/4}(1 + x_3^2)^{1/4}; \mathbb{R}^3 \otimes [0,T]) \quad \text{для любого} \quad T \in (0, +\infty)$$

и поэтому являться слабым глобальным во времени обобщенным решением в смысле определения 9, что противоречит результату шага 2. Значит, $T_0 < +\infty$ и поэтому справедливо предельное свойство (7.13) Теорема доказана.

9. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О *-СЛАБЫХ ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\phi(x) \in \mathbb{C}_0^{(2,0)}(\mathbb{R}^3)$, причем

$$\operatorname{supp}\phi(x) \subset Ц_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 \leq \mathbb{R}^2, |y_3| \leq R\},$$

$$B_R := \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq R^2\}, \quad \partial B_R = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = R^2\}.$$

Рассмотрим интеграл

$$H_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2}} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3,$$

$$\Delta_\perp := \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть $\delta \in (0, R)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} H_1 = H_{11} + H_{12} + H_{13}, \\ H_{11} := \int\limits_{B_R} \int\limits_{|y_3| \leq \delta} \frac{\Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) - \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2}} dy_3 dy_1 dy_2, \\ H_{12} := \int\limits_{B_R} \int\limits_{\delta \leq |y_3| \leq R} \frac{\Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) - \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2}} dy_3 dy_1 dy_2, \\ H_{13} := \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2) + y_3^2}} dy_3 dy_1 dy_2. \end{gathered} \tag{9.1}$$

Вычислим интеграл H_{13}. Действительно, справедливы равенства

$$H_{13} := 2\int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \ln\left(\frac{R}{\varepsilon\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2)}}\right) dy_1, dy_2 = H_{131} + H_{132} + H_{133},$$

$$H_{131} := 2\ln\left(\frac{2R}{\varepsilon}\right) \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) dy_1 dy_2,$$

$$H_{132} := -2\int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2} dy_1 dy_2,$$

$$H_{133} := 2\int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \left(\ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2(y_1^2 + y_2^2)}{R^2}}\right) - \ln 2\right) dy_1 dy_2.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\phi(y_1, y_2, 0) \subset B_R$, то имеют место соотношения

$$H_{131} := 2\ln\left(\frac{2R}{\varepsilon}\right) \int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial \phi(y_1, y_2, 0)}{\partial n_{y_1, y_2}} dS_y = 0,$$

где n_{y_1, y_2} – внешняя нормаль к боковой границе цилиндра $Ц_R(0)$. Из явного вида H_{133} вытекает, что в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега справедливо предельное свойство

$$H_{133} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Заметим, что верны следующие предельные свойства при $\varepsilon \to +0$:

$$H_{11} \to \int\limits_{B_R} \int\limits_{|y_3| \leq \delta} \frac{\Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) - \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)}{|y_3|} dy_3 dy_1 dy_2 := H_{110},$$

$$H_{12} \to \int\limits_{B_R} \int\limits_{\delta\le|y_3|\le R} \frac{\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)-\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,0)}{|y_3|}dy_3dy_1dy_2 := H_{120}.$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} H_{120} &= \int\limits_{\delta\le|y_3|\le R} \frac{1}{|y_3|}\int\limits_{B_R}\left(\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)-\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,0)\right)dy_1dy_2 = \\ &= \int\limits_{\delta\le|y_3|\le R} \frac{1}{|y_3|}\int\limits_{\partial B_R}\left(\frac{\partial\phi(y_1,y_2,y_3)}{\partial n_{y_1,y_2}}-\frac{\partial\phi(y_1,y_2,0)}{\partial n_{y_1,y_2}}\right)dS_y = 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Итак, с учетом (9.1), (9.2) в пределе при $\varepsilon\to+0$ получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0} H_1 = H_{110} + H_{132}. \tag{9.3}$$

Для величины H_{110} справедлива оценка

$$|H_{110}| \le \sup_{(y_1,y_2)\in B_R(0),\, y_3^*\in[-R,R]}\left|\Delta_\perp\phi_{y_3}(y_1,y_2,y_3^*)\right|\delta. \tag{9.4}$$

Теперь перейдем к пределу при $\delta\to+0$ в равенстве (9.3) и с учетом оценки (9.4) получим равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2+y_2^2)+y_3^2}}\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 = \\ &= -2\int\limits_{B_R}\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,0)\ln\sqrt{y_1^2+y_2^2}dy_1dy_2 = -4\pi\phi(0,0,0), \end{aligned} \tag{9.5}$$

где мы воспользовались известным результатом (см., например, [20]). Заметим, что при указанных условиях на функцию $\phi(y)$ из (9.5) для каждой фиксированной точки $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ справедливо предельное свойство

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(y_1^2+y_2^2)+y_3^2}}\Delta_\perp\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3)dy_1dy_2dy_3 \to \\ \to \phi(x_1,x_2,x_3) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0. \end{aligned}$$

Этот результат означает, что

$$-\Delta_\perp\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(x_1^2+x_2^2)+x_3^2}} \xrightarrow{*} \delta(x_1,x_2,x_3) \quad *\text{-слабо в} \quad \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0.$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{J_0(\varepsilon\beta(y))}{|y_3|}\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3, \quad \beta(y) := \frac{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}{|y_3|},$$

где $\varepsilon\in(0,1)$ и относительно функции $\phi(y)$ выполнены те же условия, что и в начале этого раздела. Пусть $0<\delta<R$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13}, \\ J_{11} := \int\limits_{B_R}\int\limits_{|y_3|\le\delta}\frac{\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)-\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,0)}{|y_3|}J_0(\beta(y)\varepsilon)dy_3dy_1dy_2, \\ J_{12} := \int\limits_{B_R}\int\limits_{\delta\le|y_3|\le R}\frac{\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,y_3)-\Delta_\perp\phi(y_1,y_2,0)}{|y_3|}J_0(\beta(y)\varepsilon)dy_3dy_1dy_2, \end{gathered} \tag{9.6}$$

$$J_{13} := \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \int\limits_{-R}^{R} \frac{J_0\left(\varepsilon \dfrac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{|y_3|}\right)}{|y_3|} dy_3 dy_1 dy_2. \tag{9.7}$$

Отдельно рассмотрим интеграл

$$J_0 := \int\limits_{-R}^{R} \frac{J_0\left(\varepsilon \dfrac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{|y_3|}\right)}{|y_3|} dy_3 = 2 \int\limits_{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\varepsilon/R}^{+\infty} \frac{J_0(z)}{z} dz = 2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{J_0(z)}{z} dz + 2 \int\limits_{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\varepsilon/R}^{1} \frac{J_0(z)}{z} dz := J_{01} + J_{02}. \tag{9.8}$$

Понятно, что интеграл J_{01} сходится, а для интеграла J_{02} справедливы следующие равенства:

$$J_{02} = -2J_0\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)\ln\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) + 2 \int\limits_{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\varepsilon/R}^{1} \ln z J_1(z) dz =$$

$$\begin{gathered} = -2\left(J_0\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) - 1\right)\ln\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) - 2\ln\frac{\varepsilon}{R} - 2\ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + 2\int\limits_0^1 \ln z J_1(z) dz - \\ - 2 \int\limits_0^{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\varepsilon/R} \ln z J_1(z) dz = J_{021} + J_{022} + J_{023}, \\ J_{021} := 2\int\limits_0^1 \ln z J_1(z) dz - 2\ln\frac{\varepsilon}{R}, \\ J_{022} := -2\left(J_0\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) - 1\right)\ln\left(\frac{\varepsilon}{R}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right) - 2 \int\limits_0^{\sqrt{y_1^2+y_2^2}\varepsilon/R} \ln z J_1(z) dz, \\ J_{023} := -2\ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \end{gathered} \tag{9.9}$$

Таким образом, из (9.8), (9.9) и из (9.7) приходим к равенству

$$\begin{gathered} J_{13} = \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)[J_{01} + J_{021}] dy_1 dy_2 + \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) J_{022} dy_1 dy_2 + \\ + \int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) J_{023} dy_1 dy_2 := J_{131} + J_{132} + J_{133}. \end{gathered} \tag{9.10}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} J_{131} := [J_{01} + J_{021}] \int\limits_{\partial B_R} \frac{\partial \phi(y_1, y_2, 0)}{\partial n_{y_1, y_2}} dS_y = 0, \\ \lim_{\varepsilon \to +0} J_{132} = 0, \\ J_{133} = -2\int\limits_{B_R} \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0) \ln\sqrt{y_1^2 + y_2^2} dy_1 dy_2 - 4\pi\phi(0, 0, 0), \end{gathered} \tag{9.11}$$

здесь мы воспользовались классическим результатом (см., например, [20]). Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} J_{12} = J_{120} : \int\limits_{B_R} \int\limits_{\delta \le |y_3| \le R} \frac{\Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) - \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)}{|y_3|} dy_3 dy_1 dy_2 = 0, \tag{9.12}$$

где мы воспользовались равенством (9.2), а также

$$\lim_{\varepsilon \to +0} J_{11} = J_{110} : \int\limits_{B_R} \int\limits_{|y_3| \le \delta} \frac{\Delta_\perp \phi(y_1, y_2, y_3) - \Delta_\perp \phi(y_1, y_2, 0)}{|y_3|} dy_3 dy_1 dy_2, \tag{9.13}$$

причем справедлива оценка (9.4):

$$|J_{110}| \le M_0\delta. \tag{9.14}$$

Теперь мы можем с учетом (9.10)–(9.14) перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (9.6) и получить равенство

$$\lim_{\varepsilon\to+0} J_1 = J_{110} - 4\pi\phi(0,0,0).$$

Осталось перейти к пределу при $\delta \to +0$ в обеих частях равенства (9.14) при $\delta \to +0$ и с учетом (9.14) и получить следующее предельное равенство:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{J_0(\varepsilon\beta(y))}{|y_3|}\Delta_{\perp}\phi(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 \to \phi(0,0,0) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Отсюда вытекает, что при тех же условиях на функцию $\phi(x)$ справедливо следующее предельное свойство для каждой точки $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{J_0(\varepsilon\beta(y))}{|y_3|}\Delta_{\perp}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3)dy_1dy_2dy_3 = \\ = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{J_0(\varepsilon\beta(x-y))}{|x_3-y_3|}\Delta_{\perp}\phi(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3 \to \\ \to \phi(x_1,x_2,x_3) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.\end{aligned} \tag{9.15}$$

Этот результат означает, что

$$-\Delta_{\perp}\frac{1}{4\pi}\frac{J_0(\varepsilon\beta(x))}{|x_3|} \xrightarrow{*} \delta(x_1,x_2,x_3) \quad *\text{-слабо в} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Теперь наша задача доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ справедливо предельное свойство

$$L_1 := \sup_{x\in K}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{J_0(\varepsilon\beta(y))}{|y_3|}\Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3) + 4\pi\phi(x_1,x_2,x_3)\right| \to +0 \tag{9.16}$$

при $\varepsilon \to +0$. Пусть $R > 0$ настолько велико, что $K \subset Ц_{R/4}(0)$ и $\operatorname{supp}\phi(x) \subset Ц_{R/4}(0)$. Тогда $\operatorname{supp}\phi(x-y) \subset Ц_{R/2}(0)$ при $x \in K$. Справедливо следующее неравенство:

$$L_1 \le L_{11} + L_{12} + L_{13},$$

$$L_{11} := \sup_{x\in K}\left|\int_{B_R}\int_{|y_3|\le\delta}\frac{1}{|y_3|}[\Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3) - \Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3)]J_0(\beta(y)\varepsilon)dy_3dy_1dy_2\right|,$$

$$L_{12} := \sup_{x\in K}\left|\int_{B_R}\int_{\delta\le|y_3|\le R}\frac{1}{|y_3|}[\Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3) - \Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3)]J_0(\beta(y)\varepsilon)dy_3dy_1dy_2\right|,$$

$$L_{13} := \sup_{x\in K}\left|\int_{B_R}\Delta_{\perp,y}\phi(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3)\int_{-R}^{R}\frac{J_0(\varepsilon\beta(y))}{|y_3|}dy_3dy_1dy_2 + 4\pi\phi(x_1,x_2,x_3)\right|.$$

Из анализа выражений (9.7)–(9.11) несложно заметить, что

$$L_{13} \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Анализ выражений для L_{11} и L_{12} повторяет анализ (9.12) и (9.13). Таким образом, имеем также, что

$$L_{11}, L_{12} \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Таким образом, предельное свойство (9.16) доказано.

10. О ПЛОТНОМ ВЛОЖЕНИИ $\mathcal{D}(-\infty, T) \overset{ds}{\subset} \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$

Сейчас изучим вопрос о плотности вложения $\mathcal{D}(-\infty, T)$ в банахово пространство $\mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T] := \left\{\phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T] : \phi(T) = \phi'(T) = \phi''(T) = 0\right\}$, которое, очевидно, является банаховым пространством относительно стандартной нормы

$$\|\phi\| := \sup_{t\in[0,T]} |\phi(t)| \sup_{t\in[0,T]} |\phi'(t)| + \sup_{t\in[0,T]} |\phi''(t)|. \tag{10.1}$$

Теорема 10. *Имеет место плотное вложение* $\mathcal{D}(-\infty, T) \overset{ds}{\subset} \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$.

Доказательство. Продолжим произвольно фиксированную функцию $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$ на всю прямую $\mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\overline{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{если} \quad t \in [0, T], \\ 0, & \text{если} \quad t \geq T, \quad t \leq -T_1, \quad T_1 > 0, \end{cases}$$

и при этом $\overline{\phi}(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^1)$. Такое продолжение существует в силу определения пространства $\mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$. Пусть $\varepsilon \in (0, T/2)$. Рассмотрим функцию

$$\overline{\phi}_\varepsilon(t) := \int_{-\infty}^{T-2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t - s|)\overline{\phi}(s)ds,$$

где

$$\omega_\varepsilon(|t|) := \frac{a}{\varepsilon}\begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - t^2}\right), & \text{если} \quad |t| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad |t| > \varepsilon, \end{cases}$$

а постоянная $a > 0$ определяется из условия нормировки

$$\int_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(|t|)dt = 1.$$

Заметим, что функция $\overline{\phi}_\varepsilon(t) \in D(-\infty, T)$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} \overline{\phi}(t) - \overline{\phi}_\varepsilon(t) = \overline{\phi}(t) - \int_{-\infty}^{T+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t - s|)\overline{\phi}(s)ds + \int_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(|t - s|)\overline{\phi}(s)ds = \overline{\phi}(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t - s|)\overline{\phi}(s)ds + \\ + \int_{T-2\varepsilon}^{T} \omega_\varepsilon(|t - s|)\phi(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(|t - s|)[\overline{\phi}(t) - \overline{\phi}(s)]ds + \int_{T-2\varepsilon}^{T} \omega_\varepsilon(|t - s|)\phi(s)ds := I_1(\varepsilon, t) + I_2(\varepsilon, t). \end{gathered} \tag{10.2}$$

Справедливы оценки

$$\begin{gathered} \sup_{t\in[0,T]} |I_1(\varepsilon, t)| \leq \sup_{t\in[0,T]} \sup_{|t-s|\leq\varepsilon} \left|\overline{\phi}(t) - \overline{\phi(s)}\right|, \\ \sup_{t\in[0,T]} |I_2(\varepsilon, t)| \leq \sup_{s\in[T-2\varepsilon,T]} |\phi(s) - \phi(T)|. \end{gathered} \tag{10.3}$$

Функция $\overline{\phi}(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}(\mathbb{R}^1) \subset \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^1)$, а функция $\phi(t) \in \mathbb{C}_0^{(2)}[0, T]$. Поэтому из (10.2), (10.3) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что

$$\sup_{t\in[0,T]} |\phi(t) - \overline{\phi}_\varepsilon(t)| = \sup_{t\in[0,T]} |\overline{\phi}(t) - \overline{\phi}_\varepsilon(t)| < \delta. \tag{10.4}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\bar{\phi}'(t) - \bar{\phi}'_{\varepsilon}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\varepsilon}(|t-s|)[\bar{\phi}'(t) - \bar{\phi}'(s)]ds + \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{dt}\bar{\phi}(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\varepsilon}(|t-s|)[\bar{\phi}'(t) - \bar{\phi}'(s)]ds + \\ + \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T} \omega_{\varepsilon}(|t-s|)\phi'(s)ds + \omega_{\varepsilon}(|t+2\varepsilon-T|)\phi(T-2\varepsilon) := I_3(\varepsilon,t) + I_4(\varepsilon,t) + I_5(\varepsilon,t). \tag{10.5}$$

Справедливы оценки

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_3(\varepsilon,t)| \le \sup_{t\in[0,T]} \sup_{|t-s|\le\varepsilon} |\bar{\phi}'(t) - \bar{\phi}'(s)|, \\ \sup_{t\in[0,T]} |I_4(\varepsilon,t)| \le \sup_{t\in[T-2\varepsilon,T]} |\phi'(s) - \phi'(T)|, \\ \sup_{t\in[0,T]} I_5(\varepsilon,t) \le \frac{a}{\varepsilon} \sup_{t\in[0,T]} \omega\left(\frac{|t+2\varepsilon-T|}{\varepsilon}\right) 2\varepsilon^2 \sup_{\eta\in[T-2\varepsilon,T]} |\phi''(\eta)|, \tag{10.6}$$

где мы воспользовались в (10.6) разложением

$$\phi(T-2\varepsilon) = \phi(T) - 2\varepsilon\phi'(T) + 2\varepsilon^2\phi''(\eta), \quad \eta \in [T-2\varepsilon, T], \tag{10.7}$$

причем $\phi(T) = \phi'(T) = \phi''(T) = 0$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что из (10.5)–(10.7) вытекает оценка

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|\phi'(t) - \bar{\phi}'_{\varepsilon}(t)\right| = \sup_{t\in[0,T]} \left|\bar{\phi}'(t) - \bar{\phi}'_{\varepsilon}(t)\right| < \delta. \tag{10.8}$$

Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\bar{\phi}''(t) - \bar{\phi}''_{\varepsilon}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\varepsilon}(|t-s|)[\bar{\phi}''(t) - \bar{\phi}''(s)]ds + \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d^2\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{dt^2}\bar{\phi}(s)ds, \tag{10.9}$$

$$\int\limits_{T-2\varepsilon}^{T+2\varepsilon} \frac{d^2\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{dt^2}\bar{\phi}(s)ds = \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T} \frac{d^2\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{ds^2}\phi(s)ds = -\left.\frac{d\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{ds}\right|_{s=T-2\varepsilon} \phi(T-2\varepsilon) + \\ + \omega_{\varepsilon}(|t-T+2\varepsilon|)\phi'(T-2\varepsilon) + \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T} \omega_{\varepsilon}(|t-2|)\phi''(s)ds. \tag{10.10}$$

Из равенств (10.9) и (10.10) вытекает равенство

$$\bar{\phi}''(t) - \bar{\phi}''_{\varepsilon}(t) = I_6(\varepsilon,t) + I_7(\varepsilon,t) + I_8(\varepsilon,t) + I_9(\varepsilon,t), \tag{10.11}$$

где

$$I_6(\varepsilon,t) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{\varepsilon}(|t-s|)[\bar{\phi}''(t) - \bar{\phi}''(s)]ds,$$

$$I_7(\varepsilon,t) := -\left.\frac{d\omega_{\varepsilon}(|t-s|)}{ds}\right|_{s=T-2\varepsilon} \phi(T-2\varepsilon),$$

$$I_8(\varepsilon,t) := \omega_{\varepsilon}(|t-T+2\varepsilon|)\phi'(T-2\varepsilon),$$

$$I_9(\varepsilon,t) := \int\limits_{T-2\varepsilon}^{T} \omega_{\varepsilon}(|t-2|)\phi''(s)ds.$$

Справедливы оценки

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_6(\varepsilon,t)| \le \sup_{t\in[0,T]} \sup_{|t-s|\le\varepsilon} |\bar{\phi}''(t) - \bar{\phi}''(s)|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_7(\varepsilon,t)| \le \frac{A}{\varepsilon^2} 2\varepsilon^2 \sup_{\eta\in[T-2\varepsilon,T]} |\phi''(\eta)|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |I_8(\varepsilon,t)| \le \frac{A}{\varepsilon} 2\varepsilon \sup_{\eta\in[T-2\varepsilon,T]} |\phi''(\eta)|,$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|I_9(\varepsilon,t)\right| \le \sup_{\eta\in[T-2\varepsilon,T]}|\phi''(\eta)|,$$

где мы воспользовались разложением (10.7). Осталось заметить, что $\phi(t)\in\mathbb{C}_0^{(2)}[0,T]$ и поэтому

$$\sup_{\eta\in[T-2\varepsilon,T]}|\phi''(\eta)| \to +0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0. \tag{10.12}$$

Таким образом, из соотношений (10.11)–(10.12) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что справедливо выражение

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\phi''(t)-\overline{\phi}''_{\varepsilon}(t)\right| = \sup_{t\in[0,T]}\left|\overline{\phi}''(t)-\overline{\phi}''_{\varepsilon}(t)\right| < \delta. \tag{10.13}$$

Из неравенств (10.4), (10.8) и (10.13) вытекает, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, что справедливо неравенство

$$\left\|\phi(t)-\overline{\phi}_{\varepsilon}(t)\right\| < 3\delta.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Ser. in Nonlin. Analys. and Appl. 2011. V. 15. P. 648.
2. *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. Современные проблемы физики. М.: Наука, 1970.
3. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
4. *Загребина С.А.* Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.
5. *Zamyshlyaeva A.A., Sviridyuk G.A.* Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Юж.-Урал. ун-та. Сер. Матем. Механ. Физ. 2016. V. 8. 4. P. 5–16. $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u_{xx}-u)+u_{xx}=0$ и некоторых связанных с ним задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. № 1. С. 92–102.
6. *Капитонов Б.В.* Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). 4(2.3). С. 607–628.
7. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
8. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
9. *Плетнер Ю.Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
10. *Похожаев С.И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
11. *Galakhov E. I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
12. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // Современ. матем. Фундамент. направл. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.
13. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
14. *Корпусов М.О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // Теор. и матем. физ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.
15. *Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.
16. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 1006–1022.
17. *Кудашев В.Р., Михайловский А.Б., Шарапов С.Е.* К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 417–421.
18. *Каменец Ф.Ф., Лахин В.П., Михайловский А.Б.* Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 412–416.
19. *Ситенко А.П., Сосенко П.П.* О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 4. С. 456–462.
20. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. С. 512.
21. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
22. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. С. 472.